Ш. А. АЮПОВ

УДК 517.98

ИЗОМЕТРИИ НЕАССОЦИАТИВНЫХ L_p-ПРОСТРАНСТВ

Изометрические линейные отображения некоммутативных L_p-пространств, построенных на алгебрах фон Неймана с полуконечным следом, были полностью описаны в работе [1]. Оказалось, что изометрии некоммутативных L_p-пространств по существу сводятся к йордановым изоморфизмам соответствующих алгебр фон Неймана, т. е. в этом вопросе решающее значение имеет лишь йорданова структура алгебр фон Неймана. В связи с этим более естественным является изучение изометрий неассоциативных L_p-пространств, построенных на йордановых банаховых алгебрах.

В настоящей работе мы опишем изометрии L_p-пространств, построенных на JBW-алгебрах с точным нормальным конечным следом. Из полученного результата, в частности, вытекает, что неассоциативные L_p-пространства являются действительно «неассоциативными», т. е. представляют собой существенно более широкий класс банаховых пространств, чем некоммутативные L_p-пространства (ср. [2]). Необходимые сведения о JBW-алгебрах и неассоциативных L_p-пространствах можно найти в [3—5].

Пусть A — JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ, $\mathcal{M}(A)$ — OJ-алгебра измеримых элементов, присоединенных к A [4, 6], $L_p(A, \tau)$ — пополнение A по L_p-норме $\|x\|_p = \tau\left(|x|^p\right)^{1/p}$, $x \in A$, $p \in [1, \infty)$ [7, 8]. Известно, что $A \subset L_p(A, \tau) \subset \mathcal{M}(A)$ [4, гл. IV].

Теорема. Пусть A_1, A_2 — JBW-алгебры с точными нормальными конечными следами τ_1 и τ_2 соответственно. И пусть для $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$, $T: L_p(A_1, \tau_1) \to L_p(A_2, \tau_2)$ — непрерывное линейное отображение. Тогда T является изометрией в том и только том случае, когда

$$Tx = T1\alpha(x) \text{ для всех } x \in A_1, \tag{1}$$

где α — нормальный йорданов изоморфизм из A_1 на слабо замкнутую йорданову подалгебру в A_2, причем

$$(i)\ T1 \leftrightarrow \alpha(x) \text{ для всех } x \in A_1;$$

$$(ii)\ \tau_1(x) = \tau_2\left(|T1|^p \alpha(x)\right) \text{ для всех } x \in A_1^+.$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Предложение 1. Пусть τ — точный нормальный конечный след на JBW-алгебре A, $a, b \in L_p(A, \tau)$, $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$. Тогда равенство

$$\|a+b\|_p^p + \|a-b\|_p^p = 2\left(\|a\|_p^p + \|b\|_p^p\right) \tag{2}$$

имеет место в том и только том случае, когда $U_a b^2 = 0$, Доказательство. Рассмотрим два элемента $a_0 = a(1+|a|)^{-1}$, $b_0 = b(1+|b|)^{-1}$ в OJ-алгебре $\mathcal{M}(A)$. Легко видеть, что a_0 и b_0 лежат в единичном шаре JBW-алгебры A. Рассмотрим JBW-подалгебру A_0, порожденную элементами a_0, b_0, 1. В силу предложения 3.9 из [4, гл. I] можно считать, что A_0 — обратимая JW-алгебра. Поэтому след $\tau_0 = \tau|_{A_0}$ можно продолжить до конечного следа τ_1 на обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{U}(A_0)$. Далее, поскольку $a = a_0(1-|a_0|)^{-1}$, $b = b_0(1-|b_0|)^{-1}$ являются измеримыми элементами, присоединенными к A_0, т. е. $a, b \in \mathcal{M}(A_0)$ и $\|a\|_p < \infty$, $\|b\|_p < \infty$, то $a, b \in L_p(A_0, \tau_0) \subset L_p(\mathcal{U}(A_0), \tau_1)$. Поэтому a и b можно рассматривать как самосопряженные измеримые операторы, интегрируемые с p-й степенью, присоединенные к алгебре фон Неймана $\mathcal{U}(A_0)$ с конечным следом. В силу [1, теорема 1] равенство (2) имеет место в том и только том случае, когда $a \cdot b = 0$, где $a \cdot b$ — обычное „ассоциативное" произведение операторов a и b. Так как $U_a b^2 = a \cdot b^2 \cdot a = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^*$, то соотношение $a \cdot b = 0$ эквивалентно тому, что $U_a b^2 = 0$. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть a, b — элементы произвольной OJ-алгебры E. Следующие условия эквивалентны:

