Узбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари—Доклады Академии наук УзССР

1986, № 1

УДК 517.98

Ш. А. АЮПОВ, А. А. АДИЗОВ

МЕРЫ НА ПРОЕКТОРАХ И СОСТОЯНИЯ НА JBW-АЛГЕБРАХ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В настоящей работе рассматриваются меры на проекторах JBW-алгебр [1], представляющие собой йорданов аналог W^*-алгебр.

1. Пусть $A - JBW$-алгебра, $P = \{e \in A : e^2 = e\}$ — решетка проекторов (идемпотентов) из A.

Определение. Функция $\mu : P \to \boldsymbol{R}$ называется конечно-аддитивной мерой, если $\mu\left(\sum\limits_{n=1}^{m} e_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{m} \mu(e_n)$ для любого конечного семейства $\{e_n\}$ — попарно ортогональных проекторов из P. Если при этом $\mu\left(\sum e_i\right) = \sum \mu(e_i)$ для любого семейства $\{e_i\}$, то μ называется вполне аддитивной мерой или просто мерой на P. Мера или конечно-аддитивная мера μ называется вероятностной, если $\mu(\mathbf{1}) = 1$.

Если ρ — некоторое состояние на JBW-алгебре A, то его сужение $\rho|_P = \mu$ на решетку P есть, очевидно, конечно-аддитивная вероятностная мера. Из [2] (теорема 3) следует, что при этом μ является мерой в том и только в том случае, когда состояние ρ нормально. Обратно, пусть на P задана некоторая вероятностная мера μ. В самой общей постановке проблема существования нормального состояния ρ на A, сужением которого на P является μ, имеет отрицательное решение: на спин-факторе (JBW-факторе типа I_2) легко построить примеры вероятностных мер, не являющихся сужениями никаких состояний. Однако если рассмотреть JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_2, то, как и в случае W^*-алгебр, проблема имеет положительное решение.

Теорема. Пусть $A - JBW$-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякую вероятностную меру на проекторах можно единственным образом продолжить до нормального состояния на A.

Замечания. а) в частном случае, когда JBW-алгебра A совпадает с эрмитовой частью $\mathcal{U}_{SA}$ W^*-алгебры $\mathcal{U}$, снабженной симметризованным умножением $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $x, y \in \mathcal{U}_{SA}$, теорема вытекает из результатов работ [3—5];

б) в случае, когда JBW-алгебра A является непрерывным аппроксимативно конечным JW-фактором, эта теорема доказана в работе [6].

Доказательство для случая JBW-алгебр типа I приведено в работе [7]; для JBW-алгебр типа II и III доказательство проводится методом работ [4, 5] с использованием обертывающей W^*-алгебры.

2. Отметим ряд следствий из теоремы. Для $x \in A$ через $A(x)$ обозначим ассоциативную JBW-подалгебру в A, порожденную элементами x и $\mathbf{1}$.

Определение. Квазисостоянием на JBW-алгебре A назовем функцию $\rho : A \to \boldsymbol{R}$ такую, что $(i)\, \rho(\mathbf{1}) = 1$; (ii) сужение $\rho|_{A(x)}$ является положительным линейным функционалом на $A(x)$ для любого $x \in A$.

Как и в случае W^*-алгебр [8] (предложение 1, с. 607), легко установить взаимно однозначное соответствие между конечно-аддитивными вероятностными мерами и квазисостояниями на JBW-алгебрах. Именно каждой конечно-аддитивной вероятностной мере μ соответствует квазисостояние $\dot{\mu}$, определенное как $\dot{\mu}(a) = \int\limits_{\sigma(a)} \lambda d\mu\,(e_\lambda)$, $a \in A$, где $\sigma(a)$ — спектр элемента a, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство a. Очевидно, что $\dot{\mu}|_P = \mu$.

Из теоремы вытекает следующее

Следствие 1. Пусть A—JBW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякое нормальное квазисостояние на A линейно, т. е. является нормальным состоянием.

3. Пусть теперь A—JW-алгебра, действующая в гильбертовом пространстве H [9]. Если на решетке P проекторов A задана вероятностная мера μ, то естественно возникает вопрос о возможности продолжения μ до вероятностной меры на решетке P_1 проекторов обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(A) = A''$. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. В самом деле, пусть A—бесконечномерный спин-фактор (JW-фактор типа I_2) такой, что $\mathcal{U}(A)$ является W^*-фактором типа II_1 (существование такого A вытекает из [10] (теорема 2)). Тогда всякую вероятностную меру на $\mathcal{U}(A)$ можно продолжить до нормального состояния (см. [3, 4]). В то же время на A есть, очевидно, меры, которые не продолжаются до состояний. Следовательно, эти меры на P не продолжаются до мер на P_1.

Однако, если рассмотреть JW-алгебру A без прямых слагаемых типа I_2, то вопрос о продолжении меры на проекторах A до меры на проекторах $\mathcal{U}(A)$ эквивалентен проблеме о продолжении меры μ до состояния на A.

Следствие 2. Пусть A—JW-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда всякая вероятностная мера на проекторах A продолжается до вероятностной меры на проекторах обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Shultz F. W.— J. Funct. Anal., 1979, v. 31, p. 360—376. [2] Аюпов Ш. А.— Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 3, с. 9—13. [3] Матвейчук М. С.— Функц. анализ и его прилож., 1981, т. 15, вып. 3, с. 41—53. [4] Yeadon F. J.— Bull. London Math. Soc., 1983, v. 15, p. 139—145. [5] Christensen E.— Commun Math. Phys., 1982, v. 86, p. 529—538. [6] Матвейчук М. С.— Теорет. и матем. физика, 1983, № 57, с. 465—468. [7] Адизов А. А.— ДАН УзССР, 1984, № 6, с. 7—8. [8] Aarnes J. F.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, v. 149, p. 601—625. [9] Topping D.— Mem. Amer. Math. Soc., 1965, v. 53. [10] Topping D.— J. Math. Mech., 1966, v. 15, p. 1055—1064.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
15. 05. 85 г.