Ш. А. АЮПОВ, М. Ш. ГОЛЬДШТЕЙН, Б. Р. ТАДЖИБАЕВ

МОНОТОННО ПОЛНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ С p-АДДИТИВНОЙ НОРМОЙ

Рассмотрим вопрос о существовании следа на монотонно полных йордановых банаховых алгебрах (OJB-алгебрах), в которых задана норма, обладающая свойством p-аддитивности. Используемую терминологию можно найти в [1].

Пусть A — OJB-алгебра. Норма $\|\cdot\|_A$, заданная на A, обладает свойством p-аддитивности для некоторого фиксированного $p\in[1, \infty)$, если $\|a+b\|_A^p=\|a\|_A^p+\|b\|_A^p$ для любых a и b из A, $a\geqslant\theta$, $b\geqslant\theta$ и $ab=\theta$ [2, 3].

Теорема 1. Пусть A—OJB-алгебра с нормой $\|\cdot\|_A$, обладающей свойством p-аддитивности и $\|\mathbf{1}\|_A=1$. Тогда существует положительный линейный функционал τ на A, такой, что $\tau(\mathbf{1})=1$ и $\|x\|_A^p=\int\limits_0^\infty|\lambda|^p\,d\tau(e_\lambda)$ для любого x из A, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda$ — спектральное разложение.

Перед доказательством теоремы 1 сформулируем используемое ниже предложение.

Предложение 1. Пусть (X, m) — пространство с мерой и $m(X)=1$. Если φ — непрерывный положительный линейный функционал на $L_p\ (X, m)$, $p\in[1, \infty)$ и $\|\varphi\|=\varphi(1)=1$, то

$$\varphi(f)=\int\limits_X f(x)\,dm(x),\ f\in L^p(X, m).$$

Доказательство. Так как $\varphi\in(L^p)^*$, то, по теореме Рисса [4], функционал φ можно представить в виде

$$\varphi(f)=\int\limits_X f(x)\,g(x)\,dm(x),$$

где

$$g(x)\in L^q(X, m)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right),$$

причем $\|g\|_q=\|\varphi\|=1$. Тогда, по условию предложения 1, $\int\limits_X 1g(x)\,dm(x)=1$. Из последнего равенства и неравенства Гёльдера

$$\left|\int\limits_X 1g(x)\,dm(x)\right|\leqslant\left(\int\limits_X 1^p\,dm(x)\right)^{1/p}\left(\int\limits_X|g(x)|^q dm(x)\right)^{1/q}=1\|g\|_q=1$$

следует, что $1 = \int\limits_X g(x)\,dm(x) = \left(\int\limits_X g(x)^q dm(x)\right)^{1/q}$, т. е. в неравенстве Гёльдера имеет место равенство. По свойствам интегрируемых функций, полученное равенство справедливо, когда подынтегральные функции пропорциональны, т. е. $|g(x)| = c \cdot 1$, где c — постоянная. Проинтегрировав по всему X обе части последнего равенства, получим $c = 1$, поэтому $g(x) \equiv 1$, т. е.

$$\varphi(f) = \int\limits_X f(x)\, g(x)\, dm(x) = \int\limits_X f(x)\, dm(x).$$

Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим одномерное подпространство $B = \{\lambda \mathbf{1}$, где λ — скаляр$\} \subset A$. Положим $\tau_0(\lambda \mathbf{1}) = \lambda$. Очевидно, что τ_0 — линейный функционал на B и $\|\tau_0\| = 1$. Тогда, по теореме Хана — Банаха, существует линейный функционал τ, заданный на A, такой, что $\|\tau\| = 1$ и $\tau(x) = \tau_0(x)$ для любого x из B.

Исследуем теперь свойства функционала τ на некоторой произвольно взятой максимальной ассоциативной подалгебре A_0 из A. По теореме Хана — Банаха, $|\tau(x)| \leqslant \|x\|_A$, т. е. $\|\tau|_{A_0}\| \leqslant 1$. Поскольку $\mathbf{1} \in A_0$ и $\tau(\mathbf{1}) = \tau_0(\mathbf{1}) = 1$, получаем $\|\tau|_{A_0}\| = 1$. Так как A_0 — нормированная решетка с p-аддитивной нормой, то, по теореме 2 из [3], ее замыкание $\bar{A}_0$ по норме $\|\cdot\|_A$ является банаховой решеткой с p-аддитивной нормой в A.

