Ш. А. АЮПОВ, Н. Ж. ЯДГОРОВ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПРОЕКТИВНЫХ ЕДИНИЦ

Понятие проективной единицы и другие обобщения проекторов в операторных алгебрах играют основную роль в некоммутативной спектральной теории для упорядоченных пространств.

В данной работе мы приведем различные варианты таких обобщений, исследуем их взаимосвязь и выделим класс упорядоченных пространств, в которых все эти понятия совпадают (пространства, обладающие P-свойством). Помимо собственно спектральной теории, рассмотрение этих вопросов представляет интерес также и для некоторых ее приложений. Так, например, в работе А. С. Холево [1] в рамках общего статистического (выпуклого) подхода было дано чисто статистическое описание измерений, наблюдаемых в квантовой механике. Было показано, что статистические модели могут быть заданы с помощью дуальных пар $<(A,\ e),\ (V,\ K)>$, где $(A,\ e)$ — пространство с порядковой единицей, (V, K)—пространство с базовой нормой. В терминах этих пространств были описаны простые и экстремальные измерения и тесты, установлено, что всякий экстремальный тест является простым и доказано, что понятия простого и экстремального измерений совпадают тогда и только тогда, когда пространство $(A,\ e)$ обладает свойством

$$[0,\ x] \cap [0,\ e-x] = \{0\} \Longrightarrow [-x,\ x] \cap [-(e-x),\ e-x] = \{0\}. \quad (\ast)$$

Рассмотренное в настоящей работе P-свойство влечет свойство $(\ast)$. Здесь мы покажем, что P-свойство слабее условия «спектральной двойственности» и сильнее условия «проективной двойственности» между (A, e) и (V, K). Будем придерживаться терминологии работы [2].

Предварительные сведения. Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей, (V, K) — пространство с базовой нормой. Через A^+ (соответственно V^+) обозначим множество положительных элементов в A (соответственно в V). Будем предполагать, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности [2]. Двойственность между перечисленными пространствами обозначим через $<,>$.

Определение 1. Положительное проекционное отображение $R: A \to A$ с единичной нормой назовем P-проектором, если существует единственное положительное проекционное отображение $R': A \to A$ с единичной нормой и такое, что

$$\operatorname{im}^+ R = \ker^+ R', \quad \operatorname{im}^+ R^* = \ker^+ R'^*,$$

$$\ker^+ R = \operatorname{im}^+ R', \quad \ker^+ R^* = \operatorname{im}^+ R'^*,$$

где R^* — сопряженное к R отображение, т. е. $R^*: V \to V$ и $<Ra, \rho> = <a, R^*\rho>$ для $a \in A$, $\rho \in V$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех P-проекторов в A. Для $R, Q \in \mathcal{P}$ положим $R \trianglelefteq Q$, если $\operatorname{im} R \subseteq \operatorname{im} Q$ и тем самым введем частный порядок в $\mathcal{P}$. Очевидно $\theta \trianglelefteq R \trianglelefteq I$, где θ — нулевое, I — тождественное отображения. Отображение $R \to R'$ называется ортодополнением в $\mathcal{P}$, при этом R' также является P-проектором и называется квазидополнением для R.

В пространстве A элементы вида $u = Re$, $R \in \mathcal{P}$, называются проективными единицами, их совокупность обозначим через $\mathcal{U}$. В множестве $\mathcal{U}$ рассмотрим порядок, индуцированный из A, и ортодополнение $Re \to e - Re$.

Напомним, что подмножество G выпуклого множества K называется гранью, если для $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ из $\lambda x + (1-\lambda) y \in G$ вытекает, что $x, y \in G$. Точка $z \in K$ называется экстремальной (крайней) точкой множества K, если $\{z\}$ является гранью: обозначим через $\partial_e K$ множество всех его экстремальных точек. Грань G называется выставленной, если $G = \{\rho \in K: <a, \rho> = 0\}$ для некоторого $a \in A^+$. Если при этом $a \in \mathcal{U}$, т. е. $a = Re$ для некоторого P-проектора $R \in \mathcal{P}$, то грань G называется проективной. Другими словами, проективные грани — это грани вида $G = \operatorname{im}^+ R^* \cap K = F_R$, $R \in \mathcal{P}$. Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех проективных граней K и введем в нем порядок по включению и операцию ортодополнения $F_R \to F_{R'} = F_R^{\#} = \operatorname{im}^+ R'^* \cap K$, где R' — ортодополнение R. Проективная грань $F_R^{\#}$ называется квазидополнением F_R.

