М. А. БЕРДИКУЛОВ

ПРОСТРАНСТВА С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ, ОДНОРОДНЫЕ ТИПА I_2

Айтайлик, A бир жинсли, I_2 типли тартиб бўйича бирлик элементи мавжуд бўлган фазо бўлсин. Агар τ A даги из бўлса, у ҳолда A да τ бўйича қурилган L^1 (A, τ) фазо A нинг олдқўшма фазосига изометрик изоморф бўлиши учун A нинг спин фактор бўлиши зарур ва етарлидир.

Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей и (V, K) — пространство с базовой нормой, которые находятся в спектральной двойственности [1]. В этом случае множество K истолковывается как пространство состояний A.

Через $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ обозначим множество всех проективных единиц, P-проекторов в A соответственно. Известно, что $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ являются логиками и попарно изоморфны [1].

Проективная единица $u \in \mathcal{U}$ называется *атомом*, если u — минимальный элемент логики $\mathcal{U}$. Пространство A называется *фактором*, если оно не содержит центральных проективных единиц, кроме 0 и e. Проективная единица $u = Re$ называется *абелевой*, если $\mathrm{im} R$ — векторная решетка. Пространство A с порядковой единицей имеет *тип* I, если для любого центрального P-проектора R в A $\mathrm{im}\, R$ содержит абелеву проективную единицу.

Фактор A имеет тип I тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один атом (теорема 3 из [2]).

Элемент $u \in \mathcal{U}$ называется конечным, если он является супремумом конечного числа атомов. Минимальное число атомов, супремум которых равен u, называется размерностью u. Фактор A назовем фактором типа I_n, если размерность единицы e равна n; назовем однородным фактором типа I_n, если e является супремумом только n атомов. Через M^+ обозначим все положительные элементы множества M.

Определение 1. Элемент $\tau \in K$ называется следом, если $\tau(Pa + P'a) = \tau(a)$ для всех $a \in A$, P, $P' \in \mathcal{P}$.

Определение 2. Состояние ρ на $\mathcal{U}$ называется оценкой, если $\rho(u \vee v) = \rho(u) + \rho(v)$ для u, $v \in \mathcal{U}$ с $u \wedge v = 0$.

В произвольном пространстве A с порядковой единицей имеет место следующий результат.

Лемма 1. Пусть ρ — произвольное состояние на A, т. е. $\rho \in K$. Если $\rho(Pa) \leqslant \rho(a)$ для всех $a \in A^+$ и $P \in \mathcal{P}$, тогда ρ является следом.

Доказательство. Пусть $\rho(Pa) \leqslant \rho(a) \forall a \in A^+$, Тогда $\rho(a - Pa) \geqslant 0$, т. е. $(I-P)^*\rho(a) \geqslant 0$. Это означает, что $(I-P)^*\rho \in V^+$. Так как $P^*(I-P)^*\rho = 0$, то $(I-P)^*\rho \in \ker^+ P^* = \mathrm{im}^+ P'^*$. Следовательно, $(I-P)^*\rho = P'^*(I-P)^*\rho = P'^*\rho$, т. е. $\rho = P^*\rho + P'^*\rho$. В силу произвольности $P \in \mathcal{P}$ имеем, что ρ — след. Лемма доказана.

В дальнейшем, если не оговорено противное, всегда A означает однородный фактор типа I_2, т. е. $e = u \vee v$, $u \wedge v = 0$, как только $u \neq v$ для всех атомов u, $v \in \mathcal{U}$. Любой элемент $a \in A$ имеет вид $a = \lambda u + \mu u'$ для некоторого $u \in \mathcal{U}$.

Лемма 2 Пусть $\rho \in K$—произвольное состояние на A. Если сужение ρ на $\mathcal{U}$, т. е. $\rho|_u$ — оценка на $\mathcal{U}$, то ρ — след на A.

Доказательство. Так как сужение ρ на $\mathcal{U}$ — оценка, то $1 = \rho(e) = \rho(u \vee v) = \rho(u) + \rho(v)$ для всех u, $v \in \mathcal{U}$, $u \neq v$. Отсюда вытекает, что $\rho(u) = \rho(v) = \frac{1}{2} \forall u, v \in \mathcal{U}$.