Следовательно, $\bar{A}_0$ — абстрактное L_p-пространство в смысле определения 1 из [3]. Тогда, по теореме 3 из [3], существуют хаусдорфово пространство X и регулярная борелевская мера m, такие, что $\bar{A}_0$ изометрически изоморфно $L_p(X, m)$. Пусть φ — изоморфизм между $\bar{A}_0$ и $L_p(X, m)$. Тогда для любого a из A_0 имеем $\|a\|_A^p = \int\limits_0^\infty |\lambda|^p\, dm(\varphi(e_\lambda))$ $\Bigg($ здесь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda d(e_\lambda)$ — спектральное разложение $a \Bigg)$.

Так как $\|\tau|_{A_0}\| = \tau(\mathbf{1}) = 1$, то в силу предложения 1

$$\tau(a) = \int\limits_X \varphi(a)(x)\, dm(x),$$

в частности, $\tau(e) = m(\varphi(e))$ для любого идемпотента e из A_0. Отсюда

$$\|a\|_A^p = \int_0^\infty |\lambda|^p d\tau(e_\lambda).$$

Теорема доказана.

Положительный линейный функционал τ на OJB-алгебре A называется следом (ср. [1]), если $\tau(U_s a) = \tau(a)$ для любого a и любой симметрии s из A, т. е. $s^2 = 1$ (здесь $U_b a = 2b(ba) - b^2 a$; $ab \in A$).

Отметим важное следствие, вытекающее из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и норма $\|\cdot\|_A$ обладает следующим свойством: $\|U_s a\|_A = \|a\|_A$ для любого a и любой симметрии s из A. Тогда τ — след.

Доказательство. По теореме 1, существует положительный линейный функционал τ, такой, что для любого a из A справедливо равенство

$$\|a\|_A^p = \int_0^\infty |\lambda|^p d\tau(e_\lambda)$$

$\left(\text{здесь } \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda \text{ — спектральное разложение } a\right)$.

Для любого идемпотента $g \in A$ очевидно, что $\|g\|_A^p = \tau(g)$. Следовательно, $\tau(g) = \|g\|_A^p = \|U_s g\|_A^p = \tau(U_s g)$. В силу спектральной теоремы (см. [1], с. 143) $\tau(a) = \tau(U_s a)$ для всех $a \in A$, т. е. τ — след. Следствие доказано.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, $x_n \downarrow \theta$ и $\varepsilon > 0$. Идемпотент q называется ε-идемпотентом для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, если существует число n_0, такое, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$U_q x_n \leqslant \varepsilon q.$$

Предложение 2. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из OJB-алгебры A и $x_n \downarrow \theta$. Для любого идемпотента $g \neq \theta$ из A существует идемпотент $q \neq \theta$, такой, что $q \leqslant g$ и q является ε-идемпотентом для $\{x_n^\infty\}_{n=1}$.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $g = 1$. Положим

$$e_n = \{x_n \leqslant \varepsilon\} = \left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon} de_\lambda^{(n)}\right\},$$

где $\left\{e_\lambda^{(n)}\right\}$ — спектральное семейство элемента x_n. Если $e_n \neq \theta$ для некоторого n, то $U_{e_n} x_n \leqslant \varepsilon e_n$ и e_n является ε-идемпотентом.

Предположим, что $e_n = \theta$ для всех n. Тогда $e_n^{\perp} = \{x_n > \varepsilon\} = \mathbf{1}$ и $x_n \geqslant \varepsilon\mathbf{1}$ для любого n, поэтому $\inf x_n \geqslant \varepsilon\mathbf{1}$, что противоречит условию предложения $x_n \downarrow \theta$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

В следующем предложении обобщается результат, полученный в [5].