(a) $U_a b^2 = 0$;

(b) $U_b a^2 = 0$;

(c) $s(a)\,s(b) = 0$, где $s(x)$ означает носитель элемента x в OJ-алгебре E.

При выполнении этих условий элементы a и b совместны.

Доказательство. (a) $\Longrightarrow$ (b). Так как $U_a(nb)^2 = n^2 U_a b^2 = 0 \leqslant 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то в силу [5, предложение 3, с. 152] $n^2 U_b a^2 = U_{nb} a^2 \leqslant 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Из архимедовости порядка в OJ-алгебре [5, следствие, с. 139] следует, что $U_b a^2 = 0$. (b) $\Longrightarrow$ (c). Пусть $U_b a^2 = 0$, $a^2 = \int_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$ — спектральное разложение элемента a^2 в OJ-алгебре E [4, гл. III; 5, гл. III]. Тогда [5, с. 145] $s(a) = s(a^2) = \sup_n e^{\perp}_{1/n}$. Так как $e^{\perp}_{1/n} \leqslant na^2$, то из положительности и нормальности оператора U_b [5, гл. III, § 5] следует, что $U_b s(a) = \sup_n U_b e^{\perp}_{1/n} \leqslant \sup_n nU_b a^2 = 0$, т. е. $U_b\, s(a) = 0$. Так как (a) $\Longrightarrow$ (b), то из последнего равенства следует, что $U_{s(a)} b^2 = 0$. Отсюда, как и выше, вытекает, что $U_{s(a)}\, s(b) = 0$. Из [5, предложение 1, с. 139] получаем, что $s(a)\, s(b) = 0$. (c) $\Longrightarrow$ (a). Пусть $s(a)\, s(b) = 0$. Так как $s(b) = s(b^2)$, то в силу [5, теорема 3, с. 145] $ab^2 = 0$. Так как $s(a) = s(a^2)$, то аналогично $a^2 b^2 = 0$. Следовательно, $U_a b^2 = 2a(ab^2) = a^2 b^2 = 0$.

Наконец, покажем, что $a \leftrightarrow b$. Так как $s(a)\, s(b) = 0$, то $a \in J_1(s(a))$, $s(b) \in J_0(s(a))$, где $J_i(e)$ означает пирсовскую компоненту йордановой алгебры E по идемпотенту $e \in E$, $i = 0, 1/2, 1$. По таблице умножения пирсовских компонент $as(b) = 0$, т. е. $a \in J_0(s(b))$. Так как $b \in J_1(s(b))$, то в силу [5, предложение 6, с. 127] $a \leftrightarrow b$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть $Tx = T1\alpha(x)$ для всех $x \in A_1$, причем элемент $b = T1$ и йорданов изоморфизм α удовлетворяют условиям (i), (ii). Тогда, учитывая, что $b \leftrightarrow \alpha(x)$ для всех $x \in A_1$, имеем

$$\| Tx \|_p^p = \tau_2 (| b\alpha(x)|^p) = \tau_2(|b|^p \alpha(|x|^p)) = \tau_1(|x|^p) = \|x\|_p^p,$$

т. е. T — изометрия на A_1, а в силу непрерывности, T изометрично на всем $L_p(A_1, \tau_1)$.