Элементы $a, b \in A^+$ ортогональны ($a \perp b$), если существует проективная грань F базы K, такая, что $<a, \rho> = 0$ и $<b, \sigma> = 0$ для всех $\rho \in F$ и $\sigma \in F^{\#}$.

Пространство A с порядковой единицей e называется монотонно полным, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{a_\alpha\}$ из A существует точная верхняя грань $a = \sup a_\alpha$.

Определение 2. Будем говорить, что пространства (A, e) и (V, K) находятся в проективной двойственности, если выполнены два условия:

1) A — монотонно полно;

2) всякая выставленная грань K проективна (ср. условия (4.1) и (4.2) из [2]).

Когда выполнены условия проективной двойственности, множества $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ являются попарно порядковыми изоморфными полными ортомодулярными решетками (квантовыми логиками) [2. следствие 2.18, 12.5].

Определение 3. Говорят, что (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности, если они находятся в проективной двойственности и любой элемент $a \in A$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где a_+, $a_- \in A^+$ и $a_+ \perp a_-$.

В этом случае, как показано в [2], для любого $a \in A$ существует спектральное семейство $\left\{e_\lambda^a\right\} \subset \mathcal{U}$, такое, что $a = \int \lambda de_\lambda^a$.

Две проективные единицы показываются совместимыми, если соответствующие им P-проекторы коммутируют.

Пусть a, b — элементы A, $\left\{e_\lambda^a\right\}$ и $\left\{e_\mu^b\right\}$ — их спектральные семейства. Два элемента a и b называются совместимыми, если все пары e_λ^a, e_μ^b совместимы.

Напомним, что замкнутое по норме подпространство $M \subset A$ называется абелевым, если оно замкнуто относительно отображения $a \to a^{(2)} = \int \lambda^2 de_\lambda^a$ и любые два элемента в M совместимы.

Введем следующие обозначения: $M(a)$ — наименьшее слабо замкнутое абелево подпространство A, содержащее a и e; $[a, b] = \{x \in A : a \leqslant x \leqslant b\}$ для элементов a, $b \in A$ с $a \leqslant b$.

Пусть $B \subset A$, $C \subset V$. Положим $B_\perp = \mathrm{Lin}\{\rho \in V^+ : <a, \rho> = 0$ для любого $a \in B \cap A^+\}$, $C^\perp = \mathrm{Lin}\{a \in A^+ : <a, \rho> = 0$, для любого $\rho \in C \cap V^+\}$.

Основные результаты. Пусть пространство A является монотонно

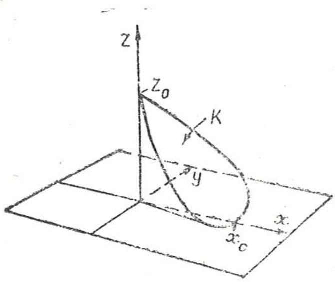

Рис. 1.

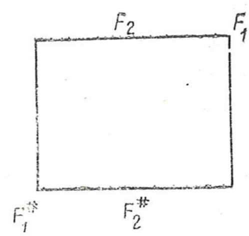

Рис. 2.

полным пространством с порядковой единицей e, которое находится в отделимой порядковой и нормированной двойственности с пространством с базовой нормой (V, K).

Теорема 1. Для элемента $p \in [o, e] = \{a \in A : 0 \leqslant a \leqslant e\}$ рассмотрим следующие свойства:

a. p — проективная единица:

b. $(\{p\}_\perp)^\perp \cap [o, e] = [o, p]$, $(\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [o, e] = [o, e-p]$;

c. p — является экстремальной точкой в $[o, e]$;

d. $[-p, p] \cap [-(e-p), e-p] = \{o\}$;

e. $[o, p] \cap [o, e-p] = \{o\}$.

