УДК 517.98

М.А.БЕРДИКУЛОВ

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДСОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

Мақолада тартиб буйича бирлик элементи бор фазолар учун олдқушма фазо мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти топилган.

Пусть A — действительное линейное, упорядоченное пространство. Через A^+ обозначим множество положительных элементов A. Элемент $e\in A^+$ называется порядковой единицей, если для каждого $a\in A^+$ существует число $\lambda\in R^+$ такое, что $-\lambda e\leq a\leq\lambda e$. Если порядок Архимедов, то отображение $a\to\|a\|=\inf\{\lambda>0:\ -\lambda e\leq a\leq\lambda e\}$ является нормой. В случае, когда A — банахово пространство относительно этой нормы, говорят, что (A,e) — пространство с порядковой единицей e.

Пусть (A,e) — пространство с порядковой единицей. Элемент $\rho\in A^*$ называют положительным, если $\rho(a)\geq 0$ для всех $a\in A^+$, и пишут $\rho\geq 0$. Положительный линейный функционал называется состоянием, если $\|\rho\|=1$. Это равносильно равенству $\rho(e)=1$. Множество состояний на A обозначим через $S(A)$ и будем называть пространством состояний A. Известно, что $S(A)$ — * —слабо замкнутое подмножество в A^*.

Как мы знаем, пара (A,A^*) является дуальной парой. Следуя работе Е.Альфсена, Ф. Шульца [1], будем предполагать, что A и A^* находятся в спектральной двойственности. В этом случае произвольный элемент $a\in A$ имеет спектральное разложение относительно проективных единиц [1]. Через P и U обозначим множество P — проекторов и проективных единиц A соответственно.

Вообще говоря, спектральная двойственность в [1] определяется между A и некоторым подпространством $Y\subset A^*$. В дальнейшем, если не оговорено противное, то под спектральной двойственностью будем понимать случай, когда $Y\subset A^*$.

Пространство самосопряженных элементов C^* — алгебры и алгебры фон Неймана, JB- и JBW-алгебр является примерами пространств с порядковой единицей в спектральной двойственности.

Пусть K — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого Хаусдорфового пространства V. Через $A(K)$ обозначим пространство всех непрерывных аффинных функций, через $A^b(K)$ — пространство всех ограниченных аффинных функций на K. Тогда $A(K)$ и $A^b(K)$ — пространство с порядковой единицей. Роль единицы играет аффинная функция, тождественно равная единице на K.

Как известно [2], Эрмитова часть алгебры фон Неймана, JBW-алгебра и пространство $A^b(K)$ обладают предсопряженными пространствами; но для JB-алгебр и C^*-алгебр это не выполняется.

Приведем один из этих результатов.

Теорема (F.Shultz) [2, 3]. JB-алгебра A является JBW-алгеброй тогда и только тогда, когда она обладает разделяющим пространством нормальных состояний.

Оказывается, аналогичный результат имеет место и для пространств с порядковой единицей. Доказательству этого результата и посвящена данная работа.

Основные результаты. Начнем исследование с разбора одного примера. В [4] приведен один пример для пространств с порядковой единицей — обобщенные спин-факторы. Сначала проверим верность нашей гипотезы для этого примера. Обобщенными спин-факторами названы пространства с порядковой единицей в следующей конструкции.

Пусть X и Y — действительные банаховы пространства, являющиеся дуальной парой [5]. Тогда $A=R+X$ и $V=R+Y$ будут дуальными парами относительно двойственности:
для $a=\alpha+x\in A$ и $\rho=\beta+y\in V$

$$\langle a,\rho\rangle=\alpha\beta+\langle x,y\rangle,$$

где $\langle x,y\rangle$ — двойственность между X и Y.

Порядок и норма на A (на V) определяются следующим образом:

$$a=\alpha+x\geq 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha\geq\|x\| \left(\rho=\beta+y\geq 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \beta\geq\|y\|\right),$$

$$\|a\|=|\alpha|+\|x\| \ (\|\rho\|=\max(|\beta|,\ \|y\|)).$$

Пусть A обладает предсопряженным пространством. Тогда $X=Y^*$ и произвольный элемент $\rho\in V$ является нормальным. В самом деле, пусть $a_\nu\downarrow 0$, тогда, т.к. $a_\nu=\alpha_\nu+x_\nu$, то $\alpha_\nu\downarrow 0$ и $\|x_\nu\|\to 0$. Пусть $\rho=\beta+y\in V$, тогда $|\rho(a_\nu)|=|\alpha_\nu\beta+\langle x_\nu,y\rangle|\leq\alpha_\nu|\beta|+\|x_\nu\|\cdot\|y\|\to 0$. Поэтому $\rho(a_\nu)\to 0$. Так как (A,V) — дуальная пара, то V разделяет точки A. Следовательно, V — разделяющее пространство нормальных функциалов для A.