Действительно, пусть $\rho(u) \neq \frac{1}{2}$ хотя бы для одного атома $u \in \mathcal{U}$. Рассмотрим произвольный атом $v \in \mathcal{U}$, $u \neq v$, $u \neq v'$. В силу того, что $u \wedge v = 0$, $u \wedge v' = 0$ и $\rho|_u$ — оценка, имеем $\rho(v) = 1 - \rho(u)$ и $\rho(v') = 1 - \rho(u)$. Тогда $1 = \rho(e) = \rho(v + v') = \rho(v) + \rho(v') = 2 - 2\rho(u) \neq 1$. Это противоречие показывает, что $\rho(u) = \frac{1}{2} \forall u \in \mathcal{U}$.

Далее для любого $P \in \mathcal{P}$ и $v \in \mathcal{U}$ справедливо неравенство $\rho(Pv) \leqslant \frac{1}{2}$. Действительно, так как $\rho(v) = \rho(v') = \frac{1}{2}$, то $\rho(Pv) + \rho(Pv') = \rho(P(v + v')) = \rho(Pe) = \frac{1}{2}$. Отсюда $\rho(Pv) \leqslant \frac{1}{2}$.

Пусть $a \in A^+$, $a = \lambda v + \mu v'$ — произвольный элемент, тогда
$$\rho(Pa) = \rho(P(\lambda v + \mu v')) = \lambda\rho(Pv) + \mu\rho(Pv') \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = \lambda\rho(v) + \mu\rho(v') = \rho(\lambda v + \mu v') = \rho(a).$$

В силу леммы 1 получим, что ρ — след. Лемма доказана.

Пусть τ — след на A, $P \in \mathcal{P}$ и положим $\lambda = \|P^*\tau\| \neq 0$. Тогда $1 - \lambda = \|P'^*\tau\| \neq 0$. Если обозначим $\sigma = \|P^*\tau\|^{-1} P^*\tau$ и $\sigma' = \|P'^*\tau\|^{-1} \times P'^*\tau$, то $\tau = P^*\tau + P'^*\tau = \lambda\sigma + (1-\lambda)\sigma' (*)$. Состояния σ и σ' лежат в квазидополняемых гранях F_P и $F_{P'}$ соответственно [1].

Из предложения 1.3 [3] вытекает, что если $u=Pe$ — атом, то ему соответствует проективная грань K, состоящая только из одной точки (экстремальной), и наоборот. Значит, существует взаимно-однозначное соответствие между атомами A и экстремальными точками K. Поэтому в пространстве A с порядковой единицей (фактора) однородного типа I_2 для следа τ в равенстве $(\ast)$ σ и σ'—всегда экстремальные точки K, т. е. K является строго выпуклым и имеет гладкую границу.

Теорема 1. Если в A существует след, то он единствен.

Доказательство. Пусть в A существуют два следа τ_1 и τ_2. Предположим, $\tau_1 \neq \tau_2$ и пусть ρ — произвольное состояние. Не ограничивая общности, можно считать, что ρ — экстремальная точка K, т. е. $\rho \in \partial e K$.

В силу равенства $(\ast)$ имеем

$$\tau_1 = m\rho + (1-m)\rho' \quad \textit{и} \quad \tau_2 = s\rho + (1-s)\rho'$$

для m, $s \in (0, 1)$, где ρ' — квазидополнение ρ,

Пусть P — произвольный P-проектор в A и σ — соответствующая ему экстремальная точка K, тогда

$$\tau_1 = \lambda\sigma + (1-\lambda)\sigma' \quad \text{и} \quad \tau_2 = \mu\sigma + (1-\mu)\sigma'$$

для $\lambda, \mu \in (0, 1)$. Сравнивая эти выражения с предыдущими, получаем

$$\begin{cases} m\rho + (1-m)\rho' = \lambda\sigma + (1-\lambda)\sigma', \\ s\rho + (1-s)\rho = \mu\sigma + (1-\mu)\sigma, \end{cases}$$

Решим эту систему относительно ρ. Тогда $\rho = \gamma\sigma + \delta\sigma'$, $\gamma, \delta \in \boldsymbol{R}$. Следовательно,

$$(P+P')^*\rho = \gamma(P+P')^*\sigma + \delta(P+P')^*\sigma' = \gamma\sigma + \delta\sigma' = \rho.$$

Таким образом, любая экстремальная (произвольная) точка является следом. Это противоречие. Значит, след единствен. Теорема доказана.

