УДК 517.98

Ш. А. АЮПОВ, Б. Р. ТАДЖИБАЕВ

ЛИЕВЫ И ЙОРДАНОВЫ СТРУКТУРЫ В КОНЕЧНЫХ ФАКТОРАХ

Фараз қилайлик $\mathcal{M}$—W^*-алгебра, α—ундаги инволютив *-антиавтоморфизм ва $\mathcal{M}^\alpha(\pm 1) = \{a \in \mathcal{M} : \alpha(a) = \pm a\}$—анинг спектрал қисм фазолари бўлсин. У ҳолда $\mathcal{M}^\alpha(+1)$ — Йордан алгебраси, $\mathcal{M}^\alpha(-1)$ эса Ли алгебрасини ҳосил қилади. Ушбу мақолада чекли $\mathcal{M}$ фактордаги суст ёпиқ Йордан ва Ли алгебралари орасида юқоридаги кўринишга эга бўлган алгебралар ажратилган.

Пусть $\mathcal{M}$ —C^*-алгебра, α — инволютивный *-антиавтоморфизм $\mathcal{M}$, т. е. комплексно-линейное преобразование $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условиям:

(i) $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$;

(ii) $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ для всех $x \in \mathcal{M}$:

(iii) $\alpha^2 = I$ — тождественное преобразование.

И пусть
$$\mathcal{M}^\alpha(\pm 1) = \{a \in \mathcal{M} : \alpha(a) = \pm a\}$$
— спектральные подпространства α. Тогда легко видеть, что $\mathcal{M}^\alpha(+1)$ является самосопряженной йордановой алгеброй относительно симметризованного произведения
$$a \circ b = 1/2\,(ab + ba),$$
а $\mathcal{M}^\alpha(-1)$ — самосопряженной алгеброй Ли относительно лиева произведения
$$[a, b] = ab - ba.$$
Классификация пар йордановых и лиевых алгебр, возникающих таким способом, была начата Робинсоном и Штермером [1]. Они рассмотрели случай, когда $\mathcal{M} = B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H, т. е. когда $\mathcal{M}$ —W^*-фактор типа I.

В настоящей статье мы исследуем случай, когда $\mathcal{M}$— W^*-фактор типа II_1, или более общий конечный W^*-фактор, и среди лиевых подалгебр $\mathcal{M}$ опишем те, которые имеют вид $\mathcal{M}^\alpha(-1)$.

Основные результаты. Пусть $\mathcal{M}$— W^*-алгебра с точным нормальным конечным следом τ. Не ограничивая общности будем считать, что $\tau(1) = 1$, где 1 — единичный оператор. В алгебре $\mathcal{M}$ можно ввести скалярное произведение
$$(a, b) = \tau(ab^*) = \tau(b^*a),$$
превращающее ее в предгильбертово пространство. Пополнение $\mathcal{M}$ относительно нормы $\|a\|_2 = (a, a)^{1/2}$, совпадает с пространством $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ всех интегрируемых с квадратом операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. В дальнейшем всюду будем считать, что $\mathcal{M}$— W^*-фактор с точным нормальным конечным следом τ, $\tau(1) = 1$. Если α — инволютивный *-антиавтоморфизм $\mathcal{M}$, то $\tau \circ \alpha$ также является точным нормальным

конечным следом и $\tau(\alpha(1))=1$. В силу единственности следа на W^*-факторе отсюда следует, что

$$\tau\circ\alpha=\tau. \tag{1}$$

Если G — линейное подпространство в $\mathcal{U}$, то через $G^\perp$ обозначим множество элементов из $\mathcal{U}$, ортогональных всем элементам из G, т. е.

$$G^\perp=\{a\in\mathcal{U}:\tau(ag^*)=0\quad\forall g\in G\}.$$

Тогда пара $\mathcal{U}^\alpha(-1)$, $\mathcal{U}^\alpha(+1)$ имеет следующие свойства в терминах гильбертовой структуры на $\mathcal{U}$.

