МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЗБЕКСКОЙ ССР

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

БЕРДИКУЛОВ Мусирмонкул Абдиллаевич

УДК 517.98 + 519.21

УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И МАРТИНГАЛЫ НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ С ПОЛУКОНЕЧНЫМ СЛЕДОМ

01.01.01 - математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент - 1984

Работа выполнена на кафедре функционального анализа Ташкентского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им. В.И.Ленина

Научные руководители: академик АН УзССР Т.А.Сарымсаков, доктор физико-математических наук Ш.А.Аюпов.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Д.П.ЖЕЛОБЕНКО,

кандидат физико-математических наук, доцент М.А.МУРАТОВ.

Ведущая организация:

Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова - - Ленина.

Защита состоится "26" мая 1984 г. в "12^{30}" часов на заседании специализированного совета К 067.02.10 по присуждению ученой степени кандидата наук по специальности 01.01.01 - математический анализ в ТашГУ им. В.И.Ленина по адресу: 700095, г. Ташкент, Вузгородок, ТашГУ, математический факультет, ауд. Г-303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ТашГУ (Вузгородок).

Автореферат разослан "20" апреля 1984 г.

Ученый секретарь специализированного совета   Асl   доцент А.Х.Хаитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В 1953 году в работе Сигала (Segal I., A non commutative extension of abstract integration. Ann.Math., 1953, 57, 401-457) были заложены основы некоммутативного интегрирования. Он рассмотрел алгебру неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана, являющуюся некоммутативным аналогом пространства измеримых функций на пространстве с мерой. В дальнейшем алгебры измеримых операторов были рассмотрены в работах Стайнспринга, Санкарана, Падманабхана, Нельсона, Йедона и других.

Нельсон (Nelson E. Note on non commutative integration theory. J. Funct. Anal. 1974, 15, p. 103-116) доказал, что алгебра тотально измеримых операторов является пополнением алгебры фон Неймана в топологии сходимости по мере (топология, построенная при помощи полуконечного следа).

Развитие теории алгебр фон Неймана и некоммутативного интегрирования дало толчок исследованиям по теории вероятностей на алгебрах фон Неймана.

Условные математические ожидания (у.м.о.) на алгебрах фон Неймана рассматривались в работах Умегаки, Томийямы, Арвесона, Такесаки, Накамура-Турумару, Моя и других. В этих работах у.м.о. определяется аксиоматически. Основываясь на результатах Томийямы (Tomiyama J. On the projections of norm one in W^* - algebras. Proc. Japan Acad., 1957, 33, 608-612), у.м.о. можно рассматривать как проекционное (т.е. $P^*=P$, $P^2=P$) отображение с единичной нормой. В своих работах Накамура-Турумару, Мой и Умегаки дали характеризационные свойства у.м.о. Мартингалы на алгебрах Фон Неймана изучались в работах Кукулеску, Умегаки, Ленса, Данг-Нгока, Барнета и других. В этих работах получены теоремы о сходимости мартингалов на алгебрах Фон Неймана (конечных или полуконечных).

В середине 60-х годов в работах Топпинга (1965) и Штёрмера (1966, 1968) впервые были рассмотрены неассоциативные вещественные аналоги алгебр Фон Неймана - JW - алгебры, т.е. слабо замкнутые йордановы алгебры самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. После появления работы Альфсена, Шульца, Штёрмера (Alfsen E.M., Shultz F.W., Stormer E., A Gelfand - Neumark theorem for Jordan algebras. Advances in Math., 1978, 28, No 1, 11-56) и Шульца (Shultz F.W., On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Funct. Anal., 1979, 31, No 3, 360-376) бурно начала развиваться теория йордановых банаховых алгебр (JB - и JBW - алгебр).

Недавно Ш.А.Аюповым было введено понятие упорядоченной йордановой алгебры (OJ - алгебры) (1979). Были изучены йордановы банаховы алгебры с конечным следом. В частности, изучены условия существования у.м.о. и различные сходимости мартингалов.

