Ш. А. АЮПОВ, Н. Ж. ЯДГОРОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Спектральные выпуклые множества представляют собой обобщение пространств состояний операторных алгебр. Они были рассмотрены в монографии [1], которая посвящена спектральной теории для аффинных функций на таких множествах. В дальнейших работах были найдены условия, когда данное спектральное множество аффинно гомеоморфно пространству состояний йордановой банаховой алгебры, C^*-алгебры или алгебры фон Неймана [2—6].

В настоящей статье мы изучим строение конечномерных спектральных выпуклых множеств и, в частности, опишем их в случае малых размерностей. Более подробно рассмотрен случай спектральных множеств, у которых грани образуют логику Яуха — Пирона [7—9].

Будем придерживаться терминологии монографий [1, 10].

Предварительные сведения. Пусть K — компактное выпуклое множество в некотором локально-выпуклом хаусдорфовом пространстве V. Через $A^b(K)$ (соотв. $A(K)$) обозначим пространство всех ограниченных (непрерывных) аффинных функций на K с поточечным порядком. Если в качестве порядковой единицы взять функцию e, тождественно равную единице на K, то $(A^b(K), e)$ и $(A(K), e)$ являются пространствами с порядковой единицей. При этом, не ограничивая общности, V можно отождествить с $A(K)^*$ в $*$-слабой топологии, причем (V, K) является пространством с базовой нормой и $A^b(K) = V^*$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех P-проекторов в $A^b(K)$. Элементы $A^b(K)$ вида $u=Re$, $R\in\mathcal{P}$ называются проективными единицами; их совокупность обозначим через $\mathcal{U}$.

Напомним, что подмножество G выпуклого множества K называется гранью, если для $x, y\in K$, $\lambda\in(0, 1)$ из $\lambda x + (1-\lambda)y\in G$ вытекает, что $x, y\in G$. Грань G называется выставленной, если $G = \{\rho\in K : a(\rho) = 0\}$ для некоторого $a\in A^b(K)^+$. Если при этом $a\in\mathcal{U}$, т. е. $a = Re$ для некоторого P-проектора $R\in\mathcal{P}$, то грань G — проективная. Другими словами, проективные грани — это грани вида $G = \operatorname{Im}^+ R^* \cup K = F_R$, $R\in\mathcal{P}$. Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех проективных граней K и введем в нем порядок по включению и операцию ортодополнения $F_R \to F^\# = F_{R'} = \operatorname{Im} R'^* \cup K$, где R' — ортодополнение R.

Определение. Выпуклое множество K назовем проективным, если каждая выставленная грань K проективна.

Элементы $a, b\in A^b(K)^+$ называются ортогональными $(a\perp b)$, если существует проективная грань F в K, такая, что $a(F)=0$ и $b(F^\#)=0$.

Определение. Проективное выпуклое множество K называется спектральным, если любой элемент $a \in A^b(K)$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где $a_+, a_- \in A^b(K)^+$ и $a_+ \perp a_-$.

Если K — спектральное множество, то множества $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ являются попарно порядковыми изоморфными полными ортомодулярными решетками (квантовыми логиками) [1, следствия 2.18 и 12.5].

Определение. Компактное выпуклое множество K называется симплексом, если $A(K)^*$ является векторной решеткой.

Замкнутая грань F выпуклого множества K называется отщепляемой, если существует грань F' $(F \cap F' = \varnothing)$, такая, что K является прямой выпуклой суммой F и F', т. е. всякий элемент ρ можно единственным образом представить в виде $\rho = \lambda x + (1-\lambda) y$, где $\lambda \in [0, 1]$, $x \in F$, $y \in F'$. В этом случае K записывается как $K = F \oplus_c F'$. Из [1; предложения 5.4, 5.5, теорема 10.2] и [11; теорема 7.2] вытекает

Теорема 1. Пусть K — спектральное выпуклое множество. Следующие условия эквивалентны:

1) K — симплекс;

2) всякая замкнутая выставленная грань K отщепляема;

3) изоморфные решетки $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ являются булевыми алгебрами (т. е. дистрибутивны).