Предложение 1. Пусть $G=\mathcal{U}^\alpha(-1)$. Тогда $G^\perp=\mathcal{U}^\alpha(+1)$, причем

$$G\circ G\subset G^\perp, \tag{2}$$

$$[G^\perp,\ G^\perp]\subset G. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x\in G^\perp$, тогда $\tau(xg^*)=0$ для всех $g\in G$. В силу свойства (1) отсюда получаем

$$\tau(\alpha(xg^*))=\tau(\alpha(g^*)\alpha(x))=-\tau(g^*\alpha(x))=-\tau(\alpha(x)g^*)=0.$$

Следовательно,

$$\tau((x-\alpha(x))g^*)=0 \tag{4}$$

для всех $g\in G$. Положим $g_0=x-\alpha(x)$. Тогда, очевидно, $g_0\in\mathcal{U}^\alpha(-1)=G$. Поэтому из (4) при $g=g_0$ следует

$$\tau\left((x-\alpha(x))(x-\alpha(x))^*\right)=\tau\left((x-\alpha(x))g_0^*\right)=0.$$

В силу точности τ это значит, что $x=\alpha(x)$, т. е. $x\in\mathcal{U}^\alpha(+1)$.

Обратно, если $x\in\mathcal{U}^\alpha(+1)$, то $\alpha(x)=x$, и снова используя (1), имеем для всех $g\in G=\mathcal{U}^\alpha(-1)$:

$$\tau(xg^*)=\tau(\alpha(xg^*))=\tau(\alpha(g)^*\alpha(x))=-\tau(xg^*),$$

т. е. $\tau(xg^*)=0$ или $x\in G^\perp$.

Проверим свойства (2) и (3). Если $g_1,\ g_2\in G=\mathcal{U}^\alpha(-1)$, т. е. $\alpha(g_1)=-g_1$, $\alpha(g_2)=-g_2$, то

$$\alpha(g_1\circ g_2)=1/2(\alpha(g_1g_2)+\alpha(g_2g_1))=$$

$$=1/2(\alpha(g_2)\alpha(g_1)+\alpha(g_1)\alpha(g_2))=1/2(g_2g_1+g_1g_2)=g_1\circ g_2,$$

т. е. $g_1\circ g_2\in\mathcal{U}^\alpha(+1)=G^\perp$. Если $a_1,\ a_2\in G^\perp$, т. е. $\alpha(a_1)=a_1$, $\alpha(a_2)=a_2$, то $\alpha([a_1,\ a_2])=\alpha(a_1a_2-a_2a_1)=\alpha(a_2)\alpha(a_1)-\alpha(a_1)\alpha(a_2)=a_2a_1-a_1a_2=-[a_1,\ a_2]$. Следовательно, $[a_1,\ a_2]\in G$. Предложение доказано.

Основной нашей целью является доказательство того, что свойства алгебры Ли $G=\mathcal{U}^\alpha(-1)$, упомянутые в предложении 1, являются характеризационными. Более точно, имеет место следующая

Теорема 1. Пусть G — слабозамкнутая самосопряженная алгебра Ли в $\mathcal{U}$. Тогда G имеет вид $\mathcal{U}^\alpha(-1)$ для некоторого инволютивного $*$-антиавтоморфизма α в том и только том случае, когда $G^\perp$ является йордановой алгеброй и выполнены условия (2) и (3).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, приведем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 2. Пусть $\{x_\nu\}$ — сеть элементов из единичного шара W^*-алгебры $\mathcal{U}$. Тогда $\|x_\nu\|_2^2 = \tau\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to 0$ в том и только том случае, когда $x_\nu \to 0$ сильно, т. е. $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to 0$ для любого нормального состояния ρ на $\mathcal{U}$. Другими словами на единичном шаре норма $\| \ \|_2$ индуцирует сильную топологию.

