УДК 517.98

М. А. БЕРДИКУЛОВ

СЛЕДЫ НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

В последнее время появилось много работ, посвященных изучению йордановых алгебр со следом. Несмотря на это, нет единого определения понятия следа. Все определения совпадают, если JBW-алгебра является эрмитовой частью алгебры фон Неймана — в этом случае они согласуются с понятием следа на алгебре фон Неймана. Естественно возникает вопрос, эквивалентны ли эти различные определения следа в случае произвольных JBW-алгебр? Для случая, когда след конечен, эквивалентность всех этих определений доказана в [1].

В настоящей работе эта проблема решается в общем случае.

Определение 1 [2]. Йорданова алгебра A с единицей $\mathbf{1}$ называется йордановой банаховой алгеброй, если в ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и удовлетворяет условиям

$$(i)\ \|a^2\| = \|a\|^2\ ;\ (ii)\ \|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\| \text{ для всех } a,\ b \in A.$$

Йорданова банахова алгебра A называется JBW-алгеброй [3], если она обладает предсопряженным пространством.

Примером JBW-алгебры является JW-алгебра [4] — слабо замкнутая йорданова алгебра самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Определение 2. Подпространство $B \subset A$ назовем идеалом (йордановым), если $xy \in B$ для всех $x \in B$, $y \in A$.

Напомним некоторые понятия из теории йордановых алгебр [5]. Пусть A — йорданова алгебра. Для $a, b, c \in A$ определим тройное произведение:

$$\{a b c\} = (a b) c + a (bc) - (a c) b.$$

Отображение $b \to \{a b a\}$ обозначим через U_a, а множество (конус) положительных элементов алгебры A — через A^+ и пусть $\nabla = \{e \in A \mid e^2 = e\}$. Элемент $s \in A$ назовем симметрией, если $s^2 = \mathbf{1}$.

Определение 3. ***Весом*** на JBW-алгебре A назовем функцию τ: $A^+ \to [0, +\infty]$, удовлетворяющую условиям

(1) $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$, $a,\ b \in A$;

(2) $\tau(\lambda a) = \lambda\tau(a)$ $a \in A^+$, $\lambda \geqslant 0$ (считается, что $0(+\infty) = 0$).

Пусть $m_\tau^+ = \{x \in A^+ \mid \tau(x) < +\infty\}$. Вес τ называется *конечным*, если $\tau(\mathbf{1}) < +\infty$; *полуконечным*, если $\tau(a) = \sup\{\tau(x) \mid x \in m_\tau^+,\ x \leqslant a\}$ для всех $a \in A^+$; *точным*, если $\tau(a) > 0$ для $a \in A^+$, $a \neq 0$; *нормальным*, если $\sup\limits_\alpha \tau(a_\alpha) = \tau(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\} \subset A$, возрастающей к a.

Определение 4 [6]. Вес τ называется следом, если

(3) $\tau(U_s a) = \tau(a)$ $a \in A^+$, s — симметрии в A.

Теорема 1. Пусть τ — вес на JBW-алгебре A. Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) τ — след;

(б) $\tau(U_a b^2) = \tau(U_b a^2)$ для всех $a,\ b \in A$.

Доказательство. Для $a, b \in A$ рассмотрим подалгебру $J(a, b)$, порожденную этими элементами. По теореме Ширшова [5], она специальна. В силу леммы 2.3 [7] $A_0 = \overline{J(a, b)}$ — слабое замыкание, $J(a, b)$ также специальна, т. е. является JM-подалгеброй, причем обратимой [8]. Через $\mathcal{U}(A_0)$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана [4] JW-подалгебры A_0, а через „$\cdot$" — ассоциативное умножение в $\mathcal{U}(A_0)$.

