№ 5 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР 1981 г.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.986+517.987

Ш. А. АЮПОВ

ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ ИЗМЕРИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящей заметке предлагается подход к построению теории интегрирования на йордановых алгебрах с точным нормальным конечным следом.

В § 1 рассматривается топология сходимости по мере на OJ-алгебре, построенная с помощью следа, заданного на подалгебре ограниченных элементов. Вводится понятие OJ-алгебры измеримых элементов для JBW-алгебр. В § 2 изучаются пространства L_1 и L_2 для JBW-алгебры со следом, которые являются аналогами пространств интегрируемых и интегрируемых с квадратом элементов соответственно.

Будем придерживаться терминологии работ [1—3].

§ 1. Топология сходимости по мере. Пусть $\mathscr{A}$ — OJ-алгебра, A — OJB-алгебра [4] ограниченных элементов $\mathscr{A}$, ∇ — логика идемпотентов $\mathscr{A}$. И пусть τ — точный нормальный конечный след на A, т. е. нормальный строго положительный линейный функционал на A, такой, что $\tau(U_s a) = \tau(a)$ (см. [5, предложение 1]) для любой симметрии $s \in A$ (т. е. $s^2 = 1$), где оператор U_x на йордановой алгебре A определяется как $U_x a = 2x(xa) - x^2 a$.

Так как τ точно и нормально, то из теоремы 2 [6] вытекает, что A является JBW-алгеброй, т. е. йордановой банаховой алгеброй (JB-алгеброй [1]), обладающей предсопряженным пространством [2]. По теореме 2.3 [2] банахово пространство N, предсопряженное к A, можно отождествить с пространством всех нормальных функционалов на A.

Для положительных чисел ε, δ рассмотрим следующие множества в OJ-алгебре $\mathscr{A}$:

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in \mathscr{A} \mid \exists e \in \nabla : \tau(1 - e) \leqslant \delta,\ U_e a \in A,\ \|U_e a\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Нетрудно видеть, что семейство множеств $\{N(\varepsilon, \delta)\}$ можно принять за базис окрестностей нуля некоторой инвариантной относительно сдвигов топологии t на $\mathscr{A}$. Эту топологию назовем топологией сходимости по мере. Если OJ-алгебра $\mathscr{A}$ ассоциативна, то она изоморфна подалгебре алгебры всех измеримых функций на некотором пространстве с мерой. При этом топология t совпадает с обычной топологией сходимости по мере.

Теорема 1. Йорданова алгебра $\mathscr{A}$ в топологии сходимости по мере является топологической алгеброй, т. е. все алгебраические операции в $\mathscr{A}$ (сложение, умножение, умножение на скаляр) непрерывны в этой топологии по совокупности аргументов.

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда JBW-алгебра A является эрмитовой частью (с симметризованным умножением) некоторой алгебры фон Неймана U с точным нормальным конечным следом τ, топология t на A является сужением топологии двусторонней сходимости по мере [7], определяемой окрестностями нуля вида

$$\Omega(\varepsilon, \delta) = \{a \in U | \exists e \in \nabla : \tau(1-e) \leqslant \delta, \ \|eae\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Эта топология совпадает с топологией сходимости по мере [8, 9], определяемой окрестностями вида

$$\Omega_1(\varepsilon, \delta) = \{a \in U | \exists e \in \nabla : \tau(1-e) \leqslant \delta, \ \|ae\| \leqslant \varepsilon\}$$

(см. [7, теорема 3]).

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем одно определение.

О п р е д е л е н и е. OJ-алгебра $\mathcal{A}$ называется универсальной, если всякая ее максимальная сильно ассоциативная подалгебра является универсальным полуполем (т. е. расширенным K-пространством). Это условие эквивалентно тому, что для любого спектрального семейства идемпотентов $\{e_\lambda\}$ из ∇ существует элемент $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda \in \mathcal{A}$ [3].

Пусть A — произвольная JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ, $\hat{A}$ — пополнение A в топологии t сходимости по мере. Тогда $\hat{A}$ является топологической йордановой алгеброй. В силу t-непрерывности умножения в $\hat{A}$ множество $\{a^2, a \in \hat{A}\}$ является t-замыканием конуса $A^+ = \{a^2, a \in A\}$ в A и определяет на $\hat{A}$ некоторый частичный порядок.

Теорема 2. Алгебра $\hat{A}$ является универсальной OJ-алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

OJ-алгебру $\hat{A}$ назовем OJ-*а л г е б р о й и з м е р и м ы х э л е м е н т о в* для JBW-алгебры A.

Пусть JBW-алгебра A есть подалгебра ограниченных элементов некоторой OJ-алгебры $\mathcal{A}$. Для любого $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda \in \mathcal{A}$ последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \int\limits_{-n}^{n} \lambda de_\lambda,$$

принадлежит A и сходится по мере к x. Значит, A плотно в $\mathcal{A}$ в топологии t.

Отсюда и из теоремы 2 вытекают следующие результаты.

Следствие 1. OJ-алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна подалгебре OJ-алгебры $\hat{A}$, измеримых элементов для JBW-алгебры A.

Следствие 2. Следующие условия эквивалентны:

а) OJ-алгебра $\mathcal{A}$ полна в топологии сходимости по мере;

б) OJ-алгебра $\mathcal{A}$ универсальна;

в) OJ-алгебра $\mathcal{A}$ совпадает с OJ-алгеброй $\hat{A}$.

