Узбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари—Доклады Академии наук УзССР

1989, № 7

УДК 517.98

Ш. А. АЮПОВ, Н. Ж. ЯДГОРОВ

СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

Выпуклое множество K называется спектральным, если его можно вложить в линейное пространство V так, что (V, K) является пространством с базовой нормой, которое находится в спектральной двойственности с пространством с порядковой единицей (A, e), где $A = A^b(K) \approx V^*$; $A^b(K)$ — пространство всех ограниченных аффинных функций на K; e — функция, тождественно равная 1 на K (подробнее см. [1, 2]). Через $\mathcal{P}$, F, U обозначим соответственно множества всех P-проекторов на A, проективных граней K и проективных единиц из A. Известно, что если K — спектральное выпуклое множество, то $\mathcal{P}$, F, U — попарно изоморфные, полные ортомодулярные решетки (логики) [2].

Примерами спектральных выпуклых множеств являются пространства всех состояний JB-алгебр и C^*-алгебр, нормальных состояний JBW-алгебр и алгебр фон Неймана, причем одной из важных задач является характеризация этих пространств состояний в классе всех спектральных выпуклых множеств [1—4]. Введем некоторые классы выпуклых множеств, близких по свойствам к пространствам состояний йордановых алгебр, и изучим их взаимосвязь.

Напомним, что состоянием на логике L называется отображение $\mu: L \to [0, 1]$ такое, что $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu\left(\bigvee_\alpha x_\alpha\right) = \sum \mu(x_\alpha)$ для любого семейства $\{x_\alpha\}$ попарно ортогональных элементов из L. Состояние μ называется состоянием Яуха—Пирона, если для $x, y \in L$ из $\mu(x) = \mu(y) = 0$ следует, что $\mu(x \vee y) = 0$. Логика L называется логикой Яуха—Пирона, если все состояния на L являются состояниями Яуха—Пирона.

Определение 1 [5]. Спектральное выпуклое множество K называется множеством Глисона, если всякое состояние на логике U проективных единиц продолжается до $*$-слабо непрерывного линейного функционала на A.

Нетрудно проверить, что K — множество Глисона тогда и только тогда, когда всякая вероятностная мера на логике F проективных граней K имеет «барицентр» в K (см. [5]).

Определение 2. Спектральное выпуклое множество K назовем множеством Яуха — Пирона, если логика F его проективных граней, а значит и логики $\mathcal{P}$ и U, являются логиками Яуха — Пирона.

Теорема. Рассмотрим следующие свойства спектрального выпуклого множества K.

(i) K — пространство всех нормальных состояний JBW-алгебры без прямых слагаемых **типа I_2;**

(ii) K — множество Глисона;

(iii) K — множество Яуха — Пирона.

Имеют место импликации $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Доказательство $(i) \Longrightarrow (ii)$ вытекает из обобщения теоремы Глисона для мер на проекторах JBW-алгебр [6—8]. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Достаточно доказать, что если μ — состояние на U и $\{u_n\}$ — последовательность проективных единиц из $U \subset A^b(K)$, с $\mu(u_n) = 0$, то $\mu\left(\bigvee_n u_n\right) = 0$. Положим $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n$. Тогда по определению множества Глисона, μ можно рассматривать как нормальное состояние на $A^b(K)$. Поэтому $\mu(x) = 0$. По спектральной теореме существует последовательность проективных единиц $\{u_n\} \subset U$, возрастающая к носителю $r(x)$ элемента x, причем $x > \varepsilon_n u_n$ для некоторых $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, Поэтому $\mu(\vee u_n) = \mu(r(x)) = \sup \mu(u_n) = 0$, так как $\mu(u_n) = 0$, т. е. K — множество Яуха—Пирона.

Вопрос об остальных импликациях между свойствами (i)—(iii) пока остается нерешенным. Известно лишь, что при $\dim V \leqslant 5$ условия (i) — (iii) эквивалентны и означают, что K — симплекс.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alfsen E. M., Shultz F. W. State spaces of Jordan algebras. Oslo preprint, 1976. [2] Alfsen E. M., Shultz F. W.//Mem. Amer. Math. Soc. 1976. N 172. X+120 p. [3] Alfsen E. M., Shultz F. W.//Acta Math. 1978. V. 140. P. 155—190. [4] Iochum B., Shultz F. W.//J. Funct. Anal. 1983. V. 50. N 3. P. 317—328. [5] Аюпов Ш. А.//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 6. [6] Bunce L. J., Wright J. D. M.//Commun. Math. Phys. 1985. V. 98. P. 187—202. [7] Аюпов Ш. А.//ИНТ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 27. М., 1985. С. 67—98. [8] Аюпов Ш. А., Адизов А. А. Вероятностные меры на проекторах JBW-алгебр. Деп. ВИНИТИ. 1984. № 7822—84. 41 с.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН УзССР

Поступило
02. 11. 88