(а) $\Longrightarrow$ (б). Пусть выполнено условие (а). Тогда τ — след на A_0; по теореме 2 [9] продолжим его до следа τ_1 на $\mathcal{U}(A_0)$. Так как $U_a b^2 = a \cdot b^2 \cdot a$ в $\mathcal{U}({}_0A)$, то

$$\tau_1(U_a b^2) = \tau_1(a \cdot b^2 \cdot a) = \tau_1((a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^*) =$$
$$= \tau_1((a \cdot b)^* \cdot (a \cdot b)) = \tau_1(b \cdot a^2 \cdot b) = \tau_1(U_b a^2).$$

(б)$\Longrightarrow$(а). Пусть $b = s$ — симметрия в A, тогда, по условию (б), имеем

$$\tau(U_s a^2) = \tau(U_a s^2) = \tau(U_a 1) = \tau(a^2), \quad a \in A.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В работе [10] следом называют вес со свойством (б) из теоремы 1.

Пусть τ — вес на JBW-алгебре A. Образуем множество

$$m_\tau = m_\tau^+ - m_\tau^+ = \{x - y \mid x,\ y \in m_\tau^+\}.$$

Продолжим вес τ на m_τ, полагая $\hat{\tau}(z) = \tau(x) - \tau(y)$ для $z = x - y \in m_\tau$.

Проверим корректность такого продолжения. Пусть $z = x' - y'$, где $x',\ y' \in m_\tau^+$ и $x' \neq x$, $y' \neq y$. Тогда $x - y = x' - y'$ или $x + y' = x' + y$. Поэтому $\tau(x + y') = \tau(x' + y)$. Отсюда по свойству (1) $\tau(x) + \tau(y') = \tau(x') + \tau(y)$. Следовательно, $\tau(x) - \tau(y) = \tau(x') - \tau(y')$.

В дальнейшем продолжение веса τ на m_τ также будем обозначать через τ.

Теорема 2. Пусть τ — след, тогда множество m_τ является йордановым идеалом алгебры A.

Доказательство. Очевидно, что m_τ — подпространство и для любых $a \in A$, $x \in m_\tau^+$, по свойству (б), имеем

$$\tau(U_a x) = \tau\left(U_{\sqrt{x}}\, a^2\right) \leqslant \|a\|^2 \tau(x) < +\infty,$$

т. е. $U_a x \in m_\tau$. В силу тождества $ax = \frac{1}{2}\left(U_{a+1} x - U_a x - x\right)$ имеем $ax \in m_\tau$ для всех $a \in A$, $x \in m_\tau$. Теорема доказана.

Замечание 2. Так как m_τ — йорданов идеал в A, то элемент $x \in A$ принадлежит m_τ тогда и только тогда, когда модуль $|x|$ [11] элемента x принадлежит m_τ. Поэтому

$$m_\tau = \{x \in A \mid \tau(|x|) < +\infty\}.$$

Теорема 3. Пусть τ — вес на JBW-алгебре A и m_τ — йорданов идеал в A. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\tau(U_a x^2) = \tau(U_x a^2)$ для всех $a \in A$, $x \in m_\tau$;

(2) $\tau(x) = \tau(U_e x) + \tau(U_{1-e} x)$ для всех $x \in m_\tau$, $e \in \nabla$;

(3) $\tau(a x) \geqslant 0$ для всех $a \in A^+$, $x \in m_\tau^+$;

(4) $|\tau(a x)| \leqslant \|a\| \tau(|x|)$ для всех $a \in A$, $x \in m_\tau$;

(5) $\tau(U_s x) = \tau(x)$ для всех $x \in m_\tau$, s — симметрии в A;

(6) $\tau((a b) x) = \tau(a (b x))$ для всех $a,\ b \in A$, $x \in m_\tau$;

(7) $\tau(U_a x) = \tau(a^2 x)$ для всех $a \in A$, $x \in m_\tau$ или $a \in m_\tau$, $x \in A$.

