В сборнике содержатся результаты исследований вопросов операторных алгебр, теории упорядоченных пространств с порядковой единицей и их приложения к эргодической теории и статистической физике.

Для специалистов в области функционального анализа и его приложений.

О $\frac{1702030000—3900}{М355\ (04)—88}$ 55—88

ISBN 5-648-00069-3

Ш. А. АЮПОВ

СЛЕДЫ НА *JW*-АЛГЕБРАХ И ОБЕРТЫВАЮЩИХ *W**-АЛГЕБРАХ

Йордановы алгебры ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, замкнутые в слабой операторной топологии (*JW*-алгебры), и их абстрактные обобщения—йордановы банаховы алгебры, обладающие предсопряженным пространством (*JBW*-алгебры), представляют собой неассоциативный вещественный аналог алгебр фон Неймана (*W**-алгебр). В последние годы появилось значительное количество работ, в которых различные аспекты теории *W**-алгебр с бо́льшим или меньшим успехом переносятся на йорданов случай. Одним из методов получения результатов такого рода является сведе́ние к случаю *W**-алгебр с помощью изучения связи между *JW*-алгеброй и ее обертывающей *W**-алгеброй. Так, в работе [1] доказано, что любой нормальный след на обратимой *JW*-алгебре может быть продолжен с сохранением всех его свойств (конечности, полуконечности, точности) до следа на обертывающей *W**-алгебре. Это позволило установить, что тип обратимой *JW*-алгебры совпадает с типом ее обертывающей *W**-алгебры. В дальнейшем с помощью этого подхода удалось получить классификацию инъективных *JW*-факторов [2], доказать аналог теоремы Глисона для *JBW*-алгебр [3], некоторые варианты теоремы Радона — Никодима [4] и т. д. Более подробный обзор результатов такого типа дан в [5].

В работе [1] остались не решенными два вопроса, касающиеся следов на *JW*-алгебрах и их обертывающих *W**-алгебрах. Было доказано, что если A — обратимый *JW*-фактор, $U(A)$ — его обертывающая *W**-алгебра, то сужение любого полуконечного следа, заданного на $U(A)$, является полуконечным следом на A. В общем случае, когда A — не фактор, вопрос о полуконечности сужения не был решен. Не был выяснен также вопрос о единственности продолжения нормального следа с *JW*-алгебры A до следа на *W**-алгебре $U(A)$. Настоящая работа посвящена окончательному решению этих вопросов.

В п. 1 даны некоторые предварительные сведения из теории

JW-алгебр, п. 2 посвящен изучению структуры обертывающ W^*-алгебры для обратимых JW-алгебр, особенно в случае, ко да JW-алгебра изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры. В п. приведены основные результаты работы. Доказано, что сужен любого полуконечного следа на обертывающей W^*-алгебре обр тимой JW-алгебры A является полуконечным следом на A (теор ма 3). Показано также, что любой нормальный след на A име единственное продолжение до следа на $U(A)$ в том и только том случае, когда A не содержит прямых слагаемых, изоморфны эрмитовой части W^*-алгебры (теорема 4).

1. Предварительные сведения. Пусть H — комплексное гильбе тово пространство, $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейн операторов на H. Напомним [6], что JW-алгебра — это веществе ное линейное пространство самосопряженных операторов из $B(H$ замкнутое относительно йорданова произведения $a\circ b=1/2(ab+b$ и замкнутое в слабой операторной топологии. Центр Z_A JW-а гебры A — это множество операторов из A, коммутирующи со всеми операторами из A в смысле обычного умножения опе раторов. Не ограничивая общности, всегда можно считать, чт JW-алгебра содержит единичный оператор $\mathbf{1}$ из $B(H)$. Есл $Z_A=\{\lambda 1, \lambda\in R\}$, то JW-алгебра A называется JW-фактором (R — поле действительных чисел).

JW-алгебра A называется обратимой, если $a_1 a_2 \dots a_n$ — $+ a_n a_{n-1} \dots a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

Примерами необратимых JW-алгебр являются спин-фактор (JW-факторы типа I_2) размерности >6 (см. [7]). Более тог любой необратимый JW-фактор изоморфен спин-фактору.