Обратно, пусть A обладает разделяющим пространством нормальных функционалов V, т.е. для любого $\rho\in V$ из $a_\nu\downarrow 0$ следует $\rho(a_\nu)\to 0$ и для любого $a\neq 0$ существует $\rho\in V$, что $\rho(a)\neq 0$. Так как $V\subset A^*$, то произвольный элемент $\rho\in V$ имеет вид $\rho=\beta+y$, где $\beta\in R$, $y\in Y\subset X^*$. Из того, что A и V — дуальная пара следует, что X и Y являются дуальной парой. Как доказано в ([5], теорема 1, §3, гл. III), $Y^*=X$. Следовательно, обобщенные спин-факторы обладают предсопряженным пространством, когда они имеют разделяющее пространство нормальных состояний.

Теперь рассмотрим общий случай.

Пусть A — пространство с порядковой единицей в спектральной двойственности. $S(A)$ — пространство нормальных состояний на A. Через $V=\mathrm{lin}(S(A))$ обозначим линейную оболочку пространства нормальных состояний. Очевидно, $V\subset A^*$. Пусть $J=V^0$ — поляра V в A^{**}.

Теорема 1. Существует центральный P-проектор R в A^{**} такой, что $J=R'(A^{**})$, где R' — квазидополнение R [1] и отображение $a\to Ra$ является изоморфизмом A в $R(A^{**})$.

Доказательство. Пусть H — произвольный P-проектор в A. Тогда $H^*(V)\subset V$. В самом деле, пусть $a_\alpha\uparrow a$ в A и $\rho\in S(A)$. Тогда $H^*\rho(x)=\rho(Hx)$ для всех $x\in A$. Так как P-проектор H положителен и нормален, то $\rho(Ha_\alpha)\to\rho(Ha)$. Значит, $H^*\rho\in V$. Отсюда имеем, что если H — P-проектор в A и $x\in J$, то $H^{**}(x)(\rho)=x(H^*\rho)=0$. Следовательно, $H^{**}(J)\subseteq J$ для любого P-проектора H в $A\subset A^{**}$. Это показывает, что множество J "инвариантно" относительно P. В силу непрерывности P-проекторов заключаем, что J инвариантно относительно P-проекторов в A^{**}. Напомним, что $A^{**}\cong A^b(S(A))$ [2] и, значит, A^{**} — пространство с порядковой единицей в спектральной двойственности.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы 1, докажем следующий результат.

Лемма. Пусть J — слабо замкнутое подпространство, инвариантное относительно P-проекторов в A. Тогда существует центральный P-проектор H в A такой, что $J=H(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через h обозначим порядковую единицу J. По условию леммы J — инвариантно относительно P-проекторов в A, тогда $Rh\in J$ для любого $R\in P$. Так как h — единица в J, то $Rh\leq h$. В силу предложения 5.1 в [1] заключаем, что R совместен с h. Из произвольности R имеем, что h — центральный элемент. Известно, что существует P-проектор H такой, что $h=He$. Значит, $J=H(A)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу леммы существует центральный P-проектор H такой, что $J=H(A^{**})$.

Пусть $u=e-h$. Тогда u — центральная проективная единица в A^{**}. Следовательно, R — гомоморфизм A^{**} в себя, где $Re=u$. Так как $\mathrm{id}=R+H$, то ядро R есть J. Далее в силу того, что пространство нормальных состояний A — разделяющее, имеем, что $A\cap J=A\cap V^{\circ}=\{0\}$. Следовательно, R — взаимно однозначное отображение A в $R(A^{**})$. Теорема доказана.