Предложение 3. Пусть τ — след на OJB-алгебре A, тогда справедливо равенство

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{n} \tau(U_{e_k} x)$$

для любого набора идемпотентов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset A$, $e_i \perp e_j$ и $\sum_{k=1}^{n} e_k = \mathbf{1}$.

Доказательство. В [5] показано, что если τ — след на OJB-алгебре A, то справедливо равенство

$$\tau(x) = \tau(U_g x) + \tau(U_{1-g} x)$$

для любого x и любого идемпотента g из A. С использованием этого результата доказательство предложения 3 проводится по индукции.

Теорема 2. Пусть τ — точный σ-аддитивный линейный функционал на OJB-алгебре ограниченных элементов A. Если τ — след, то он нормален (ср. [6], с. 95).

Доказательство. Для доказательства рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из A, которая убывает к θ. Очевидно, можно считать, что $\|x_n\|_\infty \leqslant 1$ для любого n.

Из предложения 2 следует, что для любой последовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из A, монотонно убывающей к θ, существует семейство попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\} \subset A$, причем каждый элемент из $\{e_i\}$ является ε-идемпотентом для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sup_i e_i = \mathbf{1}$. Так как τ — точный функционал и $\sum_i \tau(e_i) = \tau(\mathbf{1})$, то из предложения 2 из [1] (с. 36) следует, что $\{e_i\}$ — счетное семейство. Не ограничивая общности наших рассуждений, предположим, что τ — вероятностный след, т. е. $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(e_i) = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n, такой, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \tau(e_i) < \varepsilon.$$

По предложению 3,

$$\tau(x_m)=\tau(U_{e_1}x_m)+\tau(U_{e_2}x_m)+\cdots+\tau(U_{e_n}x_m)+\tau(U_{f_n}x_m), \quad (*)$$

где

$$f_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} e_k .$$

Так как e_i — ε-идемпотент, то существует номер m_i, такой, что $U_{e_i}x_m \leqslant \varepsilon e_i$ при $m \geqslant m_i$. Тогда для $m \geqslant \max_{i \leqslant n} m_i$ можно оценить правую часть $(*)$:

$$\tau(U_{e_1}x_m)+\tau(U_{e_2}x_m)+\cdots+\tau(U_{e_n}x_m)\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\tau(e_1)+\varepsilon\tau(e_2)+\cdots+\varepsilon\tau(e_n)\leqslant \varepsilon\tau(1)=\varepsilon.$$

Оценим последний член правой части в $(*)$:

$$\tau(U_{f_n}x_m)\leqslant \|x_m\|_\infty \tau(f_n)\leqslant \tau(f_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\tau(e_k)<\varepsilon.$$

Из полученных нами неравенств следует, что $\tau(x_m)<2\varepsilon$, т. е. след τ нормален. Теорема доказана.

Отметим важное следствие теорем 1 и 2.

Следствие 2. Пусть на логике идемпотентов OJB-алгебры A задана σ-аддитивная строго положительная мера (см. [1], с. 31 и [6]).

Предположим, что величина $\|x\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, d\mu(e_\lambda)$ обладает свойством $\|x_1+x_2\| \leqslant \|x_1\|+\|x_2\|$; $x_1, x_2 \in A$. Тогда мера μ однозначно продолжается до нормального линейного положительного функционала на алгебре A.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\|1\|=1$. Тогда, по теореме 1, существует единственный положительный линейный функционал τ на A, такой, что $\tau(1)=1$ и $\|x\|=\int_0^{\infty}|\lambda|\, d\tau(e_\lambda)$ для любого $x \in A$, где $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda$ — спектральное разложение x.

Для любого идемпотента $g \in A$ очевидно, что $\|g\| = \tau(g)=\mu(g)$, т. е. $\tau|_\nabla = \mu$. Нормальность τ вытекает из σ-аддитивности μ. Следствие доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан, 1983. 304 с.
2. Чилин В. И. Порядковая характеризация некоммутативных L-пространств//Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985. С. 19—23.

3. Lacey H. E. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin: Springer Verlag. 1974. 270 p.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
5. Аюпов Ш. А. Теорема эргодического типа в йордановых алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 6. С. 10—16.
6. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin: Springer Verlag. 1971. 256 p.