Справедливы импликации:

$a. \Longrightarrow b. \Longrightarrow c. \Longleftrightarrow d. \Longrightarrow e.$

Доказательство. „$a. \Longrightarrow b.$". Если p — проективная единица, то $p = \sup\{a \in A : 0 \leqslant a \leqslant e, <a, \rho> = o$, для любого $\rho \in F$, где $F = \{\rho \in K : <p, \rho> = o\}$ [2. теорема 2.17]. Очевидно, что $(\{p\}_\perp)^\perp =$

$= \operatorname{im} P$, где $P \in \mathcal{P}$, $p = Pe$, и $[o, p] = (\{p\}_\perp)^\perp \cap [o, e]$. Аналогично $[o, e-p] = (\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [o, e]$. Импликация „$b. \Longrightarrow c.$“ вытекает из предложений 2.1, 2.6 [3] „$c. \Longleftrightarrow d.$“. Эта эквивалентность доказана в [1, леммы 3].

„$d. \Longrightarrow e$“. Очевидно. Теорема 1 доказана.

В общем случае условия в теореме 1 не эквивалентны. Приведем некоторые примеры.

„$b. \not\Rightarrow a.$“. В качестве K рассмотрим выпуклое множество, изображенное на рис. 1. Тогда $V = \boldsymbol{R}^3$, (V, K) — является пространством с базовой нормой и $(A^b(K), e)$ — пространство с порядковой единицей e, где $A^b(K)$ — пространство всех ограниченных аффинных функций на K, e — функция, тождественно равная единице на K. Рассмотрим элемент $p \in [o, e]$, такой, что $p(x_0) = o$ и $p(z_0) = o$. Легко видеть, что $[o, p] = (\{p\}_\perp)^\perp \cap [o, e]$, $[o, e-p] = (\{e-p\}_\perp)^\perp \cap [o, e]$, т. е. p удовлетворяет условию b. Однако p не является проективной единицей (см. [2, с. 15]).

„$c. \not\Rightarrow b$“. Пусть $A = A^b(K)$, где K — квадрат на плоскости (рис. 2). Рассмотрим аффинную функцию $p \in [o, e]$, заданную как $p(F_1) = 0$, $p\left(F_1^{\#}\right) = 1$. Легко видеть, что p удовлетворяет условию $d.$, значит и условию c. Покажем, что p не удовлетворяет условию b. Определим $q \in [0, e]$, положив $q\left(F_2\right) = 0$, $q\left(F_2^{*}\right) = 1$. Тогда, очевидно, $q \in (\{p\}_\perp)^\perp \cap [0, e]$, но $q \bar{\in} [0, p]$.

„$c. \not\Rightarrow d$“. (см. [4]). Пусть A — линейное пространство всех полиномов вида $ax^3 + bx + c$ $(a, b, c \in \boldsymbol{R})$ на интервале $[-1, 1] \subset \boldsymbol{R}$. Тогда A с поточечным порядком образует упорядоченное векторное пространство с порядковой единицей $e(x) = 1$. (см. [4, предложение 1]). Пусть $p(x) = x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

Очевидно, что $p \in [0, e]$. Однако p не является экстремальной точкой в $[o, e]$. Действительно, пусть $s(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ и $t(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. Тогда $s, t \in [0, e]$ и $p = \frac{1}{2}(s + t)$. Теперь покажем, что $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Пусть $h(x) = ax^3 + bx + c$ $(a, b, c \in \boldsymbol{R})$ такой полином, что $h \in [0, p] \cap [0, e-p]$. Имеем $p(-1) = 0$, $(e-p)(1) = 0$. Поэтому $h(-1) = h(1) = 0$. Следовательно, $-a - b + c = 0$ и $a + b + c = 0$. Отсюда $a = -b$ и $c = 0$, т. е. $h(x) = ax^3 - ax = ax(x^2 - 1)$. Если $a \neq 0$, то найдется $x \in [-1, 1]$, такое, что $h(x) < 0$, что противоречит условию $h \in [0, e]$. Таким образом, $a = 0$ т. е. $h = 0$. Следовательно. $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$ и, значит, p удовлетворяет условию $d.$.

Рассмотрим класс пространств, в которых все условия на элемент $p \in [o, e]$ в теореме 1 эквивалентны, в частности, обладающих свойством $(\ast)$ из [1].

Определение 4. Будем говорить, что пространство A с порядковой единицей e обладает P-свойством, если для $p \in [0, e]$ из $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$ следует, что p — проективная единица.

Помимо условий $a.$—$e.$ в теореме 1 есть еще много других условий на элемент $p \in ([0, e]$, позволяющих построить соответствующую спектральную теорию в (A, e) (см. [3—6]). Однако в пространствах, обладающих P-свойством, все эти условия совпадают, т. е. все сводятся к спектральной теории Альфсена и Шульца [2]. Поэтому естественно попытаться выяснить, насколько широк класс пространств, обладающих P-свойством.