Более широкий и естественный класс JBW - алгебр составляют JBW - алгебры с точным нормальным полуконечным следом (он совпадает с классом всех локально модулярных JBW - алгебр). Поэтому возникает задача о рассмотрении вышеупомянутых вопросов в JBW - алгебрах с полуконечным следом.

Цель работы. В йордановой банаховой алгебре с точным нормальным полуконечным следом:

- построить теорию интегрирования по следу;
- описать алгебру тотально измеримых элементов;
- изучить существование условных математических ожиданий относительно данной подалгебры и их свойства;
- получить теоремы о сходимости в среднем и почти всюду для мартингалов.

Общая методика исследования. При решении упомянутых задач нельзя применять технику, хорошо развитую для алгебр фон Неймана. Это обусловлено тем, что существуют неоператорные (исключительные) йордановы банаховы алгебры (йорданова алгебра эрмитовых 3 х 3 матриц над числами Кэли, обозначаемая M_3^8), а также тем, что в йордановых алгебрах произведение элементов неассоциативно и нет операции инволюции. Кроме того, неприменимость техники бикоммутанта и бедный запас унитарных элементов значительно усложняют изучение йордановых банаховых алгебр по сравнению с алгебрами фон Неймана.

При построении теории интегрирования и доказательстве вероятностных теорем важную роль играет порядок, и поэтому наши исследования основаны на модификации алгебраического подхода к классической и некоммутативной теории вероятностей на основе понятий полуполя и O^* - алгебры, предложенного Т.А. Сарымсаковым.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все результаты диссертации являются новыми. В работе получены следующие основные результаты:

- построены пространства L_1 и L_2 по следу;
- доказано, что алгебра тотально измеримых элементов образует OJ - алгебру;

- найдено необходимое и достаточное условие для существования условных математических ожиданий относительно данной подалгебры;
- получены характеризационные теоремы для у.м.о.;
- для мартингалов доказаны теоремы о сходимости в среднем и почти всюду.

Эти результаты могут быть использованы при исследовании операторных алгебр и при решении ряда задач квантовой теории вероятностей.

Апробация работы. Основные результаты работы неоднократно докладывались на семинаре по функциональному анализу в ТашГУ им. В.И.Ленина под руководством академика АН УзССР Т.А.Сарымсакова, на ежегодных научных конференциях молодых ученых Института математики им. В.И.Романовского АН УзССР (1981 - 1983 гг.), на конференции молодых ученых ТашГУ им. В.И.Ленина (май, 1983 г.), на Всесоюзной конференции по предельным теоремам теории вероятностей (сентябрь, 1983 г. г. Фергана).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [4].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и библиографии. Работа содержит 122 страницы машинописного текста. Библиография включает 59 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена построению теории интегрирования на йордановых банаховых алгебрах с полуконечным следом.

В первом параграфе приведены необходимые сведения из теории йордановых банаховых алгебр (JB - и JBW - алгебр), теории упорядоченных йордановых алгебр (OJ - алгебр).

В § I.2 рассматривается JBW - алгебра A с точным нормальным полуконечным следом τ .

Пусть

$$K=\{x\in A \mid \tau(x^2)<+\infty\},$$

$$\mathfrak{M}_\tau=\{x\in A \mid \tau(|x|)<+\infty\}.$$

Доказано, что K и $\mathfrak{M}_\tau$ являются йордановыми идеалами алгебры A , причем

$$\mathfrak{M}_\tau=K^2=\{xy \mid x,y\in K\}.$$

Определим L_1 - норму $\|x\|_1=\tau(|x|)$ для $x\in\mathfrak{M}_\tau$, и L_2 - норму $\|x\|_2=\sqrt{\tau(x^2)}$ для $x\in K$. Пополнение $\mathfrak{M}_\tau$ (соотв. K) по L_1 -норме (соотв. по L_2 -норме) обозначим через $L_1(\tau)$ (соотв. через $L_2(\tau)$).