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2). Если $x \geqslant 0$, то, по условию (1),

$$\tau(x) = \tau\left(U_{\sqrt{x}} 1\right) = \tau\left(U_{\sqrt{x}}\, e\right) + \tau\left(U_{\sqrt{x}} (1 - e)\right) = \tau(U_e x) + \tau(U_{1-e} x).$$

Для любого $x \in m_\tau$, $x = x_+ - x_-$ имеем

$$\tau(x) = \tau(x_+ - x_-) = \tau(x_+) - \tau(x_-) = \tau(U_e x_+) + \tau(U_{1-e} x_+) - \tau(U_e x_-) - \tau(U_{1-e} x_-) = \tau(U_e x) + \tau(U_{1-e} x).$$

$(2) \Longrightarrow (3)$. Пусть $a = e \in \nabla$ и $x \in m_\tau^+$, тогда в силу тождества $ex = \frac{1}{2}(x + U_e x - U_{1-e} x)$ [2] из условия (2) вытекает, что

$$\tau(ex) = \tau(U_e(ex)) + \tau(U_{1-e}(ex)) = \tau(U_e x) \geqslant 0,$$

так как [2]

$$U_e U_e = U_e, \; U_e U_{1-e} = 0.$$

Поскольку положительные линейные комбинации идемпотентов алгебры A плотны по норме в A^+, то $\tau(ax) \geqslant 0$ для всех $a \in A^+$.

$(3) \Longrightarrow (4)$. Для $x \in m_\tau^+$ определим функционал $\varphi_x(a) = \tau(ax)$ на A. В силу условия (3) он положителен. Так как функционал на JBW-алгебре положителен тогда и только тогда, когда его норма равна значению функционала в точке $\mathbf{1}$, то $\|\varphi_x\| = \varphi_x(\mathbf{1}) = \tau(x)$. Поэтому

$$|\tau(ax)| = |\varphi_x(a)| \leqslant \|a\| \, \|\varphi_x\| = \|a\| \, \tau(x).$$

Пусть $x \in m_\tau$, тогда $x = x_+ - x_-$,

$$|\tau(ax)| = |\tau(ax_+) - \tau(ax_-)| \leqslant \|a\| (\tau(x_+) - \tau(x_-)) = \|a\| \, \tau(|x|).$$

$(4) \Longrightarrow (5)$. Пусть $x \in m_\tau^+$, s — симметрия и $t \in [-1, 1]$. Положим

$$y = (1+t)x + (1-t)U_s x + 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}} sx,$$

$$a = (1+t)^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} + (1-t)^{\frac{1}{2}} s.$$

Тогда $y = U_a x$, значит $y \geqslant 0$ [11]. В специальных йордановых алгебрах справедливо тождество $y U_y z = \{y^2 z y\}$, следовательно, оно верно во всякой йордановой алгебре по теореме Макдональда [5]. Поэтому для симметрии s имеем

$$s U_s z = \{1 z s\} = sz.$$

Таким образом,

$$sy = (1+t)sx + (1-t)sx + 2(1-t^2)^{\frac{1}{2}} s(sx) =$$

$$= 2sx + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} (x + U_s x).$$

В силу свойства (4) $|\tau(sy)| \leqslant \tau(y)$ и, следовательно,

$$0 \leqslant \tau(y - sy) = \left(1 - (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right) \tau(x + U_s x - 2sx) + t\tau(x - U_s x)$$

для всех $t \in [-1, 1]$. В окрестности нуля имеем $1 - (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2} t^2$, поэтому $\tau(x - U_s x) = 0$, т. е. $\tau(x) = \tau(U_s x)$ для $x \in m_\tau^+$, s — симметрии в A. Для $x \in m_\tau$, $x = x_+ - x_-$ получим

$$\tau(x) = \tau(x_+) - \tau(x_-) = \tau(U_s x_+) - \tau(U_s x_-) = \tau(U_s x).$$

$(5) \Longrightarrow (6)$. По теореме Макдональда [5], во всякой йордановой алгебре для $a, b, x \in A$ верно тождество

$$U_b\{bax\} = 2b^2\{axb\} - \{axb^3\}. \qquad (*)$$

Очевидно,

$$2(ab)x = \{abx\} + \{bax\},$$

$$2a(bx)=\{axb\}+\{abx\}.$$

Поэтому докажем, что $\tau(\{bax\})=\tau(\{axb\})$, когда $x\in m_\tau$.