Доказательство. Если $x_\nu \to 0$ сильно, то, в частности, $\tau\left(x_\nu^* x_\nu\right) = \|x_\nu\|_2^2 \to 0$. Обратно, пусть $\|x_\nu\|_2^2 = \tau\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to 0$ и предположим, что $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right)$ не стремится к 0 для некоторого нормального состояния ρ на $\mathcal{U}$. Переходя при необходимости к подсети, можно считать, что $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right) \geqslant \varepsilon_0$ для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ (заметим, что все элементы $x_\nu^* x_\nu$ положительны). В силу слабой компактности единичного шара (теорема Банаха — Алаоглу) существует слабая предельная точка a для сети $\{x_\nu^* x_\nu\}$ (так как $\|x_\nu^* x_\nu\| = \|x_\nu\|^2 \leqslant 1$). Можно сразу считать, что $x_\nu^* x_\nu \to a$ слабо, т. е. $\varphi\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to \varphi(a)$ для любого нормального состояния φ на $\mathcal{U}$. В частности, при $\varphi = \tau$ имеем $\tau\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to \tau(a) = 0$, т. е. $a = 0$, так как $a \geqslant 0$ и след τ точен. Но при $\varphi = \rho$ получим $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to \rho(a) = \rho(0) = 0$ и $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right) \geqslant \varepsilon_0$. Противоречие показывает, что $\rho\left(x_\nu^* x_\nu\right) \to 0$ для любого ρ, т. е. $x_\nu \to 0$ сильно. Предложение доказано.

Следствие. Пусть G — слабо замкнутое линейное подпространство в W^*-алгебре $\mathcal{U}$, $\bar{G}$ — его замыкание по норме в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{U}, \tau)$. Тогда множество ограниченных операторов из $\bar{G}$ совпадает с G.

Доказательство. Единичный шар в G слабо замкнут в единичном шаре $\mathcal{U}$ и, следовательно, он сильно замкнут, т. е. полон в равномерности, порожденной сильной топологией. В силу предложения 1 единичный шар в G полон и относительно нормы $\| \ \|_2$. Поэтому единичные шары в G и $\bar{G}$ совпадают, т. е. G — это в точности множество всех ограниченных операторов из $\bar{G}$.

Предложение 3. Пусть G — линейное подпространство в $\mathcal{U}$, такое, что $G^\perp$ является йордановой алгеброй. Тогда $G_{SA}^\perp = \{x \in G^\perp : x^* = x\}$ является JW-алгеброй, т. е. слабо замкнутой йордановой алгеброй ограниченных самосопряженных операторов. Если при этом подпространство G слабо замкнуто, то $\mathcal{U} = G \oplus G^\perp$.

Доказательство. Покажем сначала, что $G^\perp$ сильно замкнуто. Пусть $\{x_\nu\} \subset G^\perp$ и $x_\nu \to x \in \mathcal{U}$ сильно. Тогда, очевидно $\|x_\nu - x\|_2 \to 0$ и, следовательно, из $(x_\nu, g) = 0$ для всех ν следует, что $(x, g) = 0$ для любого $g \in G$, т. е. $x \in G^\perp$. В силу сильной непрерывности $*$-операции $x \to x^*$, отсюда следует, что множество $G_{SA}^\perp$ также сильно замкнуто в $\mathcal{U}$. Так как для выпуклых подмножеств в $\mathcal{U}$ сильная и слабая замкнутость означают одно и то же [2, гл. II, теорема 2.6], то $G_{SA}^\perp$ слабо замкнуто. Так как $G^\perp$ — йорданова алгебра, то, очевидно, $G_{SA}^\perp$ также является йордановой алгеброй. Следовательно, $G_{SA}^\perp$ — JW-алгебра.