Теорема 2. Рассмотрим следующие три условия на двойственность между (A, e) и (V, k):

(i) A и V находятся в спектральной двойственности;

(ii) A обладает P-свойством;

(iii) A и V находятся в проективной двойственности.

Тогда имеют место импликации $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Пусть $p \in [0, e]$, такой, что $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Так как A и V находятся в спектральной двойственности, то абелево подпространство $M(a)$ изометрически и порядково изоморфно $C(X)$, где X — некоторый гиперстоуновский компакт. Из теоремы 40.2 [7] следует, что $p^{(2)}=p$. Из предположения 8.7 [2] вытекает, что $p \in \mathcal{U}$. Следовательно, A обладает P-свойством.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Пусть F — выставленная грань базы K. Покажем, что существует элемент $p \in [0, e]$, такой, что $F = \{\rho \in K : < p, \rho > = 0\}$ и $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Так как F — выставленная грань K, то $F = \{\rho \in K : < b, \rho > = 0$ для некоторого $b \in [0, e]\}$. Рассмотрим множество $F^0 = \{a \in A : < a, \rho > = 0$, для любого $\rho \in F\}$. Так как F — выставленная грань и A — монотонно полно, то F^0 является монотонно полным порядковым идеалом в A и для произвольной цепи $\{q_\alpha\} \subset \subset F^0 \cap [0, e]$ существует $\sup\{q_\alpha\} = q \in F^0 \cap [0, e]$, По лемме Цорна, существует максимальный элемент $p \in F^0 \cap [0, e]$, такой, что $b \leqslant p$. Теперь покажем, что $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Пусть $x \in [0, p] \cap \cap [0, e-p]$. Тогда $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant x' \leqslant e-p$. Отсюда следует, что $x+p \in F^0$ и $0 \leqslant x+p \leqslant e$. Следовательно, $x+p \in F^0 \cap [0, e]$. В силу максимальности p имеем $x+p=p$. Таким образом, $x=0$, т. е. $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$. Так как пространство A обладает P-свойством, то p—проективная единица. Следовательно, A и V находятся в проективной двойственности. Теорема 2 доказана.

Отметим, что импликация $(iii) \Longrightarrow (ii)$ в общем случае неверна.

Пример (см. [2. Предложение 6.11]).

Пусть $A = l_2 = \left\{a : a = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \alpha_i \in R, \sum \alpha_i^2 < +\infty\right\}$ и $V = \{\rho = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0, 0, \ldots) : \beta_i \in R\}$ — пространство финитных последовательностей. И пусть $e = (1, 0, 0, \ldots) \in A$ и $K = \left\{\rho = (\beta_i) \in V : \beta_0 = 1 \right.$ и $\left. \sum\limits_{i=1} \beta_i^2 \leqslant 1\right\}$.

Тогда (A, e) является пространством с порядковой единицей с положительным конусом: $A^+ = \left\{a \in A : \alpha_0 > 0, \sum\limits_{i=1} \alpha_i^2 \leqslant \alpha_0^2\right\}$ и нормой: $\|a\| = |\alpha_0| + \left(\sum\limits_{i=1} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ для $a \in A$. Далее, (V, K) является пространством с базовой нормой с положительным конусом: $V^+ = \left\{\rho \in V : \beta_0 > 0, \sum\limits_{i=1} \beta_i^2 \leqslant \beta_0^2\right\}$ и нормой: $\|\rho\| = \max\left\{|\beta_0|, \left(\sum\limits_{i=1} \beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$ для $\rho \in V$.

Пространства (A, e) и (V, K) находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности относительно формы

$$< a, \rho > = \sum \alpha_i \beta_i.$$

Очевидно, что $A = V^*$ (т. е. пространство A является монотонно полным), причем A и V находятся в проективной двойственности (см. [2, предложение 6.11]).

Покажем, что пространство A не обладает P-свойством. В качестве p возьмем элемент $\left(\frac{1}{2}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\right) \in A$, такой, что $\sum_{i=1} \alpha_i^2 = \frac{1}{4}$ и $\alpha_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Тогда $e - p = \left(\frac{1}{2}, -\alpha_1, -\alpha_2, \ldots\right)$. В силу предложения 6.11 из [2] p не является проективной единицей. Однако легко видеть, что $[0, p] \cap [0, e-p] = \{0\}$.

