Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари — Доклады Академии наук УзССР

1982, № 6

УДК 517.98

М. А. БЕРДИКУЛОВ

ПРОСТРАНСТВА L_1 И L_2 ДЛЯ ПОЛУКОНЕЧНЫХ JBW-АЛГЕБР

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В [1] построены пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ для алгебр фон Неймана с полуконечным следом τ. В [2, 3] введено понятие JBW-алгебр, т. е. йордановых банаховых алгебр, обладающих предсопряженным пространством. Эти алгебры являются абстрактным неассоциативным вещественным аналогом алгебр фон Неймана. Поэтому возникает вопрос о справедливости для JBW-алгебр результатов, полученных в [1]. В [4] для JBW-алгебры A с точным нормальным конечным следом τ построены абстрактные пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ как пополнение алгебры A по L_1- и L_2-нормам соответственно. В данной работе рассматриваются JBW-алгебры с точным нормальным полуконечным следом τ. Оказывается, что множество m_τ элементов A, интегрируемых по модулю, и множество K элементов A, интегрируемых с квадратом относительно τ, являются идеалами алгебры A. В работе построены пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ как пополнение m_τ и K по L_1- и L_2-нормам соответственно Доказано, что как и в случае алгебр фон Неймана, банахово пространство $L_1(\tau)$ изометрически изоморфно банахову пространству, предсопряженному к JBW-алгебре A.

Определение 1. Йорданова алгебра A с $\mathbf{1}$ над полем вещественных чисел называется JB-алгеброй, если в ней введена норма, превращающая A в банахово пространство и удовлетворяющая условиям

(i) $\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\|$, $a, b \in A$;

(ii) $\|a^2\| = \|a\|^2$;

(iii) $\|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$ для всех $a, b \in A$.

Определение 2. JB-алгебру A назовем JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует банахово пространство N, такое, что A как банахово пространство изоморфно пространству N^* всех непрерывных линейных функционалов на N.

Пусть A — JBW-алгебра, U_a — положительный нормальный оператор, определенный следующим образом: $U_a b = 2a(ab) - a^2 b$.

Определение 3. Следом на A^+ назовем функцию $\tau: A^+ \to [0, +\infty]$, удовлетворяющую аксиомам:

(i) $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$, $a, b \in A^+$;

(ii) $\tau(\lambda a) = \lambda\tau(a)$, $a \in A^+$, λ — неотрицательное число (считается, что $0\,(+\infty) = 0$);

(iii) если s-симметрия в A (т. е. $s^2 = \mathbf{1}$) и $a \in A^+$, то $\tau(U_s a) = \tau(a)$, где A^+ — множество положительных элементов алгебры A.

След τ называется полуконечным, если для любого $a \in A^+$ существует $b \in A^+$, $b \neq \theta$, такое, что $b \leqslant a$ и $\tau(b) < +\infty$.

Можно доказать, что условие (iii) в определении 3 эквивалентно

$$(iii)' \; \tau(U_a b^2) = \tau(U_b a^2), \quad a, b \in A.$$

В дальнейшем τ означает точный нормальный полуконечный след на A.

Рассмотрим множество $K = \{x \in A \mid \tau(x^2) < +\infty\}$. Для любых $a \in A$ и $x \in K$ $U_a x \in K$. Так как $ax = \frac{1}{2}(U_{a+1}x - U_a x - x)$, то $ax \in K$, если $x \in K$. Следовательно, K — йорданов идеал алгебры A. Введем множество $m = \{x \in A^+ \mid \tau(x) < +\infty\}$. Пусть $a \in A$ и $x \in m$, тогда $U_a x \in m$. Надо отметить, что $m = (K^2)^+ = A^+ \cap K^2$. Образуем множество $m_\tau = m - m = \{x - y \mid x, y \in m\}$. Нетрудно доказать, что m_τ является идеалом алгебры A и $m_\tau = \{x \in A \mid \tau(|x|) < +\infty\}$.

Теорема 1. Для $x \in m_\tau$ и $a \in A$ справедливы соотношения $|\tau(ax)| \leqslant \tau(|ax|) \leqslant \|a\| \tau(|x|)$.

Когда $x \in m_\tau$, имеем равенство $\tau(|x|) = \sup\limits_{\|a\| \leqslant 1} |\tau(ax)|$. Отображение $x \to \tau(|x|)$ определяет норму на m_τ. Обозначим $\|x\|_1 = \tau(|x|)$ и назовем $\|x\|_1$ L_1-нормой элемента $x \in m_\tau$. Пополнение m_τ по L_1-норме обозначим через $L_1(\tau)$.

Теорема 2. Для любых $x, y \in K$ имеют место неравенства $\tau(xy)^2 \leqslant \tau(x^2)\tau(y^2)$ и $\tau(|xy|)^2 \leqslant \tau(x^2)\tau(y^2)$.

Определим на K L_2-норму полагая $\|x\|_2 = \sqrt{\tau(x^2)}$. Используя теорему 2, легко показать, что это действительно норма. Пополнение K по этой норме обозначим через $L_2(\tau)$.

В заключение рассмотрим связь пространства $L_1(\tau)$ с предсопряженным пространством JBW-алгебры.

Для любого $x \in m_\tau$ функционал φ_x на A, определенный как $\varphi_x(a) = \tau(ax)$, принадлежит предсопряженному пространству N и

$$\|x\|_1 = \tau(|x|) = \sup_{\|a\| \leqslant 1} |\tau(ax)| = \sup_{\|a\| \leqslant 1} |\varphi_x(a)| = \|\varphi_x\|.$$

И обратно, для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует элемент $x \in m_\tau$, такой, что $\varphi_x(a) \neq 0$. Следовательно, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть A—JBW-алгебра, τ — точный нормальный полуконечный след на A^+, N — банахово пространство, предсопряженное к A. Тогда банаховы пространства $L_1\tau$ и N изометрически изоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Segal L. E. «Ann. of Math.», **57**, 1953, 401—457. [2] Alfsen E. M., Shultz F. W., Stormer E. «Advances in Math.», **28**, 1978, 1, 11. [3] Shultz F. W. «J. Funct. Anal.», **31**, 1979, 3, 360—376. [4] Аюпов Ш. А. «Изв. АН УзССР», сер. физ.-мат. наук, 1981, 5,3.

Ордена Трудового Красного Знамени
институт кибернетики с ВЦ АН УзССР

Поступило
4. IX 1981 г.