Замечание 2. В случае, когда JBW-алгебра A является эрмитовой частью алгебры фон Неймана U в гильбертовом пространстве H, из замечания 1 и результатов работ [9, 10] вытекает, что построенная OJ-алгебра $\hat{A}$ изоморфна эрмитовой части алгебры $E(U)$ неограниченных измеримых операторов в H, присоединенных к U [11].

§ 2. Пространства L_1 и L_2. Пусть A — JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ. Можно показать, что отображения

$$a \to \| a \|_1 = \tau(|a|), \; a \to \|a\|_2 = \tau(a^2)^{1/2}, \; a \in A$$

являются нормами на A, которые мы назовем соответственно L_1-нормой и L_2-нормой.

Лемма. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность элементов JBW-алгебры A. Если $\|a_n\|_p \to 0$, то $a_n \xrightarrow{t} \theta$, где $p = 1$ или 2.

Из этой леммы видно, что всякая L_p-фундаментальная последовательность элементов A фундаментальна и по мере, и поэтому сходится по мере в OJ-алгебре $\hat{A}$ измеримых элементов для A.

Через $L_p(\tau)$ $(p = 1, 2)$ обозначим множество t-пределов в $\hat{A}$ фундаментальных по L_p-норме последовательностей элементов A. Очевидно, $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ — подпространства $\hat{A}$, причем $L_2(\tau) \subset L_1(\tau)$, так как по неравенству Шварца $\|a\|_1 \leqslant \tau(1) \; \|a\|_2$.

Теорема 3. Пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изоморфны пополнениям алгебры A по L_1- и L_2-нормам соответственно.

Рассмотрим след τ на A. Поскольку $|\tau(a)| \leqslant \tau(|a|) = \|a\|_1$ для любого $a \in A$, то норма функционала τ на нормированном пространстве $(A, \| \; \|_1)$ равна единице. Этот функционал τ единственным образом можно продолжить до функционала $\hat{\tau}$ на всем пространстве $L_1(\tau)$, поскольку A плотно в $L_1(\tau)$.

Следующая теорема показывает, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ совпадают соответственно с пространствами интегрируемых и интегрируемых с квадратом элементов из $\hat{A}$, а функционал $\hat{\tau}$ играет роль интеграла.

Теорема 4. Пусть $\hat{A}$ — OJ-алгебра измеримых элементов для JBW-алгебры A с точным нормальным конечным следом τ. И пусть элемент $x \in \hat{A}$ имеет спектральное разложение $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ (теорема 4 в [3]). Тогда элемент x принадлежит $L_1(\tau)$ в том и только том случае, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| d\tau(e_\lambda) < +\infty$; при этом $\hat{\tau}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\tau(e_\lambda)$. Элемент x принадлежит $L_2(\tau)$ тогда и только тогда, когда $x^2 \in L_1(\tau)$. Кроме того, для $x \in L_1(\tau)$ $\|x\|_1 = \hat{\tau}(|x|)$, для $x \in L_2(\tau)$ $\| x \|_2 = \hat{\tau}(x^2)^{1/2}$.

Замечание 3. В случае когда JBW-алгебра A ассоциативна, она изометрически изоморфна алгебре $L_\infty(X, m)$ всех существенно ограниченных действительных измеримых функций на некотором пространстве X с мерой m. При этом OJ-алгебра $\hat{A}$ изоморфна алгебре $S(X, m)$ всех измеримых функций на X, а пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изометрически изоморфны соответственно пространствам $L_1(X, m)$ и $L_2(X, m)$ интегрируемых и интегрируемых с квадратом функций из $S(X, m)$.

Замечание 4. Если JBW-алгебра A является эрмитовой частью алгебры фон Неймана U, то пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изоморфны соответственно пространствам интегрируемых и интегрируемых с квадратом самосопряженных операторов, измеримых относительно U.

В заключение рассмотрим связь пространства $L_1(\tau)$ с предсопряженным пространством к JBW-алгебре A. Ситуация здесь аналогична случаю алгебр фон Неймана.

Теорема 5. Пусть A — JBW-алгебра, N — банахово пространство, предсопряженное к A. И пусть τ — точный нормальный конечный след на А. Тогда банаховы пространства $L_1(\tau)$ и N изометрически изоморфны. При этом отображение $a \to \varphi_a$, где $\varphi_a(x) = \hat{\tau}(ax), a \in L_1(\tau)$, $x \in A$ (соответственно $a \in A$, $x \in L_1(\tau)$) является изометрическим и порядковым изоморфизмом между $L_1(\tau)$ и N (соответственно между A и $[L_1(\tau)]^*$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M. [a. o.]. Advances in Math., *28,* 1978, No. 1, 11.
2. Shultz F. W. J. of Funct. Analysis *31*, 1979, No. 3, 360.
3. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. ДАН СССР, *249,* 1979, № 4, 789.
4. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 2, 3.
5. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 6, 10.
6. Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», серия физ.-мат. наук, 1980, № 3, 9.
7. Муратов М. А. Функциональный анализ, Труды ТашГУ, вып. 573, 1978, 51.
8. Stinespring W. F. Trans Amer. Math. Soc, *90.* 1959, 15.
9. Nelson E. J. of Funct. Analysis *15*, 1974, No. 2, 103.
10. Yeadon F. J. Proc. Cambridge Philos. Soc., *74*, 1973 257.
11. Segal I. Ann. of Math., *57,* 1953, 401.

Институт математики
им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
7. V 1981 г.