Так как множество линейных комбинаций симметрий плотно в A, то последнее равенство достаточно доказать, когда $b=s$ — симметрия. Согласно свойству (5) и равенству ($\ast$),

$$\tau(\{sax\})=\tau\left(U_s\{sax\}\right)=\tau(2s^2\{axs\})-\{axs^3\})=\tau(\{axs\}).$$

(6)$\Longrightarrow$(7). Для $a\in A$ и $x\in m_\tau$ (или $a\in m_\tau$, $x\in A$) по свойству (6) получим

$$\tau\left(U_a x\right)=\tau(2a(ax)-a^2x)=2\tau(a(ax))-$$
$$-\tau(a^2x)=2\tau(a^2x)-\tau(a^2x)=\tau(a^2x).$$

(7)$\Longrightarrow$(1). По свойству (7) имеем

$$\tau\left(U_a x^2\right)=\tau(a^2x^2)=\tau\left(U_x a^2\right),\quad a\in A,\ x\in m_\tau.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть τ — нормальный полуконечный вес на JBW-алгебре A. Предположим, что m_τ — йорданов идеал в A. Если выполнено одно из эквивалентных условий (1)—(7) теоремы 3, то τ является следом.

Замечание 3. Если вес конечен (состояние), то $m_\tau=A$; в этом случае теорема 3 доказана в работе [1]. Кинг [12] определяет след как вес τ, для которого m_τ — йорданов идеал и выполнено условие (6) теоремы 3.

Следствие 2. Пусть τ—след на A. Для $x\in m_\tau$ справедливо равенство $\tau(|x|)=\sup\limits_{\|a\|\leq 1}|\tau(ax)|$.

Доказательство. По теореме 3 (4) $|\tau(ax)|\leqslant\tau(|x|)$, когда $\|a\|\leqslant 1$. Пусть s—такая симметрия, что $|x|=sx$ [11], тогда $\tau(|x|)=$ $=\tau(sx)$ и $\|s\|=1$. Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть τ — нормальный след на A. Для $x\in m_\tau$ функционал φ_x, определенный как $\varphi_x(a)=\tau(ax)$ для $a\in A$, является нормальным (слабо непрерывным) на A.

Доказательство. Пусть $x\in m_\tau^+$, тогда по теореме 3 (7)

$$\varphi_x(a)=\tau(ax)=\tau\left(U_{\sqrt{x}}\,a\right).$$

Отсюда φ_x — нормальный функционал, так как след τ и оператор $U_{\sqrt{x}}$ нормальны [11].

Пусть $x\in m_\tau$—произвольный функционал. Тогда $x=x_+-x_-$, x_+, $x_-\in m_\tau^+$ и $\varphi_x(a)=\tau(ax_+)-\tau(ax_-)=\varphi_{x_+}(a)-\varphi_{x_-}(a)$. Поэтому φ_x — нормальный (слабо непрерывный) функционал [3]. Следствие доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pedersen G. K., Stormer E.— Canad. J. Math., 1982, vol. 34, № 2, p. 370—373. 2. Alfsen E. M., Shutz F. W., Stormer E.— Advances in Math., 1978, vol. 28, № 1, p. 11—56. 3. Shultz F. W.— J. Funct. Anal., 1979, vol. 31, № 3, p. 360—376. 4. Topping D.— Mem. Amer. Math. Soc., 1965, № 53, p. 1—48. 5. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 432 с. 6. Бердикулов М. А.— Докл. АН УзССР, 1982, № 6, с. 3—4. 7. Haagerup H., Hanche-Olsen H.— Preprint Odense Universitet, 1982, № 4, p. 1—35. 8. Абдуллаев Р. З.— Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1984. 104 с. 9. Ajupov Sh. A.— Math. Z., 1982, vol. 181, p. 253—268. 10. Iochum B.— Lect. Notes in Math., 1984, vol. 1049, p. 1—247. 11. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан, 1983. 304 с. 12. King W. P. C.— Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1983, vol. 93, p. 503—509.

Институт математики
имени В. И. Романовского АН УзССР

Дата поступления
26. 02. 1985 г.