Определение. Состояние на $\mathcal{F}$ это вещественная неотрицательная функция μ на $\mathcal{F}$, такая, что $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(K) = 1$, и если $\{F_\alpha\}$ — семейство попарно ортогональных проективных граней, то $\mu\left(\vee F_\alpha\right) = \sum \mu(F_\alpha)$.

Напомним, что состояние μ на логике $\mathcal{F}$ называется состоянием Яуха — Пирона, если для любой последовательности $\{a_n\} \subset \mathcal{F}$ из $\mu(a_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ следует, что $\mu\left(\bigwedge_n a_n\right) = 1$. Логика $\mathcal{F}$ называется логикой Яуха — Пирона, если всякое состояние на $\mathcal{F}$ является состоянием Яуха — Пирона.

Основные результаты. Пусть K — спектральное выпуклое множество в конечномерном пространстве V. Как отмечено выше, будем считать, что K регулярно вложено в V [10]. Тогда $V = A(K)^*$ и K является базой в V. Если $F \subseteq K$ является гранью K, то через $\operatorname{lin} F$ обозначим линейную оболочку F в V; алгебраическую размерность пространства $\operatorname{lin} F$ обозначим $\dim F$ и назовем размерностью грани F. В частности, $\dim K = \dim V$.

Теорема 2. Пусть K — конечномерное спектральное множество. Если существует проективная грань F в K, такая, что $\dim F + \dim F^\# = \dim K$, то F является отщепляемой гранью K.

Доказательство. Так как $\dim F + \dim F^\# = \dim K$, то в силу теоремы 3.5 [1] подпространство $M = \operatorname{lin}(F \cup F^\#)$ совпадает с $\operatorname{lin} K = V$. Поэтому утверждение вытекает из предложения 3.2 [1].■

Следствие 1. Если конечномерное спектральное выпуклое множество K $(\dim K = n-1)$ имеет проективную грань F коразмерности 1 $(\dim F = n-1)$, то F является отщепляемой гранью.

Доказательство очевидно.

Следствие 2. Если конечномерное спектральное выпуклое множество K имеет проективную грань F коразмерности 1, и F является симплексом, то K — симплекс.

Доказательство. Так как $\operatorname{codim} F = 1$, то $\dim F^\# = 1$, т. е. $F^\#$ — экстремальная точка K. По следствию 1 $K = F \oplus_c F^\#$, т. е. K — симплекс.

Теорема 3. (см. [7; теорема 3.5]). Если спектральное выпуклое множество K имеет конечное число проективных граней, то K — конечномерный симплекс.

Доказательство. Так как K — спектрально, то в силу спектральной теоремы [1; теорема 7.6] K конечномерно. Докажем по индукции (по размерности K), что K — симплекс. Если $\dim K=2$, то K — отрезок и утверждение очевидно.

Допустим для $\dim K=n$ утверждение доказано. Если K — $(n+1)$-мерное спектральное множество, имеющее конечное число проективных граней, т. е. $(n+1)$-мерный многогранник, тогда K имеет проективную грань F размерности n, причем число проективных граней F также конечно. По предположению индукций F — симплекс. В силу следствия 2 K — симплекс.

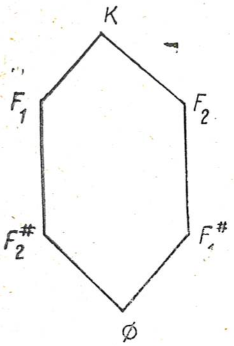


Рис. 1.

Опишем все спектральные выпуклые множества размерности 2, 3, 4. Если $\dim K=2$ то, очевидно, K — отрезок.

Пусть $\dim K=3$. Если K имеет проективную грань размерности 2, то в силу следствия 2 K является треугольником. Если K не имеет проективной грани размерности 2, т. е. все нетривиальные проективные грани являются крайними точками, то в силу [1; §§ 1, 2] K является строго выпуклым множеством на плоскости и имеет гладкую границу.

Пусть $\dim K=4$.

а) Если K имеет проективную грань F размерности 3, то в силу следствия 1 F — отщепляемая грань, т. е. $K=F\oplus_c F^{\#}$, где $F^{\#}$ — вершина K. В силу сказанного выше F является либо треугольником, либо строго выпуклым множеством с гладкой границей. В первом случае K — симплекс, во втором K является конусом с основанием F.