Необходимость. Пусть T — изометрия. Для идемпотента $e \in A_1$ положим $\alpha(e) = s(Te)$ — носитель элемента Te в OJ-алгебре $\mathcal{M}(A_2)$. Если e, f — идемпотенты в A_1 и $ef = 0$, то

$$\| e \pm f\|_p^p = \tau_1((e \pm f)^p) = \tau_1(e) + \tau_1(f) = \|e\|_p^p + \|f\|_p^p.$$

Так как T — изометрия, то

$$\| Te \pm Tf\|_p^p = \|e \pm f\|_p^p = \|e\|_p^p + \|f\|_p^p = \|Te\|_p^p + \|Tf\|_p^p,$$

т. е.

$$\|Te + Tf\|_p^p + \|Te - Tf\|_p^p = 2(\|Te\|_p^p + \|Tf\|_p^p).$$

В силу предложения 1 $U_{Te}(Tf)^2 = 0$, а из предложения 2 имеем, что $s(Te)s(Tf) = 0$, т. е. $\alpha(e)\alpha(f) = 0$, причем $Te \leftrightarrow Tf$. Отсюда $\alpha(e+f) = s(Te + Tf) = s(Te) + s(Tf) = \alpha(e) + \alpha(f)$. Для любого простого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in A_1$, где $\lambda_i \in R$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, определим $\alpha(x)$, положив

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha(e_i).$$

Тогда, очевидно, $\alpha(x^2) = \alpha(x)^2$, $\|\alpha(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$, $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x)$, при $\lambda \in R$, и $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ для совместных простых элементов $x, y \in A_1$.

Пусть x — произвольный элемент из A_1. Через $\{f_n(\lambda)\}$ обозначим последовательность ступенчатых действительных функций с $f_n(0) = 0$, сходящуюся равномерно к функции $f(\lambda) = \lambda$ на спектре элемента x. Тогда легко видеть, что последовательность простых элементов $\{f_n(x)\}$ сходится по $\| \|_\infty$-норме к элементу x, и следовательно, последовательность $\{\alpha(f_n(x))\}$ сходится в A_2 по $\| \|_\infty$-норме к некоторому элементу, который мы обозначим через $\alpha(x)$. Из определения видно, что α является отображением из A_1 в A_2, сужение которого на любую сильно ассоциативную подалгебру A_1 является изометрическим йордановым изоморфизмом.

Пусть e, f — идемпотенты в A_1 и $f \leqslant e$. Тогда $(e - f)f = 0$ и, следовательно, как отмечалось выше, $T(e - f) \leftrightarrow Tf$ и $s(T(e - f)) \times s(Tf) = 0$. Отсюда $T(e - f)\alpha(f) = 0$ (предложение 2). Кроме того, по определению $Tf\alpha(f) = Tf$. Поэтому

$$Tf = Te\alpha(f) \quad \text{при} \quad f \leqslant e. \tag{3}$$

Следовательно, если x — простой элемент с носителем $s(x) \leqslant e$, то $Tx = Te\alpha(x)$. Пусть $x \in A_1$ — произвольный элемент с $s(x) \leqslant e$, $\{f_n\}$ — рассмотренная выше последовательность ступенчатых функций. Из неравенства

$$\| Te(\alpha(x) - \alpha(f_n(x)))\|_p \leqslant \|Te\|_p \|\alpha(x) - \alpha(f_n(x))\|_\infty$$

следует, что

$$Tx = L_p\text{-}\lim_n Tf_n(x) = L_p\text{-}\lim_n Te\alpha(f_n(x)) = Te\alpha(x),$$

так как, очевидно, $x = L_p\text{-}\lim\limits_n f_n(x)$.

Итак, мы показали, что $Tx = Te\alpha(x)$ для всех $x \in A_1$ с $s(x) \leqslant e$. В частности, при $e = 1$ получаем требуемое равенство

$$Tx = T1\alpha(x) \text{ для всех } x \in A_1 \qquad (4)$$

Пусть e, f — идемпотенты и $f \leqslant e$. В силу (3)

$$(Te\alpha(f))\alpha(f) = Tf\alpha(f) = Tf = Te\alpha(f).$$

В силу [5, следствие 1, с. 128] отсюда следует, что элемент Te совместен с идемпотентом $\alpha(f)$ для всех $f \leqslant e$. В частности,

$$T1 \leftrightarrow \alpha(f) \text{ для всех идемпотентов } f \in A_1. \qquad (5)$$