Определение 3. Множество K в векторном пространстве V называется центрально симметричным с центром $\tau \in K$, если из того, что $x \in K - \tau$, следует, что $-x \in K - \tau$.

Лемма 3. Если K центрально симметрично с центром, то τ — след на A.

Доказательство. Пусть $\sigma \in K$ — произвольная экстремальная точка K. Если $\sigma - \tau = x$, то существует $\sigma' \in K$, что $\sigma' - \tau = -x$ (так как K центрально симметрично). Нетрудно проверить, что σ'—экстремальная точка K и является квазидополнением σ. Из этих обозначений получаем

$$\sigma + \sigma' - 2\tau = 0, \quad \text{т. е.} \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma'.$$

Пусть P — произвольный P-проектор. Если σ — соответствующая P экстремальная точка K, то в силу предыдущих рассуждений имеем

$$(P+P')^*\tau = \frac{1}{2}(P+P')^*\sigma + \frac{1}{2}(P+P')^*\sigma' = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma' = \tau.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть τ — след на A. Тогда $\tau = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma'$ для любого экстремального $\sigma \in K$, где $\{\sigma'\}$ — квазидополняемая грань для $\{\sigma\}$ в K.

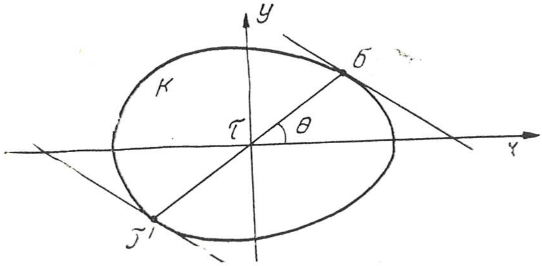
Доказательство. Пусть σ — экстремальная точка K. Ей соответствует атом u. Очевидно, $\tau = \lambda\sigma + (1-\lambda)\sigma'$, где $\lambda = \tau(u)$ и касательные гиперплоскости K в точках σ' и σ параллельны [1]. Покажем, что $\lambda = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим пересечение K с произвольной плоскостью, проходящей через точки τ, σ и σ'. Тогда мы можем считать, что K расположено в плоскости.

Решим следующую задачу на плоскости.

Если все отрезки, соединяющие точки границы K, в которых K имеет параллельные касательные, пересекаются в одной точке τ, то K центрально симметрично.

Решение. Взяв точку τ за начало, рассмотрим систему декартовых и полярных координат (рисунок).



В этих обозначениях гладкая граница K задается формулой

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta, \quad r(\theta) = \|\sigma - \tau\|.$$

В силу условия задачи эта кривая в точках σ и σ' имеет равные производные, т. е.

$$y'_x\big|_\sigma = y'_x\big|_{\sigma'}.$$

Очевидно, что координатами точки σ' будут

$$x = r(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi) = -r(\theta+\pi)\cos\theta,$$
$$y = r(\theta+\pi)\sin(\theta+\pi) = -r(\theta+\pi)\sin\theta.$$

Так как $y'_x = \dfrac{y'_\theta}{x'_\theta}$, то

$$\frac{(r(\theta)\sin\theta)'}{(r(\theta)\cos\theta)'} = \frac{(-r(\theta+\pi)\cos\theta)'}{(-r(\theta+\pi)\sin\theta)'},$$

т. е.

$$\frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta} = \frac{r'(\theta+\pi)\sin\theta + r(\theta+\pi)\cos\theta}{r'(\theta+\pi)\cos\theta - r(\theta+\pi)\sin\theta}.$$

После нетрудных выкладок имеем

$$r(\theta)\,r'(\theta+\pi) = r(\theta+\pi)\,r'(\theta),$$

$$\frac{r'(\theta+\pi)}{r(\theta+\pi)} = \frac{r'(\theta)}{r(\theta)}.$$

Решив это уравнение, получим

$$r(\theta+\pi) = cr(\theta),$$

где c — некоторое постоянное число. Покажем, что $c=1$.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$\varphi(\theta) = r(\theta) - r(\theta+\pi) = r(\theta)(1-c).$$

Если $r(\theta) \neq r(\theta+\pi)$, то значения φ в точках θ и $\theta+\pi$ ($\varphi(\theta) = -\varphi(\theta+\pi)$) имеют разные знаки. Значит, существует точка θ_0, что $\varphi(\theta_0) = 0$, т. е.

$$r(\theta_0) - r(\theta_0 + \pi) = r(\theta_0)(1 - c) = 0,$$

отсюда $c = 1$ (так как $r(\theta_0) \neq 0$). Следовательно, $r(\theta) = r(\theta + \pi)$) для любого θ. Это означает, что K центрально симметрично. В силу леммы 3 и теоремы 1 $\tau = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma'$ для любого экстремального $\sigma \in K$. Теорема доказана.