В силу теоремы 1 из [3] существует положительная проекция с единичной нормой (условное ожидание) из JW-алгебры $\mathcal{U}_{SA}$ на JW-подалгебру $G^{\perp}_{SA}$, которая является сужением ортогонального проектирования из вещественного гильбертова пространства $L_2(\mathcal{U}_{SA}, \tau)$ на его подпространство $\overline{G^{\perp}_{SA}} = L_2\left(G^{\perp}_{SA}, \tau\right)$. В частности, проекция любого элемента из $\mathcal{U}_{SA}$ принадлежит $G^{\perp}_{SA}$. Поэтому проекция оператора из $\mathcal{U}$ при ортогональном проектировании из $L_2(\mathcal{U}, \tau)$ на $\overline{G^{\perp}}$ является ограниченным оператором. Так как $G^{\perp}$ слабо замкнуто, то в силу следствия предложения 2 эта проекция лежит в $G^{\perp}$. Из общей теории гильбертовых пространств известно, что всякий элемент x из $\mathcal{U} \subset L_2(\mathcal{U}, \tau)$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \overline{G}$, $x_2 \in \overline{G^{\perp}}$. В силу сказанного выше $x_2 \in G^{\perp}$ и, следовательно, $x_1 = x - x_2$ — также ограниченный оператор, так как $x_1 \in \mathcal{U}$. Если пространство G слабо замкнуто, то из следствия предложения 2 следует, что $x_1 \in G$, т. е. $\mathcal{U} = G \oplus G^{\perp}$. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть G — самосопряженная алгебра Ли в $\mathcal{U}$. Тогда

$$[G^{\perp}, G] \subset G^{\perp}. \tag{5}$$

Если при этом $G^{\perp}$ является йордановой алгеброй, то

$$\left(G^{\perp}\right)^{*} = G^{\perp}, \tag{6}$$

т. е. $G^{\perp}$ самосопряжено. Если, кроме того, G слабо замкнуто, то

$$G^{\perp} \circ G \subset G. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $g_0 \in G$, $a \in G^{\perp}$. Покажем, что $[a, g_0] \in G^{\perp}$. Для любого $g \in G$ имеем

$$([a, g_0], g) = \tau((ag_0 - g_0a)g^{*}) = \tau(ag_0g^{*}) - \tau(g_0ag^{*}) =$$
$$= \tau\left(ag_0g^{*}\right) - \tau\left(ag^{*}g_0\right) = \tau\left(a\left[g_0, g^{*}\right]\right) = \left(a, \left[g, g_0^{*}\right]\right) = 0,$$

так как $g_0^{*} \in G$ и $\left[g, g_0^{*}\right] \in G$. Следовательно, $[a, g_0] \in G^{\perp}$, т. е. имеет место (5).

Пусть $G^{\perp}$ является йордановой алгеброй, $a \in G^{\perp}$. Покажем, что $a^{*} \in G^{\perp}$, т. е. $G^{\perp}$ является самосопряженной йордановой алгеброй. Пусть $g \in G$ — произвольный элемент. Так как $g^{*} \in G$, то $\tau(ag) = \tau(a(g^{*})^{*}) = (a, g^{*}) = 0$. Поэтому

$$(a^{*}, g) = \tau(a^{*}g^{*}) = \tau((ga)^{*}) = \overline{\tau(ga)} = \overline{\tau(ag)} = 0.$$

В силу произвольности g отсюда следует, что $a^{*} \in G^{\perp}$, т. е. имеет место (6).

Наконец, докажем (7) при условии, что G слабо замкнуто. Пусть $a \in G^{\perp}$, $g \in G$. Для любого $a_1 \in G^{\perp}$ имеем

$$2((a \circ g), a_1) = \tau\left((ag + ga)a_1^{*}\right) = \tau\left(aga_1^{*} + gaa_1^{*}\right) =$$
$$= \tau\left(ga_1^{*}a\right) + \tau\left(gaa_1^{*}\right) = \tau\left(g\left(a_1^{*}a + aa_1^{*}\right)\right) =$$
$$= 2\tau\left(\left(a_1^{*} \circ a\right)g\right) = 2\left(\left(a_1^{*} \circ a\right), g^{*}\right) = 0,$$

так как $a_1^{*} \in G^{\perp}$, $a_1^{*} \circ a \in G^{\perp}$, $g^{*} \in G$.