Пусть A — JW-алгебра. Через $R(A)$ (соответственно $U(A)$ обозначим слабо замкнутую вещественную (соответственно комп лексную) $*$-подалгебру в $B(H)$, порожденную A. Очевидно, $U(A$ является W^*-алгеброй (алгеброй фон Неймана) в $B(H)$, приче $U(A)=A''$ — бикоммутант A в $B(H)$; $U(A)$ будем называть обер тывающей W^*-алгеброй для A.

Известно [8, 9], что если A — обратимая JW-алгебра, то

$$A=R(A)_{SA}, \quad U(A)=R(A)+iR(A),$$

где R_{SA} означает совокупность эрмитовых элементов $*$-алгебры R

Произвольную обратимую JW-алгебру A можно разложить прямую сумму JW-подалгебр $A_r + A_c$, где A_r — обратимая JW-ал гебра, такая, что $R(A_r)\cap iR(A_r)=\{0\}$ (такие JW-алгебры назо вем чисто вещественными), A_c — обратимая JW-алгебра, совпа дающая с эрмитовой частью своей обертывающей W^*-алгебры $U(A_c)$ (см. [7, лемма 6.1]). Комбинируя этот факт с [7, теоре ма 6.4] и [10], получаем следующий результат.

Предложение 1. Произвольная JW-алгебра A может быт разложена в прямую сумму JW-подалгебр $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где A_1 — чисто вещественная JW-алгебра; A_2 — эрмитова часть W^*-алгебры $U(A_2)$; A_3 изоморфна прямой сумме JW-алгебр вида $L^\infty(\Omega, \mu, V)$, где Ω — локально компактное пространство с мерой Радона μ, V — спин-фактор.

Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра, т. е. $R(A)\cap iR(A)=\{0\}$. Тогда, как уже отмечалось, ее обертывающая W^*-алгебра совпадает с прямой суммой $R(A)\oplus iR(A)$. Для $x=a+ib\in U(A)$, a, $b\in R(A)$, положим

$$\alpha(x)=a^*+ib^*.$$

Тогда (см. [9, лемма 3.2] или [2, теорема 3.1]) α является инволютивным (т. е. периода 2) $*$-антиавтоморфизмом W^*-алгебры $U(A)$, причем

$$A=\{x\in U(A): \alpha(x)=x=x^*\}.$$

Назовем α инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $U(A)$, определяющим JW-алгебру A.

Напомним, что след на JW-алгебре A — это функция $\tau: A^+ \to [0, +\infty]$, такая, что

(i) $\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y)$ для всех $x, y\in A^+$;

(ii) $\tau(\lambda x)=\lambda\tau(x)$ для всех $x\in A^+$, $\lambda\in R^+$;

(iii) $\tau(sxs)=\tau(x)$ для всех $x\in A^+$ и любой симметрии $s\in A$ (т. е. $s^2=1$).

Понятия точности, нормальности, конечности и полуконечности следа определяются, как и в случае W^*-алгебр.

2. JW-алгебры и их обертывающие W^*-алгебры. Выясним структуру обертывающей W^*-алгебры для обратимых JW-алгебр. Если JW-алгебра A является абелевой (т. е. все операторы в ней коммутируют относительно обычного произведения), то A совпадает с эрмитовой частью абелевой W^*-алгебры $A+iA$. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно предполагать, что рассматриваемые JW-алгебры *не содержат центральных абелевых проекторов.*

Пусть A — обратимая JW-алгебра, $U=U(A)$ — ее обертывающая W^*-алгебра.

Предложение 2. Пусть JW-алгебра A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры N. Тогда в N существуют два центральных проектора $e, f, e\vee f=\mathbf{1}$, такие, что обертывающая W^*-алгебра $U(A)$ $*$-изоморфна $eN\oplus fN_0$, где N_0 — противоположная W^*-алгебра для N.