Для $x\in\mathfrak{M}_\tau$ функционал φ_x определенный как $\varphi_x(a)=\tau(ax)$ для $a\in A$, является нормальным, и имеет место равенство

$$\tau((ab)x)=\tau(a(bx)) \quad \forall\, a,b\in A .$$

Доказан следующий результат, в котором содержится неассоциативный аналог теоремы Радона-Никодима.

Т е о р е м а 2.8[1]. Пусть A - JBW - алгебра,

- - - - - - - - - - - -

[1] Нумерация и формулировки определений, теорем и следствий берутся из основного текста диссертации.

τ - точный нормальный полуконечный след на A, N - предсопряженное банахово пространство к A. Тогда банаховы пространства $L_1(\tau)$ и N изометрически изоморфны.

С л е д с т в и е 2.4. Отображение $x \longrightarrow \varphi_x$, где

$$\varphi_x(a)=\tau(ax)\ a\in A,\ x\in L_1(\tau)\ \text{(соотв. } a\in L_1(\tau),$$

$x\in A$) является изометрическим и порядковым изоморфизмом между $L_1(\tau)$ и N (соотв. между A и $[L_1(\tau)]^*$).

Эти результаты необходимы в главе 2 для доказательства существования условных математических ожиданий на йордановых алгебрах.

В § I.3 при помощи точного нормального полуконечного следа τ на JBW - алгебре A строится топология t сходимости по мере.

О п р е д е л е н и е 3.I. Топологией сходимости по мере на A назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in A \mid \exists p\in\nabla,\ p^{\perp}\in\mathfrak{M}_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\le\delta,\ \|U_p a\|\le\varepsilon\}.$$

Пусть $\hat{A}$ - пополнение A в топологии t. Тогда алгебра $(\hat{A},t)$ является отделимой топологической йордановой алгеброй.

Основным результатом этого параграфа является

Т е о р е м а 3.2. Алгебра $\hat{A}$ является OJ - алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

В дальнейшем алгебру $\hat{A}$ назовем OJ -алгеброй тотально измеримых элементов относительно JBW -алгебры A.

В § I.4 доказано, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ инъективно вкладываются в OJ - алгебру $\hat{A}$ (теорема 4.I).

Если A_0 - максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW - алгебры A, и сужение m следа τ на A_0 полуконечно, то A_0 изометрически изоморфна пространству $L_\infty(S, m)$ измеримых существенно ограниченных действительных функций на пространстве (S, m) с полуконечной мерой.

При этом пространства $\overset{\circ}{L}_1$, $\overset{\circ}{L}_2$, $\hat{A}_0$ построенные по A_0 изоморфны соответственно пространствам $L_1(S,m)$, $L_2(S,m)$, $L_0(S,m)$, где $L_0(S,m)$- пространство всех измеримых функций на S.

Следствие 4.2. $\overset{\circ}{L}_p = L_p \cap \hat{A}_0$, $p=1,2$.

Далее, имеет место

Теорема 4.2. Элемент $x=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, de_\lambda \in \hat{A}$ принадлежит $L_1(\tau)$ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|\, d\tau(e_\lambda) < +\infty$; при этом $\tau(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\tau(e_\lambda)$.

Элемент $x \in \hat{A}$ принадлежит $L_2(\tau)$ тогда и только тогда, когда $x^2 \in L_1(\tau)$.

Из этой теоремы видно, что пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ в точности совпадают соответственно с пространствами интегрируемых и интегрируемых с квадратом элементов из $\hat{A}$. В случае, когда JBW - алгебра A есть эрмитова часть W^* - алгебры $\mathfrak{U}$, пространства $L_1(\tau)$ и $L_2(\tau)$ изоморфны соответственно пространствам самосопряженных интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов, измеримых относительно $\mathfrak{U}$.