В силу теоремы 2 из [5, с. 144] соотношение (5) эквивалентно тому, что $e_\lambda(e_\lambda\alpha(f)) = e_\lambda\alpha(f)$ для всех $\lambda \in R$, где $T1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$. Из непрерывности по норме умножения в A_2 отсюда следует, что $e_\lambda(e_\lambda\alpha(x)) = e_\lambda\alpha(x)$ для любого $x \in A_1$. Снова используя теорему 2 из [5, с. 144], получаем

$$(i)\ T1 \leftrightarrow \alpha(x) \text{ для всех } x \in A_1.$$

Покажем аддитивность отображения α на произвольных элементах из A_1 (аддитивность на сильно ассоциативных подалгебрах уже имеется). Поскольку OJ-алгебра $\mathcal{M}(A_2)$ является универсальной, то она регулярна [6, замечание 2, с. 16]. Поэтому для $T1$ существует элемент $y \in \mathcal{M}(A_2)$, такой, что $yT1 = s(T1) = \alpha(1)$, причем $y \leftrightarrow \alpha(x)$ для всех $x \in A_1$. Умножая обе части равенства (4) на y, получаем для всех $x \in A_1$

$$yTx = y(T1\alpha(x)) = (yT1)\alpha(x) = \alpha(1)\alpha(x) = \alpha(x),$$

так как $y \leftrightarrow \alpha(x)$ и $\alpha(1) \leftrightarrow \alpha(x)$. Следовательно, аддитивность α следует из аддитивности T. Итак, мы полностью доказали, что α — йорданов изоморфизм из A_1 в A_2, причем $\|\alpha(x)\|_\infty = \|x\|_\infty$ для всех $x \in A_1$.

Наконец, при $f \leqslant e$ имеем в силу (3)

$$\tau_1(f) = \|f\|_p^p = \|Tf\|_p^p = \|Te\alpha(f)\|_p^p = \tau_2(|Te|^p\alpha(f)),$$

а из линейности и непрерывности τ_1 и τ_2 следует

$$\tau_1(x) = \tau_2(|Te|^p\alpha(x)) \text{ для всех } x \in U_eA_1^+.$$

В частности, при $e = 1$ получаем требуемое соотношение

$$(ii)\ \tau_1(x) = \tau_2(|T1|^p\alpha(x)) \text{ для всех } x \in A_1^+.$$

Из нормальности τ_1 и τ_2 и из равенства (1) следует, что α — нормальный йорданов изоморфизм из A_1 в A_2. В частности, $\alpha(A_1)$ — слабо замкнутая JBW-подалгебра в A_2. Теорема доказана.

Следствие 1. Изометрия T отображает $L_p(A_1, \tau_1)$ на $L_p(A_2, \tau_2)$ тогда и только тогда, когда α является йордановым изоморфизмом из A_1 на A_2, элемент $T1$ лежит в центре OJ-алгебры $\mathcal{M}(A_2)$ и имеет носитель 1.

Доказательство. Сначала покажем, что $\alpha(1) = s(T1) = 1$. Если $\alpha(1) \neq 1$, то для идемпотента $g = 1 - \alpha(1)$, очевидно, выполняются соотношения $g \leftrightarrow \alpha(x)$ и $g\alpha(x) = 0$ для всех $x \in A_1$. Так как $T1 \leftrightarrow \alpha(x)$, то $gTx = g(T1\alpha(x)) = T1(g\alpha(x)) = 0$ для всех $x \in A_1$. Отсюда $gTx = 0$ для всех $x \in L_p(A_1, \tau_1)$, так как A_1 плотно в $L_p(A_1, \tau_1)$ по L_p-норме и имеет место неравенство $\|gy_1 - gy_2\|_p \leqslant \|g\|_\infty\|y_1 - y_2\|_p = \|y_1 - y_2\|_p$, $y_1, y_2 \in L_p(A_2, \tau_2)$ [4, гл. IV, предложение 2.4]. Так как T — отображение „на", то $g = Ta$ для некоторого $a \in L_p(A_1, \tau_1)$. Тогда $g = g^2 = gTa = 0$. Следовательно, $\alpha(1) = 1$.