Доказательство. Пусть φ — йорданов изоморфизм между N_{SA} и A. Для $x=a+ib$, a, $b\in N_{SA}$, положим $\varphi(x)=\varphi(a)+i\varphi(b)$ и получим C^* — изоморфизм φ между N и $A+iA\subset U(A)$, причем $\varphi(N)=A+iA$ порождает $U(A)$ как W^*-алгебру. В силу [8, лемма 3.2] существует центральный проектор $p\in U(A)$, такой, что $\varphi_1: x\to\varphi(x)p$ является $*$-гомоморфизмом, $\varphi_2: x\to$

$\to \varphi(x)p^{\perp}$ — $*$-антигомоморфизмом, $x \in N$. Так как φ нормален (как и любой изоморфизм JW-алгебр), то φ_1 и φ_2 также являются нормальными. Поэтому их ядра $\operatorname{Ker}\varphi_1$ и $\operatorname{Ker}\varphi_2$ являются слабо замкнутыми двусторонними идеалами в N и потому имеют вид $\operatorname{Ker}\varphi_1 = q_1N$, $\operatorname{Ker}\varphi_2 = q_2N$, где q_1 и q_2 — центральные проекторы в N. Так как $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=\varphi(x)$, $x \in A$ и φ точно, то q_1 и q_2 дизъюнктны. Далее, канонический фактор $*$-гомоморфизм $\psi_1 : N/\operatorname{Ker}\varphi_1 \to (A+iA)p$ является $*$-изоморфизмом. Так как $N/\operatorname{Ker}\varphi_1 = N/q_1^{\perp}N \cong q_1N$, то, положив $e=q_1^{\perp}$, получим $*$-изоморфизм между eN и $(A+iA)p \subset U(A)p = U(Ap)$. Отсюда следует, что $(A+iA)p$ является W^*-алгеброй и, очевидно, содержит JW-алгебру Ap. Следовательно, $(A+iA)p=U(Ap)$, т. е. $eN \cong (A+iA)p = U(Ap) = U(A)p$. Аналогично, положив $f=q_2^{\perp}$, получим $*$-антиизоморфизм между fN и $U(A)p^{\perp}$, т. е. $*$-изоморфизм $fN_0 \cong U(A)p^{\perp}$.

Следовательно,

$$U(A) = U(A)p \oplus U(A)p^{\perp} \cong eN \oplus fN_0,$$

причем $e \vee f = q_1^{\perp} \vee q_2^{\perp} = (q_1q_2)^{\perp} = 0^{\perp} = \mathbf{1}$.

Предложение доказано.

Замечание. Если отождествить $*$-изоморфные W^*-алгебры $U(A)$ и $eN \oplus fN_0 = \{(ea, fb_0),\ a,\ b \in N\}$, то из доказательства предложения 2 видно, что при этом JW-алгебра A будет отождествлена с JW-алгеброй $\{(ea, fa_0),\ a \in N_{SA}\}$, где a_0 означает элемент $a \in N$, рассмотренный как элемент противоположной W^*-алгебры N_0. Далее, так как, по предположению, N не содержит центральных абелевых проекторов, то в силу [8, лемма 2.15] $R(N_{SA}) = N$, где $R(N_{SA})$ — вещественная обертывающая $*$-алгебра для JW-алгебры N_{SA}. Поэтому

$$R(A) = \{(ea, fa_0^*),\ a \in N\}.$$

П р е д л о ж е н и е 3. Если чисто вещественная JW-алгебра A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры N, то $U(A) \cong N \oplus N_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предыдущего предложения достаточно показать, что $e=f=\mathbf{1}$. Рассмотрим элемент $x = e - ef \in N_{SA}$. Очевидно, $ex = x$, $fx = 0$. Поэтому $(x, 0) = (ex, fx_0) \in A \subset R(A)$. Далее, $ix \in N$ и в силу предыдущего замечания $(ix, 0) = \left(e(ix), f(ix)_0^*\right) \in R(A)$, т. е. $i(x, 0) = (ix, 0) \in R(A) \cap iR(A) = \{0\}$. Следовательно, $x = 0$, т. е. $e \leqslant f$. Аналогично доказывается, что $f \leqslant e$, т. е. $e=f$. Так как $e \vee f = \mathbf{1}$, то $e=f=\mathbf{1}$.