В силу произвольности $a_1 \in G^\perp$ отсюда следует, что $a \circ g \in (G^\perp)^\perp$. Так как G слабо замкнуто, то в силу предложения 3 $\mathcal{U} = G \oplus G^\perp$, т. е. $(G^\perp)^\perp = G$. Следовательно, $a \circ g \in G$, т. е. доказано (7). Предложение полностью доказано.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Если $G = \mathcal{U}^\alpha(-1)$, то в силу слабой непрерывности антиавтоморфизма α, G является слабо замкнутой алгеброй Ли. В силу предложения 1 $G^\perp = \mathcal{U}^\alpha(+1)$ есть йорданова алгебра и выполнены соотношения (2) и (3).

Достаточность. Пусть G — самосопряженная слабо замкнутая алгебра Ли в $\mathcal{U}$, причем $G^\perp$ — йорданова алгебра и выполнены условия (2) и (3). Через G_0 обозначим множество

$$G_0 = \{g \in G : g^* = -g\}$$

косоэрмитовых элементов из G. Так как G — самосопряженная алгебра Ли и всякий элемент $g \in G$ можно представить в виде

$$g = \frac{g - g^*}{2} + i\left(\frac{g + g^*}{2i}\right),$$

где $1/2(g - g^*)$, $1/2i(g + g^*) \in G_0$, то

$$G = G_0 + iG_0. \tag{8}$$

При этом легко увидеть, что G_0 — лиева подалгебра G и $G_0 \cap iG_0 = \{0\}$.

Далее через $G^\perp_{SA}$, как и ранее, обозначим множество самосопряженных элементов из $G^\perp$, которое в силу предложения 3 является JW-алгеброй. При этом всякий элемент из $G^\perp$ представляется в виде $a = \frac{a + a^*}{2} + i\,\frac{a - a^*}{2i}$, где $\frac{a + a^*}{2i}, \frac{a - a^*}{2i} \in G^\perp_{SA}$ в силу свойства (6) из предложения 4. Следовательно,

$$G^\perp = G^\perp_{SA} + iG^\perp_{SA}, \tag{9}$$

причем

$$G^\perp_{SA} \cap iG^\perp_{SA} = \{0\}.$$

Покажем, что пространство $R = G^\perp_{SA} + G_0$ является вещественной *-подалгеброй в $\mathcal{U}$. Очевидно R — вещественное линейное подпространство в $\mathcal{U}$. Докажем замкнутость R относительно йорданова произведения. Для $x_1, x_2 \in R$, $x_1 = a_1 + g_1$, $x_2 = a_2 + g_2$, $a_1, a_2 \in G^\perp_{SA}$, $g_1, g_2 \in G_0$ имеем

$$x_1 \circ x_2 = (a_1 + g_1) \circ (a_2 + g_2) = a_1 \circ a_2 + a_1 \circ g_2 + g_1 \circ a_2 + g_1 \circ g_2.$$

Так как $G^\perp_{SA}$ — йорданова алгебра, то $a_1 \circ a_2 \in G^\perp_{SA}$. В силу условия (2) теоремы $g_1 \circ g_2 \in G^\perp$ и, так как

$$(g_1 \circ g_2)^* = g_1^* \circ g_2^* = (-g_1) \circ (-g_2) = g_1 \circ g_2,$$

то $g_1 \circ g_2 \in G^\perp_{SA}$. Далее в силу предложения 4 (свойство (7)) $a_1 \circ g_2$, $g_1 \circ a_2 \in G$. При этом

$$(a_1 \circ g_2)^* = a_1^* \circ g_2^* = a_1 \circ (-g_2) = -a_1 \circ g_2,$$

т. е. $a_1 \circ g_2 \in G_0$. Аналогично $g_1 \circ a_2 \in G_0$. Следовательно,

$$x_1 \circ x_2 \in G^\perp_{SA} + G_0 + G_0 + G^\perp_{SA} = G^\perp_{SA} + G_0 = R.$$