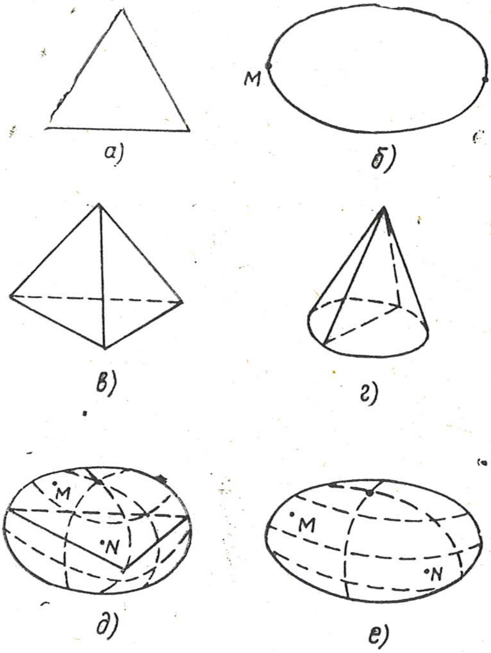
б) Пусть K не имеет проективных граней размерности 3, но имеет проективные грани размерности 2 (ребра). И пусть F — некоторое ребро K. Если $\dim F^{\#}=2$, то по теореме 2 $K=F\oplus_c F^{\#}$ является симплексом, что невозможно, так как симплекс имеет грани размерности 3. Если $\dim F^{\#}=1$, т. е. $F^{\#}$ — крайняя точка, то существуют ребра F_1, F_2, соединяющие $F^{\#}$ с крайними точками $F_1^{\#}$, $F_2^{\#}$ множества K, расположенными на концах ребра F. В противном случае грани $\varnothing$, F_1, F_2, $F_1^{\#}$, $F_2^{\#}$, K образуют решетку, изоморфную решетке O_6 (рис. 1).

В силу [12, теорема 2, с. 22] это противоречит тому, что грани K образуют ортомодулярную решетку. Значит, K является выпуклой фигурой, у которой одно из сечений — треугольник. При этом других ребер, кроме F, F_1, F_2, у множества K не существует. В противном случае легко видеть, что существует ребро, пересекающее одно из ребер F, F_1 или F_2 в точке G, лежащей внутри ребра. Точка G, как пересечение граней, должна быть гранью (крайней точкой) K и в то же время лежит внутри ребра, что невозможно. Итак, в случае б) K является фигурой, изображенной на рис. 10, с. 93 из [1].

в) K не имеет проективных граней размерности 2 и 3. Тогда легко видеть, что K — строго выпуклая фигура с гладкой границей. На рис. 2 изображены все возможные типы 3-мерных и 4-мерных спектральных выпуклых множеств.

Теорема 4. Пусть K — спектральное выпуклое множество размерности $\leqslant 4$. Проективные грани K образуют логику Яуха — Пирона тогда и только тогда, когда K — симплекс.

Доказательство. Если K — симплекс, то очевидно $\mathcal{F}$ — булева алгебра и, следовательно, является логикой Яуха — Пирона. Обратно, пусть $\mathcal{F}$ является логикой Яуха — Пирона. Покажем, что K — симплекс. Для этого достаточно показать, что грани множеств б), г), д), е) на рис. 2 не образуют логику Яуха — Пирона. Легко видеть, что если K является прямой выпуклой суммой двух своих проективных граней $\left(K = F \oplus_c F^{\#}\right)$, то грани K образуют логику Яуха — Пирона тогда и только тогда, когда проективные грани множеств F и $F^{\#}$ образуют логику Яуха—Пирона. Это следует из того,



а)
б)
в)
г)
д)
е)

Рис. 2.

что логика $\mathcal{F}$ является прямой суммой логик $\mathcal{F}_F$ и $\mathcal{F}_{F^{\#}}$. Поэтому достаточно проверить фигуры б), д), е). В этих фигурах существуют минимальные грани (крайние точки) M, N, такие, что $M^{\#} \neq N$, $M \vee N = K$. Возьмем произвольное состояние μ на $\mathcal{F}$ и положим

$$\mu_0(H) = \begin{cases} 0, \text{ если } H = M, \text{ либо } H = N, \\ 1, \text{ если } H = M^{\#}, \text{ либо } H = N^{\#}, \\ \mu(H), \text{ для остальных } H \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Легко видеть, что μ_0 является состоянием на $\mathcal{F}$, причем $\mu_0(M) = \mu_0(N) = 0$, $\mu_0(M \vee N) = 1$, т. е. $\mathcal{F}$ не является логикой Яуха — Пирона.