Вторая глава посвящена изучению условных математических ожиданий и мартингалов на йордановых банаховых алгебрах с полуконечным следом.

Впервые условные математические ожидания на алгебрах Фон Неймана были рассмотрены в работах Умегаки, где, в частности, он получил характеризационные теоремы для у.м.о. в конечных и в полуконечных алгебрах Фон Нэймана, и доказал некоммутативные аналоги теорем о сходимости в среднем для у.м.о. В работах Кукулеску, Данг-Нгока, Ленса, Барнета, С.Гольдштейна, М.Ш.Гольдштейна и других были получены различные варианты теорем о сходимости мартингалов в среднем и почти всюду.

Мы вводим понятие у.м.о. на JBW - алгебре A с точным нормальным полуконечным следом τ следующим образом: Пусть A_1 - JBW - подалгебра A, содержащая единицу $\mathbb{1}$.

Определение 1.1. Линейное отображение Φ: $A \longrightarrow A_1$ назовем у.м.о. относительно A_1, если

1) $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$;

2) $x \geqslant 0 \Longrightarrow \Phi(x) \geqslant 0$ (т.е. Φ - положительно);

3) $\Phi(xy) = \Phi(x)y$ для $x \in A$, $y \in A_1$.

Если выполняется равенство

4) $\tau(\Phi(x)) = \tau(x)$ для $x \in \mathfrak{M}_\tau$,

то у.м.о. Φ назовем τ - инвариантным.

Теорема 1.1. Пусть $\Phi: A \to A_1$ τ- инвариантное у.м.о. Тогда

5) $\Phi(x)^2 \le \Phi(x^2) \quad \forall\, x \in A$;

6) $\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x) \; \forall x \in A$ и $A_1 = \{x \in A : \Phi(x) = x\}$;

7) $\tau(x\Phi(y)) = \tau(\Phi(x)y) \quad \forall x \in A,\ y \in \mathfrak{M}_\tau$;

8) если $x_\alpha \uparrow x$, то $\Phi(x_\alpha) \uparrow \Phi(x)$;

9) $x \geqslant 0,\ \Phi(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$;

10) $\|\Phi(x)\| \le \|x\| \quad \forall\, x \in A$;

11) $\|\Phi(x)\|_1 \le \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathfrak{M}_\tau$;

12) $\|\Phi(x)\|_2 \le \|x\|_2 \quad \forall\, x \in K$.

В силу 11), 12) τ - инвариантное у.м.о. можно продолжить до линейного отображения из $L_p(\tau)$ в $L_p(\tau_1)$ $(\tau_1 = \tau|A_1 \quad p = 1, 2)$, которое также будем называть у.м.о.

Следующая теорема показывает, что не для всякой JBW - подалгебры $A_1 \subset A$ существует у.м.о.

Теорема I.5. Пусть A_1 - JBW - подалгебра A, содержащая $\mathbb{1}$. Для того, чтобы существовало τ - инвариантное у.м.о. $\Phi : A \longrightarrow A_1$, необходимо и достаточно, чтобы τ_1 - сужение следа τ на A_1 был полуконечным.

Теорема I.6. Пусть τ_1 является полуконечным следом на A_1. Тогда τ - инвариантное у.м.о. относительно A_1 единственно.

В дальнейшем τ - инвариантное у.м.о. относительно JBW - подалгебры A_1 и ее продолжения на $L_p(\tau)$ $(p=1,2)$ будем обозначать через $M(\cdot|A_1)$.

В § 2.2 доказаны характеризационные теоремы для у.м.о.

на йордановых алгебрах.

Пусть A - JB - алгебра, A_1 ее JB - подалгебра содержащая $\mathbb{1}$.

Теорема 2.1. Если $P: A \to A_1$ линейное идемпотентное (т.е. $P(P(x)) = P(x) \quad \forall x \in A$) отображение с единичной нормой и $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, тогда

1) $P(a) \geqslant 0$ для $a \in A^+$, т.е. P -положительно;

2) $P(ax) = aP(x)$ для $a \in A_1$, $x \in A$.