Докажем замкнутость R относительно лиева произведения. Для $x_1 = a_1 + g_1$, $x_2 = a_2 + g_2 \in R$ имеем

$$[x_1, x_2] = [a_1, a_2] + [a_1, g_2] + [g_1, a_2] + [g_1, g_2].$$

Из условия (3) теоремы и того, что G_0 — лиева алгебра, легко следует, что $[a_1, a_2]$, $[g_1, g_2] \in G_0$. Из свойства (5) в предложении 4 имеем $[a_1, g_2]$, $[g_1, a_2] \in G^{\perp}$. Так как $[a_1, g_2]^* = [a_1, g_2]$, $[g_1, a_2]^* = [g_1, a_2]$, то $[a_1, g_2]$, $[g_1, a_2] \in G^{\perp}_{SA}$. Таким образом,

$$[x_1, x_2] \in G_0 + G^{\perp}_{SA} + G^{\perp}_{SA} + G_0 = G^{\perp}_{SA} + G_0 = R.$$

Теперь из замкнутости R относительно йорданова произведения $x_1 \circ x_2$ и лиева произведения $[x_1, x_2]$ следует замкнутость относительно ассоциативного произведения

$$x_1 x_2 = 1/2 (2 x_1 \circ x_2 + [x_1, x_2]),$$

т. е. R — подалгебра в $\mathcal{U}$. Кроме того, для $x = a + g \in R$, $a \in G^{\perp}_{SA}$, $g \in G_0$, очевидно, $x^* = a^* + g^* = a - g \in R$, т. е. R — $*$-подалгебра в $\mathcal{U}$. Далее в силу предложения 3 и равенств (8), (9)

$$\mathcal{U} = G \oplus G^{\perp} = G_0 + iG_0 + G^{\perp}_{SA} + iG^{\perp}_{SA} = G_0 + G^{\perp}_{SA} + $$
$$+ i\left(G_0 + G^{\perp}_{SA}\right) = R + iR,$$

причем $R \cap iR = \{0\}$.

Зададим на $\mathcal{U}$ преобразование α, положив $\alpha(a + ib) = a^* + ib^*$, где a, $b \in R$. Легко проверить, что α является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом. В самом деле (см. [4, гл. I, предложение 3.5], [5]): вещественная линейность α очевидна, поэтому доказательство линейности α сводится к проверке равенства $\alpha(i(a + ib)) = i\alpha(a + ib)$, a, $b \in R$. Имеем

$$\alpha(i(a + ib)) = \alpha(-b + ia) = -b^* + ia^* = i(a^* + ib^*) = i\alpha(a + ib).$$

Далее

$$\alpha((a + ib)^*) = \alpha(a^* - ib^*) = a - ib = (a^* + ib^*)^* = \alpha(a + ib)^*$$

и, кроме того,

$$\alpha((a + ib)(c + id)) = \alpha((ac - bd) + i(ad + bc)) = (ac - bd)^* +$$
$$+ i(ad + bc)^* = (c^*a^* - d^*b^*) + i(d^*a^* + c^*b^*) = (c^* + id^*) \times$$
$$\times (a^* + ib^*) = \alpha(c + id)\,\alpha(a + ib),$$
$$a + ib \in \mathcal{U},\ c + id \in \mathcal{U},\ a,\ b,\ c,\ d \in R,$$

т. е. α является $*$-антиавтоморфизмом $\mathcal{U}$, причем $\alpha(\alpha(a + ib)) = \alpha(a^* + ib^*) = a + ib$, т. е. $\alpha^2 = I$. Итак, α — инволютивный $*$-антиавтоморфизм W^*-фактора $\mathcal{U}$. Покажем, что $G = \mathcal{U}^{\alpha}(-1)$.