Теперь покажем, что $\alpha(A_1) = A_2$. Так как $\alpha(A_1)$ слабо замкнуто в A_2, то достаточно показать, что множество идемпотентов из $\alpha(A_1)$ минорантно в множестве идемпотентов из A_2. Итак, пусть $g \in A_2$ — идемпотент, $g \neq 0$. Так как T сюръективно, то существует $x \in L_p(A_1, \tau_1)$, что $Tx = 1 - g \neq 1$. Пусть $s(x)$ — носитель x в $\mathcal{M}(A_1)$. Так как $g \leftrightarrow Tx$ и $gTx = 0$, то

$$\| g \pm Tx \|_p^p = \| g \|_p^p + \| Tx \|_p^p.$$

Из изометричности T^{-1} следует, что

$$\| T^{-1} g \pm x \|_p^p = \| T^{-1} g \|_p^p + \| x \|_p^p.$$

В силу предложения 1 ненулевой идемпотент $s(T^{-1}g)$ ортогонален $s(x)$, т. е. $s(x) \neq 1$. Тогда для $e = 1 - s(x) \neq 0$ имеем

$$\| e \pm x \|_p^p = \| e \|_p^p + \| x \|_p^p.$$

Используя изометричность T, получаем

$$\| Te \pm Tx \|_p^p = \| Te \|_p^p + \| Tx \|_p^p,$$

т. е.

$$\| Te \pm g^{\perp} \|_p^p = \| Te \|_p^p + \| g^{\perp} \|_p^p.$$

Из предложения 1 следует, что $s(Te) g^{\perp} = 0$, т. е. $\alpha(e)(1-g) = 0$, или $\alpha(e) = \alpha(e) g \leqslant g$. Итак, для любого идемпотента $g \in A_2$, $g \neq 0$, существует ненулевой идемпотент $e \in A_1$, такой, что $\alpha(e) \leqslant g$. Следовательно, $\alpha(A_1) = A_2$.

В частности, так как $T1 \leftrightarrow \alpha(x)$ для всех $x \in A_1$, то $T1$ лежит в центре OJ-алгебры $\mathcal{M}(A_2)$. Утверждение доказано.

Следствие 2. Пространство $L_p(A, \tau)$ изометрически изоморфно эрмитовой части „некоммутативного" L_p-пространства $L_p(\mathcal{U}, \tau_0)$, построенного на алгебре фон Неймана с конечным следом τ_0, тогда и только тогда, когда JBW-алгебра A специальна и изоморфна эрмитовой части алгебры фон Неймана $\mathcal{U}$.

Следствие 3. Пусть (X, m) — измеримое пространство с конечной мерой m. Неассоциативное L_p-пространство $L_p(A, \tau)$ изометрически изоморфно функциональному пространству $L_p(X, m)$ действительных измеримых функций, интегрируемых с p-й степенью, в том и только том случае, когда JBW-алгебра A изоморфна алгебре $L_\infty(X, m)$, т. е. ассоциативна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yeadon F. J.//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1981. Vol. 90. N 1. P. 41—50. 2. Katavolos A.//Canad. J. Math. 1981. Vol. 33. N 6. P. 1319—1327. 3. Hanche-Olsen H., Stormer E. Jordan Operator algebras. London: Pitman Ltd. 1984. VIII+184 p. 4. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан. 1986. 124 с. 5. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан. 1983. 304 с. 6. Аюпов Ш. А.//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 3—25. 7. Абдуллаев Р. З.//Деп. ВИНИТИ. 1983. № 1975—83. Деп. 19 с. 8. Iochum B.//Pacific J. Math. 1986. Vol. 122. N 2. P. 417—433.

Институт математики имени В. И. Романовского
АН УзССР

Дата поступления
27. 01. 1987 г.