В случае, когда A является эрмитовой частью C^* - алгебры, из этой теоремы вытекает результат Томийямы.

Пусть A - JBW - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ.

Теорема 2.2. Пусть $P: A \to A$ линейное положительное идемпотентное τ -инвариантное отображение с $P(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Тогда $A_1 = P(A)$ - область значений P - является JBW - подалгеброй и

$$P(x) = M(x / A_1) \quad \forall x \in A.$$

Пусть $x \in L_2(\tau)$ и $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, de_\lambda$ - спектральное разложение элемента x. Через $W(x)$ обозначим JBW - подалгебру A, порожденную семейством $\{e_\lambda\}$. Если $S \subset L_2(\tau)$ некоторое подмножество, то через $W(S)$ обозначим JBW - подалгебру A, порожденную множеством $\{W(x), x \in S\}$. Иногда будем обозначать $L_2(\tau)$ через $L_2(A)$.

Теорема 2.3. Пусть $L = L_2(\tau)$ и $P: L \to L$

линейное положительное идемпотентное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) отображение P совпадает с у.м.о. $M(\cdot|A_1)$ относительно некоторой JBW - подалгебры A_1 ;

(ii) $P(L)=L_2(W(P(L)))$.

В параграфах 2.3 и 2.4 получены теоремы о сходимости в среднем и почти всюду для мартингалов на йордановых алгебрах.

Пусть $A-JBW$ - алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ . Пусть $\{A_n\}$ - возрастающая последовательность JBW - подалгебр $A \ni \mathbb{1}$, причем $\bigcup\limits_n A_n$ слабо плотно в A . Предположим, что след $\tau_n=\tau/A_n$ - сужение следа τ на A_n , также полуконечен, $n=1,2,\dots$

Определение 3.1. Последовательность $\{x_n\}$ в $L_1(\tau)$ назовем мартингалом (возрастающим) если для всех $n=1,2,\dots$:

(i) $x_n\in L_1(\tau_n)$;

(ii) $M(x_{n+1}|A_n)=x_n$.

Мартингал $\{x_n\}$ называется L_1 - ограниченным, если $\sup\limits_n\|x_n\|_1<+\infty$.

Определение 3.3. L_1 - ограниченный мартингал называется равномерно интегрируемым, если

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\{|\tau(x_n y)| : n, y\in A, \|y\|\le 1, \|y\|_1\le\varepsilon\}=0$;

б) для любого $\varepsilon>0$ существует идемпотент $e\in\mathfrak{M}_\tau$ такой, что $|\tau((U_{e^\perp}x_n)y)|<\varepsilon$, $n=1,2,\dots$, $y\in A$, $\|y\|\le 1$.

Т е о р е м а 3.2. Для того, чтобы мартингал $\{x_n\} \subset L_1(\tau)$ был равномерно интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы множество $\{x_n\}$ было относительно слабо компактным.

Используя эту теорему, мы получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3.3. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_1(\tau)$. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\{x_n\}$ - равномерно интегрируемый мартингал;

(ii) существует $x \in L_1(\tau)$ такой, что $\|x_n - x\|_1 \to 0$, $n \longrightarrow \infty$;

(iii) существует $x \in L_1(\tau)$ такой, что $x_n = M(x|A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Т е о р е м а 3.4. Пусть $\{x_n\}$ мартингал в $L_2(\tau)$. Следующие условия эквивалентны:

а) $\sup\limits_n \|x_n\|_2 < +\infty$;

б) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $\|x_n - x\|_2 \to 0$, $n \longrightarrow \infty$;

в) существует $x \in L_2(\tau)$ такой, что $x_n = M(x|A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь $\{A_n\}$ - убывающая последовательность JBW- подалгебр A, содержащих $1\!\!1$. Положим $A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Убывающим мартингалом называется последовательность $\{x_n\} \subset L_1(\tau)$ такая, что

1) $x_n \in L_1(\tau_n)$;

2) $M(x_n | A_{n+1}) = x_{n+1}$

Имеет место следующий результат.