Замечание. По аналогии случаем $\dim K = 4$ можно описать спектральные множества размерности 5. При этом точно также доказывается, что и в этом случае проективные грани K образуют логику Яуха — Пирона тогда и только тогда, когда K — симплекс. Таким образом, теорема 4 верна для $\dim k \leqslant 5$.

Однако для $\dim K \geqslant 6$ имеет место следующая

Теорема 5. Существуют спектральные выпуклые множества размерности $\geqslant 6$, отличные от симплексов, но проективные грани которых образуют логику Яуха — Пирона.

Доказательство. Рассмотрим множество K всех положительно определенных матриц порядка n $(n \geqslant 3)$ со следом 1 и с коэффициентом из поля $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$ или из тела кватернионов $\boldsymbol{Q}$ (при $n=3$ можно взять коэффициенты из октав $\boldsymbol{O}$ (числа Кэли)). Тогда K является пространством состояний JBW-фактора A типа I_n $(n \geqslant 3)$ и силу [8, предложение 3.1] решетка $\mathcal{U}$ проекторов A является логикой Яуха — Пирона. Так как решетки $\mathcal{U}$ проективных единиц-проекторов в $A = A^b(K)$ и $\mathcal{F}$ (проективных граней K) изоморфны, то $\mathcal{F}$ также логика Яуха — Пирона.

При этом размерность K над $\boldsymbol{R}$ равна

$$\text{в случае } \boldsymbol{R}: \dim K = \frac{n(n+1)}{2} \quad (6, 10, 15, 21, \ldots);$$

$$\text{в случае } \boldsymbol{C}: \dim K = n^2 \quad (9, 16, 25, 36, \ldots);$$

$$\text{в случае } \boldsymbol{Q}: \dim K = 2n^2 - n \quad (15, 28, 45, 66. \ldots);$$

в случае эрмитовых 3×3 матриц над октавами $\dim K = 27$.

Таким образом, при $\dim K \geqslant 6$ существуют искомые спектральные множества. Утверждение доказано.

В связи с теоремой 5 представляет интерес следующий вопрос. Существуют ли спектральные выпуклые множества, не являющиеся пространствами состояний JBW-алгебры, у которых проективные грани образуют логику Яуха — Пирона?

Другой подход к исследованию спектральных выпуклых множеств, основанный на теореме Глисона для мер на проективных гранях, предложен в работе [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Mem. Amer. Math. Soc. 1976. V. 172. XI+120 p.
2. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Acta Math. 1978. V. 140. P. 155—190.
3. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Proc. Londom Math. Soc. 1979. V. 38. P. 497—516.
4. Alfsen E. M., Hanche-Olsen H. and Shultz F. W.//Acta Math. 1980. V. 144. P. 267—305.
5. Araki H.//Commun. Math. Phys. 1980. V. 75. P. 1—25.
6. Jochum B., Shultz F. W.//J. Func. Anal. 1983. V. 50. N 3. P. 317—328.
7. Ruttimann G. T.//J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 189—192.
8. Bunce L J., Navara M., Ptak P. and Maitland Wright J. D.//Quart. J. Math. 1985. V. 36. N 2. P. 261—271.
9. Amann A.//J. Math. Phys. 1987. V. 28. N 10. P. 2384—2389.
10. Alfsen E. M. Compact convex sets and boundary integrals. Berlin: Springer—Verlag. 1971. V. 57. IX+210 p.
11. Asimov L., Ellis A. J. Convexity theory and its applications in functional analysis. London Academic Press. 1980. X+266 p.
12. Kalmbach G. Orthomodular lattices. London: Academic Press. 1983.— X+390 p.
13. Аюпов Ш. А.//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1988. № 6.

Институт математики
имени В. И. Романовского АН УзССР

Поступила
30. 08. 88