Вопрос об эквивалентности условий *(i)* и *(iii)* в теореме 2 пока остается открытым. Из [2, предложение 8.7] и [8, теорема 2.2] вытекает

Следствие 1. (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности тогда и только тогда, когда A обладает P-свойством и любой элемент $a \in A$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где a_+, $a_- \in A^+$ и $a_+ \perp a_-$.

Так как в конечномерном случае условия *(i)* и *(iii)* эквивалентны [2. Теорема 7.11], то имеет место

Следствие 2. Пусть пространство A конечномерно. A обладает P-свойством тогда и только тогда, когда A и V находятся в спектральной двойственности.

Приложения к статистическим моделям квантовой механики. Пары $\langle A, V\rangle$, где A — полное пространство с порядковой единицей, находящееся в порядковой и нормированной двойственности с пространством V с базовой нормой, возникают при статистической характеризации измерений, наблюдаемых в квантовой механике. Отсылая за подробностями к [1] (см. также [9]), напомним лишь, что в полной отделимой статистической модели $(\sigma, \mathcal{M})$ (где σ — множество состояний, $\mathcal{M}$ — множество измерений) σ можно отождествить с базой K пространства V, множество тестов (измерений, принимающих два значения 0 и 1) — с интервалом $[o, e]$ в A.

При этом измерению M с пространством исходов U (где U — измеримое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $B(U)$) соответствует разложению единицы в A, т. е. вероятностная мера μ^M на $B(U)$ со значениями в $[o, e]$. Через $\mathcal{M}(U)$ обозначим множество измерений из $\mathcal{M}$ с пространством исходов U.

Пользуясь терминологией [1], тест $x \in [0, e]$ будем называть **простым**, если $[0, x] \cap [0, e-x] = \{0\}$. Измерение $M \in \mathcal{M}(U)$ назовем простым, если $\mu^M(B) \in [0, e]$ является простым тестом для любого $B \in B(U)$. Измерение $M \in \mathcal{M}(U)$ называется **экстремальным**, если оно является крайней точной выпуклого множества $\mathcal{M}(U)$. Тест $x \in [0, e]$ экстремален тогда, когда x является крайней точкой в $[0, e]$. Следуя [3] и [10], тест $x \in [0, e]$ назовем **эффектом решения** (decision effect), если $[0, x] = (\{x\}_\perp)^\perp \cap [0, e]$, $[0, e-x] = (\{e-x\}_\perp)^\perp \cap [0, e]$. Таким образом, тесты, удовлетворяющие условию *b.* теоремы 1,—это эффекты решения, условию *c.* — это экстремальные тесты, условию *e.* — это простые тесты.

Из результатов работы [1] и теорем 1, 2 вытекают

Предложение 1. Если пространство обладает P-свойством, то понятия простого и экстремального измерений совпадают.

Предложение 2. Всякий эффект решения является экстремальным тестом; всякий экстремальный тест является простым. Для того, чтобы все эти понятия совпадали с понятием проективной единицы в A, необходимо, чтобы A и V находились в проективной двойственности, и достаточно, чтобы A и V находились в спектральной двойственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holevo A. S.//Reports of Math. Phys. 1985. V. 22. P. 385—407.
2. Alfsen E. M. and Shultz F. W.//Memoirs Amer. Math. Soc. 1976. V. 172. XI+120 p.
3. Abbati M. C. and Mania A.//Reports of Math. Phys. 1984. V. 19. P. 383—406.
4. Reidel N.//Rev. Roum. Math. Pures et appl. 1983. V. 28. N 1. P. 33—76.
5. Abbati M. C. and Mania A.//Ann. Inst. Henri Poincare. 1981. V. 35. N 4. P. 259—285.
6. Bonnet P. Une theorie spectrale dans Certains Espaces de Banach Ordonnes// Preprint. Universite de Saint. Etienne. Departament de Mathematique, 1975.
7. Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C. Riesz space I. North Holland Publishing Company. Amsterdam. 1971. XI+514 p.
8. Alfsen E. M. and Shultz F. W.//Proc. London. Math. Soc. 1979. V. 38. P. 497—516.
9. Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука. 1980. 320 с.
10. Ludwig G. Foundations of Quantum Mechanics. Springer—Verlag—New York. 1983. XII+426 p.

Институт математики имени В. И. Романовского
АН УзССР

Поступила
10. 03. 89