Теорема 3.5. Пусть $\{x_n\}$ убывающий мартингал в $L_2(\tau)$ (в $L_2(\tau)\cap A$). Тогда существует $x\in L_2(\tau)$ (соотв. $x\in L_2(\tau)\cap A$) такой, что x_n сходится к x по L_2 - норме (соотв. сильно).

В конце параграфа изучено отображение $x \to x^{|e} = U_e x + U_{1-e} x$ для $x\in A$ (здесь e - идемпотент в A), которое совпадает с у.м.о. относительно JBW -подалгебры $A_1 = A^{|e} = U_e(A) + U_{1-e}(A)$.

Определение 4.2. Последовательность $\{x_n\}$ в $\hat{A}$ назовем сходящейся к элементу $x\in\hat{A}$ почти всюду (п.в.) (соотв. S - почти всюду), если для любого $\varepsilon>0$ существует идемпотент $q\in\nabla$ такой, что $\tau(1-q)<\varepsilon$ и $U_q(x_n - x)\in A$,

$$n=1,2,\ldots,\ \|U_q(x_n-x)\|\longrightarrow 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty$$

(соответственно,

$$U_q(x_n-x)^2\in A,\ n=1,2,\ldots,\ \|U_q(x_n-x)^2\|\to 0 \text{ при } n\longrightarrow\infty).$$

В случае, когда OJ - алгебра $\hat{A}$ ассоциативна, она изоморфна алгебре измеримых действительных функций на некотором пространстве с полуконечной мерой. При этом сходимости почти всюду и S - почти всюду совпадают и означают обычную сходимость функций почти всюду.

Если JBW - алгебра A специальна и является эрмитовой частью алгебры фон Неймана, то сходимость почти всюду означает сходимость операторов в смысле Кукулеску (Cuculescu I., Martingales on von Neumann algebras, J. Multivarite Analysis, 1971, No 1, 17-27), а сходимость S - почти всюду означает сходимость почти всюду для операторов в смысле упомянутой работы Сигала.

Т е о р е м а 4.I. Пусть $\{x_n\} - L_1$ - ограниченный мартингал. Тогда существует элемент $x \in L_1(\tau)$ такой, что $x_n \longrightarrow x$ п.в.

Т е о р е м а 4.2. Пусть $\{x_n\} - L_2$ - ограниченный мартингал. Тогда $\{x_n\}$ S - п.в. сходится к некоторому элементу $x \in L_2(\tau)$ и $M(x|A_n)=x_n$ для всех $n=1,2,\dots$.

О п р е д е л е н и е 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ в A назовем сходящейся к $x \in A$ почти равномерно, если для любого нормального состояния ρ на A и $\varepsilon>0$, существует идемпотент $q \in \nabla$ такой, что $\rho(1\!\!1-q)<\varepsilon$ и $\|U_q(x_n-x)\| \to 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Т е о р е м а 4.3. Для любого $x \in A$ $M(x|A_n) \to x$ почти равномерно при $n \longrightarrow \infty$.

Пользуясь случаем выражаю искреннюю благодарность своим научным руководителям академику АН УзССР Т.А.Сарымсакову и доктору физико-математических наук Ш.А.Аюпову за постоянное внимание и поддержку при написании работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

I. Б е р д и к у л о в М.А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW - алгебр. Доклады АН УзССР, I982, № 6, с. 3-4.

2. Бердикулов М.А. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах. Доклады АН УзССР, 1983, № 6, с.3-4.

3. Бердикулов М.А. Характеризация условных математических ожиданий на йордановых алгебрах. Деп.ВИНИТИ, 1983, № 1821-83, 14 с.

4. Аюпов Ш.А., Бердикулов М.А. Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах. Деп.ВИНИТИ, 1983, № 5044-83, 44 с.