Предложение доказано.

Следствие 1. При выполнении условий предложения 2:

а) JW-алгебра A является чисто вещественной тогда и только тогда, когда $e=f=\mathbf{1}$;

б) JW-алгебра A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры тогда и только тогда, когда $ef=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Необходимость условия уже установлена в предложении 3. Наоборот, если $e=f=\mathbf{1}$, то $A = \{(a, a_0),\ a \in N_{SA}\}$ и $R(A) = \left\{\left(a, a_0^*\right),\ a \in N\right\}$. Легко видеть, что $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$, так как если $\left(a, a_0^*\right) = i\left(b, b_0^*\right)$, то $(ib)^* = ib^*$, т. е. $b = a = 0$. Следовательно, A — чисто вещественная JW-алгебра.

б) Если $ef=0$, то $f = e^{\perp}$ и поэтому $U(A) = eN \oplus e^{\perp}N_0$. Если $(ea, e^{\perp}b_0) \in U(A)_{SA}$, то для $x = ea + e^{\perp}b \in N$ имеем $(ea, e^{\perp}b_0) = (ex, e^{\perp}x_0)$, т. е. $(ea, e^{\perp}b_0) \in A$. Следовательно, $A = U(A)_{SA}$. Наоборот, пусть $ef \neq 0$. Тогда $A = \{(ea, fa_0),\ a \in N_{SA}\}$ содержит прямое слагаемое $A_0 = \{(efa, efa_0),\ a \in N_{SA}\} = \{(b, b_0),\ b \in (efN)_{SA}\}$, которое в силу а) является чисто вещественной JW-алгеброй, что противоречит условию $A = U(A)_{SA}$. Утверждение доказано.

Следствие 2. Если чисто вещественная JW-алгебра A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры, то $Z_A \neq (Z_U)_{SA}$, где Z_A (соответственно Z_U) — центр JW-алгебры A (соответственно W^*-алгебры $U = U(A)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $U(A) = N \oplus N_0$ имеем

$$Z_U = Z_N \oplus Z_N = \{(a, b_0),\ a,\ b \in Z_N\}.$$

В то же время $Z_A = \{(a, a_0),\ a \in (Z_N)_{SA}\}$. Очевидно, что $Z_A \subset (Z_U)_{SA}$ и элементы вида $(a, 0)$, $a \in (Z_N)_{SA}$, принадлежат $(Z_U)_{SA} \setminus Z_A$. Утверждение доказано.

Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра, α — инволютивный $*$-антиавтоморфизм обертывающей W^*-алгебры $U = U(A)$, определяющий A (см. § 1).

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

(i) α действует тождественно на Z_U;

(ii) $Z_U = Z_A + iZ_A$;

(iii) A не содержит прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть α действует тождественно на Z_U. Если $x = a + ib \in Z_U$, то $\alpha(x) = x = a^* + ib^*$, т. е. $a = a^*$, $b = b^*$. Так как $R(A)_{SA} = A$, то $a,\ b \in A$. Так как $a + ib \in Z_U$ и $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$, то a и b — центральные элементы в A, т. е. $a,\ b \in Z_A$. Следовательно, $Z_U = Z_A + iZ_A$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. В силу единственности представления элементов U в виде $x = a + ib$, $a,\ b \in R(A)$, любой элемент $z \in Z_U$ имеет вид $z = a + ib$, где a, $b \in Z_A \subset R(A)$. Следовательно, $\alpha(z) = a^* + ib^* = a + ib = z$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Если $Z_U = Z_A + iZ_A$, то $(Z_U)_{SA} = Z_A$. Так как включение $(Z_U)_{SA} \supset Z_A$ выполняется всегда, то в силу следствия 2 предложения 3 A не может содержать прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$. Допустим, что для некоторого центрального проектора $e \in U: eU \cap A = \{0\}$. Тогда в силу [9, лемма 3.4] $(eU)_{SA} = eA$ и существует центральный проектор $g \in A$, $e \leqslant g$ такой, что JW-алгебры $(eU)_{SA} = eA$ и gA изоморфны, т. е. в A существует прямое слагаемое gA, изоморфное эрмитовой части W^*-алгебры eU. Противоречие показывает, что $eU \cap A \neq \{0\}$ для любого $e \in Z_U$. Так как $eU \cap A$ является слабо замкнутым йордановым идеалом в A, то в силу [6, преложение 5] в A существует центральный проектор f, такой, что $eU \cap A = fA$, т. е. $f \in Z_A$, $0 \neq f \leqslant e$. Итак, для любого проектора $e \in Z_U$ существует проектор $f \in Z_A$, такой, что $0 \neq f \leqslant e$. Так как A слабо замкнута в U, то отсюда, очевидно, следует, что совокупности проекторов в Z_A и в Z_U совпадают, т. е. $Z_U = Z_A + iZ_A$. Предложение доказано.