Пусть τ — след на A, $L_1(\tau)$ — L_1-пространство для A, построенное с помощью τ [5]. Предположим, что $A = V^*$.

Теорема 3. Пространство $L_1(\tau)$ и V порядково и изометрически изоморфны, тогда и только тогда, когда A—JBW-фактор, т. е. A — спин фактор [4].

Доказательство. Так как в A существует след, то K центрально симметрично. Пусть $H = \{\rho \in V : \rho(e) = 1\}$ — гиперплоскость, содержащая K. Так как $\tau \in H$, то $V_0 = H - \tau$ является подпространством V. Множество $K_0 = K - \tau$ выпукло, уравновешено в V_0. Поэтому функционал Минковского μ_{K_0} для K_0 определяет норму на V_0. Очевидно, что $V = R\tau + V_0$ и в этих обозначениях имеем

$$\|\rho\|_K = \max\{|\alpha|, \mu_{K_0}(\rho_0)\},$$

для любого $\rho \in V$, $\rho = \alpha\tau + \rho_0$, $\rho_0 \in V_0$.

Пусть V_0^* — пространство, сопряженное к V_0 и K_0^* — поляра K_0. Так как $A = V^*$, то $A = Re + V_0^*$ и для любого $a \in A$, $a = \lambda e + \xi$ имеем $\|a\| = |\lambda| + \mu_{K_0^*}(\xi)$ в силу того, что A — пространство с порядковой единицей и находится с V в двойственности. Двойственность между A и V задается по формуле:

если $\{\alpha, \xi\} \in A$, $\{\beta, \sigma\} \in V$, то

$$< \{\alpha, \xi\}, \{\beta, \sigma\} > = \alpha\beta + <\xi, \sigma>_{K_0},$$

где $<\cdot, \cdot>_{K_0}$ — двойственность между V_0 и V_0^*. Единичным шаром V является множество

$$V_1 = \{\{\beta, \sigma\} : \max\{|\beta|, \|\sigma\|_{K_0}\} \leqslant 1\},$$

единичный шар A есть множество

$$A_1 = \{\{\alpha, \xi\} : |\alpha| + \|\xi\|_{K_0^*} \leqslant 1\}.$$

Очевидно $\{\beta, \sigma\} \in V^+$ означает, что $\beta \geqslant \|\sigma\|_{K_0}$ и

$$\{\alpha, \xi\} \in A^+ <=> \alpha \geqslant \|\xi\|_{K_0^*}.$$

Так как проективные единицы A являются экстремальными точками $A_1 \cap A^+$ [3], то они имеют вид $u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi_0$, где $\xi_0 \in K_0^*$ и $\|\xi_0\|_{K_0^*} = 1$.

Пусть $a = \alpha e + \xi$, где $\xi \in V_0^*$ — произвольный элемент A. Положим

$$u_a = \left\{\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\frac{1}{\|\xi\|_{K_0^*}}\xi\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\xi}{\|\xi\|_{K_0^*}}.$$

Тогда

$$a = \left(\alpha + \|\xi\|_{K_0^*}\right)u_a + \left(\alpha - \|\xi\|_{K_0^*}\right)u'_a,$$

где

$$u'_a = e - u_a = \{1, 0\} - u_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\xi}{\|\xi\|_{K_0^*}}.$$