Если $u = a + ib \in \mathcal{U}^{\alpha}(-1)$, a, $b \in R$, то $\alpha(a + ib) = -(a + ib) = a^* + ib^*$, т. е. $a^* = -a$, $b^* = -b$, ввиду $R \cap iR = \{0\}$. Так как $a = x + y$, где $x \in G^{\perp}_{SA}$, $y \in G_0$, то $a^* = x - y$, $-a = -x - y$. Поэтому из $a^* = -a$ следует, что $x = -x$, так как $G^{\perp}_{SA} \cap G_0 = \{0\}$. Итак, $x = 0$, $a = y \in G_0$. Аналогично из $b^* = -b$ следует, что $b \in G_0$. Значит, $u = a + ib \in G_0 + iG_0 = G$.

Обратно, если $u = a + ib \in G$, то a, $b \in G_0$, и поэтому

$$\alpha(a + ib) = a^* + ib^* = -a - ib = -(a + ib),$$

т. е. $u \in \mathcal{U}^{\alpha}(-1)$. Следовательно,

$$G = \{g \in \mathcal{M} : \alpha(g) = -g\} = \mathcal{M}^{\alpha}(-1).$$

Аналогично доказывается, что

$$G^{\perp} = \{a \in \mathcal{M} : \alpha(a) = a\} = \mathcal{M}^{\alpha}(+1).$$

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что условия (2) и (3) теоремы 1 не вытекают одно из другого. Например, положим $G = \{0\}$, т. е. $G^{\perp} = \mathcal{M}$. Тогда выполнено условие (2), т. е. $G \circ G \subset G^{\perp}$. Но условие (3) не выполняется, так как $[G^{\perp}, G^{\perp}] \subset G$ означает, что $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] = \{0\}$, т. е. W^*-алгебра $\mathcal{M}$-коммутативна. Если положить $G = \mathcal{M}$, то $G^{\perp} = \{0\}$ и выполнено условие (3), но не выполняется (2), так как $\mathcal{M} \circ \mathcal{M} \neq \{0\}$. Отметим также, что в этих примерах все остальные условия теоремы 1 выполнены, так как G в обоих случаях является слабо замкнутой самосопряженной лиевой алгеброй, $G^{\perp}$ — йорданова алгебра.

Известно, что конечный фактор $\mathcal{M}$ имеет либо тип I_n $(n < \infty)$, либо тип II_2. В первом случае все алгебры Ли вида $\mathcal{M}^{\alpha}(-1)$ были полностью описаны в [1]. Поэтому здесь мы подробнее рассмотрим случай, когда $\mathcal{M}$ — W^*-фактор типа II_1. Как известно (см. [4, гл. II, теоремы 1.2 и 3.1] или [6—8]), в этом случае JW-алгебра $G^{\perp}_{SA} = \mathcal{M}^{\alpha}(+1)_{SA}$ является JW-фактором типа II_1, не изоморфным эрмитовой части W^*-алгебры. Поэтому алгебры Ли $\mathcal{M}^{\alpha}(-1)$ естественно назвать а л г е б р а м и Л и т и п а II_1. При этом теорема 1 выделяет класс алгебр Ли типа II_1 среди слабо замкнутых алгебр Ли в W^*-факторе $\mathcal{M}$. Следующая теорема является аналогом известной теоремы о единственности (с точностью до изоморфизма) инъективного W^*-фактора типа II_1 [9] и теоремы о единственности инъективного JW-фактора типа II_1, не изоморфного эрмитовой части W^*-алгебры (см. [4, гл. II, теорема 5.1 (1)], [8]).