3. Продолжение и сужение следов. Пусть A — обратимая JW-алгебра, $U = U(A)$ — ее обертывающая W^*-алгебра. Рассматриваемые здесь вопросы очевидны, если $A = U_{SA}$. Поэтому в силу предложения 1, не ограничивая общности, можно считать, что A является чисто вещественной JW-алгеброй, и пусть α — инволютивный *-антиавтоморфизм U, определяющий A.

Рассмотрим сначала вопрос о продолжении следа на A до следа на W^*-алгебре U. Пусть τ — след на JW-алгебре A. Если $x \in U^+$, то легко видеть, что $1/2(x + \alpha(x)) \in A^+$. Положим

$$\tau_0(x) = \tau(1/2(x + \alpha(x)), \quad x \in U^+.$$

Справедлив следующий результат, доказанный в [1, теорема 1].

Теорема 1. Функция τ_0 является следом на W^*-алгебре U, причем $\tau_0|_A = \tau$. Если след τ нормален (соответственно точен, конечен, полуконечен), то след τ_0 также нормален (соответственно точен, конечен, полуконечен).

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Любой след на обратимой JW-алгебре может быть продолжен с сохранением всех его свойств (нормальности, точности, конечности, полуконечности) до следа на обертывающей W^*-алгебре.

Вопрос о единственности продолжения рассмотрим в конце пункта.

Теперь рассмотрим обратную задачу — о сужении следа с U на A. Пусть на W^*-алгебре $U = U(A)$ задан след τ_1. Тогда ясно,

что $\tau = \tau_1|_A$ является следом на JW-алгебре A, причем если след τ_1 нормален (соответственно точен, конечен), то τ также является нормальным (соответственно точным, конечным) следом. Если след τ_1 полуконечен, то полуконечность следа τ не очевидна. В [1, предложение 4.7] полуконечность τ была доказана в частном случае, когда центр U конечномерен, в частности, когда A — JW-фактор.

Следующий результат дает положительное решение этого вопроса в самом общем случае.

Теорема. 3. Пусть A — обратимая JW-алгебра, τ_1 — полуконечный след на ее обертывающей W^*-алгебре U. Тогда его сужение $\tau = \tau_1|_A$ является полуконечным следом на A.

Доказательство. Очевидно, как уже отмечалось, достаточно рассмотреть лишь чисто вещественную JW-алгебру A. Этот случай, в свою очередь, редуцируется к двум случаям:

а) A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры;