Теорема 2. Слабо * — непрерывные продолжения состояний из A в A^{**} являются нормальными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 1.2.11. [2] A^{**} монотонно полно и порядково изоморфно к $A^b(S(A))$. Из следствия 1.1.22 в [2] известно, что произвольное состояние ρ на A единственным образом продолжается до состояния $\overline{\rho}$ на A^{**}. Пусть $\{a_\alpha\}$ — ограниченная сверху возрастающая сеть в A^{**} с точной верхней границей a. Так как $a_\alpha\uparrow a$ влечет $a_\alpha\big|_{S(A)}\to a\big|_{S(A)}$ поточечно в силу того, что $A^{**}\cong A^b(S(A))$, то $\overline{\rho}\left(a_\alpha\right)=a_\alpha(\rho)\to a(\rho)=\overline{\rho}(a)$. Следовательно, $\overline{\rho}$ — нормальное состояние на A^{**}.

Теорема 3. Если A обладает предсопряженным пространством $X(X^*\cong A)$, то элементы X являются нормальными функционалами на A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\rho\in X$, то, очевидно, $\rho\in A^*$ и его продолжение является нормальным функционалом на A^{**} в силу теоремы 2. Следовательно, ρ — нормальный функционал и на $R(A^{**})$, где R — P-проектор из теоремы 1. Так как $a\to Ra$ — изоморфизм из A в $R(A^{**})$ и $\rho(a)=\rho(Ra)$ для всех $a\in A$, то ρ нормален на $A=R(A^{**})$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть A — монотонно полное пространство с порядковой единицей в спектральной двойственности. Тогда A обладает предсопряженным пространством тогда и только тогда, когда оно имеет разделяющее пространство нормальных состояний. В этом случае предсопряженное — единственно и совпадает с пространством нормальных линейных функционалов на A.

Доказательство. Пусть A имеет разделяющее пространство нормальных состояний $S(A)$. Напомним, что $V=\mathrm{lin}(S(A))$, $J=V^{\circ}$. По теореме 1 существует центральный P-проектор R такой, что $A\cong R(A^{**})$ и $J=R'(A^{**})$. В работе Годефроя [6] доказан следующий факт: банахово пространство E обладает предсопряженным пространством тогда и только тогда, когда существует $\sigma(E^{**},E^{*})$ замкнутое линейное подпространство F в E^{**} такое, что $i_E(E)\oplus F=E^{**}$ (предложение 1 в [6]).

В нашем случае роль подпространства F играет подпространство J. Отсюда заключаем, что A обладает предсопряженным пространством.

Обратно, пусть A обладает предсопряженным пространством, т.е. существует пространство $V\subset A^{*}$ такое, что $A=V^{*}$. Тогда V разделяет точки A, т.е. A и V — дуальная пара. Далее по теореме 3 элементы V являются нормальными функционалами. Значит, A обладает разделяющим пространством нормальных функционалов.

Далее, если $\rho\in V$, то $\rho\in A^{*}$ и является нормальным на A^{**} в силу теоремы 2. Так как $a\to Ra$ — изоморфизм из A в $R(A^{**})$ и $\rho(a)=\rho(Ra)$ для всех $a\in A$, то ρ — нормален на A.

Обратно, если $\rho\in A^{*}$ — нормальный, то продолжение $\overline{\rho}$ на A^{**} имеет вид $\overline{\rho}=\rho R$. Так как R — изоморфизм между A и $R(A^{**})$, то $\overline{\rho}$ — нормален на всем A^{**} и обращается в нуль на $R'(A^{**})$. Таким образом, ρ обращается в нуль на $J=V^{\circ}$, следовательно, он принадлежит V.

Это доказывает, что предсопряженное к A — единственное и совпадает с пространством нормальных функционалов.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E.M., Shyltz F.W. Non commutative spectral theory for offine functions on convex sets // Mem.Amer.Math.Soc. Voe. 172. Providence R.I.: AMS, 1976. 120 p.
2. Hanche-Olsen H., Stormer E.O. Jordan Operator algebras. Pitman APP, London, 1984. 183 p.
3. Shuitz F.W. // J.Funct.Anal. 1979. Vol. 31. No.3. P. 360–376.
4. Бердикулов М.А., Одилов С.Т. // Узб.матем.журн. 1995. №1, С.10–15.
5. Канторович А.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:Наука, 1977.507 с.
6. Goodefroy G. // Ann.inst. Fourier. Grenoble. 1978. Vol. 28 No.3. P. 87–105.

Институт математики имени
В.И. Романовского АН РУз

Дата поступления
03.07.96

AN EXISTANCE THEOREM FOR PREDUAL OF ORDER UNIT SPACES

M.A.Berdikulov

(Summary)

An sufficient and necessary conditions of existance of predual for order unit spaces is obtained.