Отсюда любой элемент $a \in A$ имеет вид $a = \alpha u + \beta u'$ для некоторого α, $\beta \in R$ и для $u \in \mathcal{U}$. Рассмотрим множество

$$M = \{\alpha u + \beta u' : u,\ u' \in \mathcal{U},\ \alpha,\ \beta \in R\}.$$

Это множество является абелевым подпространством пространства A (предложение 9.7 [1]) и коммутативной банаховой алгеброй относительно произведения $(\alpha u + \beta u')(\alpha_1 u + \beta_1 u') = \alpha\alpha_1 u + \beta\beta_1 u'$ $\left(ab = \right.$ $\left. = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2)\right)$ в силу следствия 9,7 из [1]. Поэтому множество M порядково и алгебраически изоморфно R^2 при соответствии $\alpha u + \beta u' \to (\alpha, \beta) \in R^2$. В силу этих рассуждений для $a = \{\alpha, \xi\} \in A$ имеем

$$|a| = \left\{\frac{1}{2}\left(\left|\alpha + \|\xi\|_{K_0^*}\right| + \left|\alpha - \|\xi\|_{K_0^*}\right|\right),\ \frac{1}{2}\left(\left|\alpha + \|\xi\|_{K_0^*}\right| - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left|\alpha - \|\xi\|_{K_0^*}\right|\right)\frac{\xi}{\|\xi\|_{K_0^*}}\right\}.$$

Так как след $\tau \in K$ является центром K, т. е. $\tau = \{1, 0\}$, то для $a = \{\alpha, \xi\} \in A$ будем иметь $\tau(a) = \alpha$. Если положить $\|a\|_1 = \tau(|a|)$ для $a \in A$, то $\|\cdot\|_1$ будет нормой на A и пополнение A по этой норме будем обозначать через $L_1(\tau)$ [5]. Нетрудно видеть, что нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны. Поэтому A и $L_1(\tau)$ изоморфны как линейные нормированные пространства, но не изометричны. По условию теоремы $L_1(\tau)$ и V изометрически изоморфны, т. е.

$$\|\{\alpha, \xi\}\|_1 = \|\{\alpha, \xi\}\|_K.$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\left|\alpha + \|\xi\|_{K_0^*}\right| + \left|\alpha - \|\xi\|_{K_0^*}\right|\right) = \max\{|\alpha|, \|\xi\|_{K_0}\}.$$

Когда $|\alpha| \leqslant \min\left\{\|\xi\|_{K_0^*}, \|\xi\|_{K_0}\right\}$, получим $\|\xi\|_{K_0^*} = \|\xi\|_{K_0}$. Это означает, что пространства V_0 и V_0^* — гильбертовы пространства, т. е. A — спин фактор. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A — пространство с порядковой единицей, $A = V^*$, τ — след на A. Тогда для всех P, $Q \in \mathcal{P}$ эквивалентны условия:

а) $\tau(PQe) = \tau(QPe)$,

б) $[P, Q]e = [Q', P']e$,

где $[S, T] = ST - TS$.

Доказательство. Пусть τ — след на A. Тогда

$$\tau(PQe + P'Qe) = \tau(Qe) = \tau(Q(P'e + Pe)) = \tau(QPe + QP'e)$$

или

$$\tau(PQe - QPe) = \tau(QP'e - P'Qe)$$

Аналогично

$$\tau(QP'e - P'Qe) = \tau(P'Q'e - Q'P'e).$$

Следовательно,

$$\tau([P, Q]e) = \tau([P', Q']e) \qquad (1)$$

б) $\Longrightarrow$ а). Если условие б) выполнено, то в силу (1) имеем

$$\tau([P, Q]e) = -\tau([Q', P']e) = -\tau([P, Q]e),$$

т. е. $2\tau([P, Q]e) = 0$.
Значит,

$$\tau(PQe) = \tau(QPe).$$

а) $\Longrightarrow$ б). Пусть $\tau(PQe) = \tau(QPe)$. Тогда как в [5] доказано, что $L_1(\tau) \cong V$. По теореме 3 A — спин-фактор, т. е. условие б) выполнено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Mem. Amer. Math. Soc. 1976. V. 172. 122 p.
2. Бердикулов М. А., Ядгоров Н. Ж.//«Операторные алгебры и функциональные пространства». Ташкент: Фан. 1988. С. 17—21.
3. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. P. 497—516.
4. Topping D.//Mem. Amer. Math. Soc. 1965. No. 53. P. 1—48.
5. Бердикулов М. А.//Пространства L_1 для пространств с порядковой единицей Науч. труды ТашГУ. Мат. анализ, алгебра и геометрия. Ташкент. 1989. С. 27—32.

Институт математики имени В. И. Романовского
АН УзССР

Поступила
17. 11. 89