б) A не содержит прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

Рассмотрим случай а). Пусть A изоморфна эрмитовой части W^*-алгебры N. В силу предложения 3 U можно отождествить с $N \oplus N_0$, причем $A = \{(a, a_0), a \in N_{SA}\}$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $(a, a_0) \in A^+$ и покажем, что существует ненулевой элемент $(c, c_0) \in A$, такой, что $0 \leqslant (c, c_0) \leqslant (a, a_0)$ и $\tau((c, c_0)) < +\infty$. Рассмотрим элемент $(a, 0) \in N \oplus N_0$. Так как след τ_1 полуконечен на $N \oplus N_0 = U$, то существует ненулевой элемент $b \in N$, такой, что $0 \leqslant (b, 0) \leqslant (a, 0)$ и $\tau_1((b, 0)) < +\infty$. Рассмотрим $(0, b_0) \in N \oplus N_0$. Аналогично существует ненулевой элемент $c \in N$, такой, что $0 \leqslant (0, c_0) \leqslant (0, b_0)$ и $\tau_1((0, c_0)) < +\infty$. Теперь ясно, что $(c, c_0) \neq 0$, $(c, c_0) \in A^+$ и $(c, c_0) \leqslant (b, b_0) \leqslant (a, a_0)$, причем $\tau((c, c_0)) = \tau_1((c, 0)) + \tau_1((0, c_0)) \leqslant \tau_1((b, 0)) + \tau_1((0, c_0)) < +\infty$. Следовательно, $\tau = \tau_1|_A$ — полуконечный след.

Рассмотрим случай б). В силу предложения 4 инволютивный *-антиавтоморфизм α действует тождественно на Z_U. Согласно [11, лемма 3.3], для любого проектора $e \in U$ проекторы e и $\alpha(e)$ эквивалентны. Отсюда следует, что $\tau_1(e) = \tau_1(\alpha(e)) = \tau(1/2(e + \alpha(e))$, где $1/2(e + \alpha(e))$ является ненулевым положительным элементом в A.

Пусть $e_0 \neq 0$ — произвольный проектор в A. По условию, существует ненулевой проектор $e \in U$, такой, что $e \leqslant e_0$ и $\tau_1(e) < +\infty$. Положим $p = 1/2(e + \alpha(e))$. Тогда $\tau(p) = \tau_1(e) < +\infty$ и $p = \frac{1}{2}(e + \alpha(e)) \leqslant \frac{1}{2}(e_0 + \alpha(e_0)) = e_0$, так как $\alpha(e_0) = e_0 \in A$. Итак, для любого проектора $e_0 \in A$, $e_0 \neq 0$, найден ненулевой элемент

$p\in A$, $0\leqslant p\leqslant e_0$, такой, что $\tau(p)<+\infty$, т. е. след τ полуконечен. Теорема доказана.

Замечание. Требование обратимости JW-алгебры A в теоремах 2 и 3 существенно. В самом деле, пусть A — бесконечномерный спин-фактор, такой, что его обертывающая W^*-алгебра $U=A''$ является W^*-фактором типа II_∞ (см. [4, замечание 2.2]). Так как A имеет тип I_2, то любой след на A либо конечен, либо чисто бесконечен. Если τ — канонический нормированный след (т. е. $\tau(1)=1$) на спин-факторе, то его нельзя продолжить до конечного нормального следа на U, так как U имеет тип II_∞. Наоборот, если τ_1 — некоторый точный нормальный полуконечный след на U, то его сужение на A может быть только чисто бесконечным (так как $\tau_1(1)=+\infty$).

Таким образом, каждому полуконечному следу на JW-алгебре A соответствует полуконечный след на обертывающей W^*-алгебре U (его продолжение), и наоборот,— каждому полуконечному следу на U соответствует полуконечный след на A (его сужение). Остается последний вопрос — о взаимной однозначности этого соответствия, т. е. о единственности продолжения следа с A на U. Ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Для того чтобы любой нормальный полуконечный след на A единственным образом продолжался до полуконечного следа на U, необходимо и достаточно, чтобы JW-алгебра A не содержала прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

Доказательство. Достаточность. Пусть A не содержит прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры. Тогда, как доказано при рассмотрении случая б) в теореме 3, для любого следа τ_1 на U выполняется равенство $\tau_1(e)=\tau(1/2(e+\alpha(e)))$, где $\tau=\tau_1/A$, т. е. любой след τ_1 на U однозначно восстанавливается по своим значениям на JW-алгебре, как в теореме 3. Поэтому, если $\tau_1|_A=\tau_2|_A$, то $\tau_1\equiv\tau_2$.