Теорема 2. В инъективном W^*-факторе $\mathcal{M}$ существует единственная с точностью до изоморфизма алгебра Ли типа II_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G_1 = \mathcal{M}^{\alpha_1}(-1)$, $G_2 = \mathcal{M}^{\alpha_2}(-1)$ — две алгебры Ли типа II_1 в $\mathcal{M}$. Как доказано в [10, 11] (см. [4, гл. II, § 4]), любые два инволютивных $*$-антиавтоморфизма α_1 и α_2 инъективного W^*-фактора типа II_1 сопряжены, т. е. существует автоморфизм θ W^*-алгебры $\mathcal{M}$ такой, что $\alpha_2 = \theta^{-1}\alpha_1\theta$, т. е. $\theta\alpha_2 = \alpha_1\theta$. Если $g \in G_1$, т. е. $\alpha_1(g) = -g$, то $\alpha_2(\theta g) = \theta\alpha_1(g) = \theta(-g) = -\theta g$, т. е. $\theta g \in G_2$. Следовательно, $\theta(G_1) \subset G_2$. Аналогично $\theta^{-1}(G_2) \subset G_1$, т. е. $\theta(G_1) = G_2$. Кроме того, очевидно, $\theta([g_1, g_2]) = [\theta g_1, \theta g_2]$, так как θ сохраняет ассоциативное произведение. Следовательно, $\theta | G_1$ является лиевым изоморфизмом между G_1 и G_2, т. е. любые алгебры Ли типа II_1 в $\mathcal{M}$ изоморфны. Теорема доказана.

Следствие. В инъективном W^*-факторе типа II_1 существует единственная с точностью до изоморфизма слабо замкнутая самосопряженная лиева подалгебра G, такая, что $G^{\perp}$ — йорданова алгебра, $G \circ G \subset G^{\perp}$ и $[G^{\perp}, G^{\perp}] \subset G$.

Как известно (см. [4, гл. II. Следствие теоремы 3.1] или [8, Следствие 3.4]), JW-факторы $\mathcal{M}^{\alpha_1}(+1)_{SA}$ и $\mathcal{M}^{\alpha_2}(+1)_{SA}$ изоморфны тогда и только тогда, когда инволютивные $*$-антиавтоморфизмы α_1 и α_2 сопряжены. В теореме 2 мы показали, что если α_1 и α_2 сопряжены, то алгебры Ли $\mathcal{M}^{\alpha_1}(-1)$ и $\mathcal{M}^{\alpha_2}(-1)$ изоморфны. В связи с этим очень интересной является следующая проблема.

Верно ли, что изоморфность лиевых алгебр $\mathcal{M}^{\alpha_1}(-1)$ и $\mathcal{M}^{\alpha_5}(-1)$ влечет сопряженность инволютных *-антиавтоморфизмов α_1 и α_2?

ЛИТЕРАТУРА

1. Robinson D. W., Stormer E.//J. Austral Math. Soc. Ser. A. 1980. V. 29. P. 129—142.
2. Takesaki M. Theory of Operator algebras I. New-York. Heidelberg. Berlin: Springer. 1979. VII+415 p.
3. Аюпов Ш. А.//Докл. АН УзССР. 1981. № 10. С. 3—5.
4. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан. 1986. 124 с.
5. Stormer E.//Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 130. P. 153—166.
6. Ajupov Sh. A.//Math. Z. 1982. V. 181. P. 253—268.
7. Аюпов Ш. А.//Теор. и матем. физика. 1982. Т. 53. № 1. С. 77—82.
8. Аюпов Ш. А.//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 1. С. 211—220.
9. Connes A.//Ann. of Math. 1976. V. 104. P. 73—115.
10. Giordano T.//J. of. Operator theory. 1983. V. 10. N 2. P. 252—287.
11. Giordano T.//J. of Functional Analysis. 1983. V. 51. N 3. P. 326—360.

Институт математики имени В. И. Романовского АН УзССР,
Ташкентский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени В. И. Ленина

Поступила 16. 07. 90

LIE AND JORDAN STRUCTURE IN FINITE FACTORS

Sh. A. Ayupov, B. R. Tadjibaev

(Summary)

Let $\mathcal{M}$ be a W^*-algebra, α an involutive *-anti-automorphism, and $\mathcal{M}^\alpha(\pm 1)=\{a\in\mathcal{M}: \alpha(a)=\pm a\}$ the spectral subspaces of α. It follows that $\mathcal{M}^\alpha(+1)$ is a Jordan algebra and $\mathcal{M}^\alpha(-1)$ is a Lie algebra. In this paper we characterize weakly closed Jordan and Lie algebras which occur in this manner when $\mathcal{M}$ is a finite factor.