Необходимость. Если A содержит прямое слагаемое, изоморфное эрмитовой части W^*-алгебры, то в силу предложения 4 существует проектор $p\in Z_U$, такой, что под ним нет проектора из Z_A, т. е. $pU\cap A=\{0\}$. Покажем, что $p\alpha(p)=0$. В самом деле, ясно, что $p\alpha(p)$ является центральным проектором и $p\alpha(p)\leqslant p$, но $\alpha(p\alpha(p))=p\alpha(p)$, т. е. $p\alpha(p)\in Z_A$. Значит $p\alpha(p)=0$.

Если A имеет тип III, то в силу [1, теорема 8] U также имеет тип III, и значит ни в U, ни в A нет нормальных полуконечных следов. Поэтому сразу можно считать, что A — локально модулярная JW-алгебра, т. е. [1, теорема 8] U — полуконечная W^*-алгебра. Тогда существует полуконечный след τ_1 на U, такой, что $\tau_1(p)>0$. Положим

$$\tau_2(x)=\tau_1(p^\perp x+p\alpha(x)),\quad x\in U^+.$$

Так как $p\in Z_U$ и α — $*$-антиавтоморфизм, то τ_2 является полуконечным следом на U. Если $x\in A$, то $\alpha(x)=x$ и поэтому $\tau_2(x)=\tau_1(x)$, т. е. $\tau_2|_A=\tau_1|_A$, но $\tau_2(p)=\tau_1(p^\perp p+p\alpha(p))=0$, а $\tau_1(p)>0$, т. е. $\tau_1\not\equiv\tau_2$. Следовательно, след $\tau=\tau_1|_A$ неоднозначно продолжается до следа на U. Теорема доказана.

Следствие 3. Для того чтобы любой след на A единственным образом продолжался до следа на U, необходимо и достаточно, чтобы A не содержала прямых слагаемых, изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры.

Доказательство. Достаточность доказана в теореме 4. Необходимость доказывается, как и в теореме 4 — пояснения требует только момент с выбором следа τ_1 на U, такого, что $\tau_1(p)\neq 0$. Пусть ρ — произвольное состояние на Z_U, такое, что $\rho(p)\neq 0$. По теореме аппроксимации [12, теорема 1, с. 272], на любой W^*-алгебре существует центральный след Φ (см. также [6, следствие 28]). Положим $\tau_1=\rho\circ\Phi$. Тогда, очевидно, τ_1 является следом на U, причем $\tau_1(p)=\rho(\Phi(p))=\rho(p)>0$. Утверждение доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ajupov Sh. A. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators//Math. Z. 1982. Vol. 181. P. 253—268.
2. Аюпов Ш. А. JW-факторы и антиавтоморфизмы алгебр фон Неймана// Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 1. С. 211—220.
3. Аюпов Ш. А., Адизов А. А. Вероятностные меры на проекторах JBW-алгебр/Деп. ВИНИТИ. 1984. № 7822—84. 41 с.
4. Ajupov Sh., A. Abdullaev R. Z. The Radon—Nikodym theorem for weights on semi-finite JBW-algebras//Math. Z. 1985. Vol. 188. P. 475—484.
5. Аюпов Ш. А. Йордановы операторные алгебры//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 27. М., 1985. С. 67—98.
6. Topping D. Jordan algebras of self-adjoint operators//Mem. Amer. Math. Soc. 1965. 48 p.
7. Stormer E. Jordan algebras of type I//Acta Math. 1966. Vol. 115. P. 165—184.
8. Stormer E. On the Jordan structure on C^*-algebras//Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 120. P. 438—447.
9. Stormer E. Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators//Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 130. P. 153—166.
10. Stacey P. J. Type I_2 JBW-algebras//Quart. J. Math. Oxford (2). 1982. Vol. 33. P. 115—127.
11. Stormer E. Anti-automorphisms of von Neumann algebras//Pacific J. Math. 1967. Vol. 21. No 2. P. 349—370.
12. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Geuthier—Villars, 1957. 369 p.