УДК 517.98

М. А. БЕРДИКУЛОВ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ ОДНОРОДНОГО ТИПА I_4

Ҳақиқий 2×2 ўлчовли симметрик матрицалар учун, одатдаги, мусбат аниқланганлик таърифини умумлаштирувчи, янги мусбат аниқланганлик тушунчаси киритилган. Тартиб бўйича бирлик элементи бор бир жинсли, I_4 типли фазога мисол қурилган ва унинг JBW — алгебралардан фарқ қилиши кўрсатилган.

Пространство с порядковой единицей, как обобщение *JB*-алгебр представляет собой некоторое линейное пространство, порядковая структура которого не отличается от порядковой структуры *JB*-алгебр [1].

Хотя классификационная теория пространств с порядковой единицей хорошо развита в [2], однако не построены примеры пространств типа $I_{(n>2)}$, отличных от *JB*-алгебр.

В работе построен пример пространства с порядковой единицей однородного типа I_4, показывающий существенное отличие таких пространств от *JB*-алгебр такого же типа. Введено новое определение положительной определенности для вещественных симметричных 2×2 матриц, обобщающее обычную положительную определенность.

Пусть V – действительное линейное пространство с порождающим конусом V^+, обладающим базой K, т.е. $V = V^+ - V^+$, $V^+ = \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda K$, $\lambda K \cap K = \varnothing$, при $\lambda \neq 1$. Будем предполагать, что множество $B = \mathrm{conv}\,(K\cup - K)$ радиально компактно, т.е. $B \cap L$ является замкнутым ограниченным отрезком для любой прямой L, проходящей через нулевой элемент V. В этом случае функционал Минковского $\|\rho\| = \inf\{\lambda \geq 0 : \rho \in \lambda B\}$ превращает V в нормированное пространство, называемое пространством с базовой нормой [1, 3]; в дальнейшем будем обозначать его через (V, K).

Пусть A-действительное линейное упорядоченное пространство. Через A^+ обозначим множество положительных элементов A. Элемент $e\in A^+$ называется порядковой единицей, если для каждого $a \in A$ существует число $\lambda\in R^+$ такое, что $-\lambda e \leq a \leq \lambda e$. Если порядок архимедов, то отображение $a\to\|a\| = \inf\{\lambda>0: -\lambda e \leq a \leq \lambda e\}$ является нормой. В случае, когда A-банахово пространство относительно этой нормы, говорят, что (A, e) – пространство с порядковой единицей e [1].

Известно [1], что сопряженное к (V, K) является пространством с порядковой единицей и, наоборот, сопряженное к (A, e) является пространством с базовой нормой.

В дальнейшем под проектором будем понимать линейное, положительное, слабо* непрерывное отображение $R : A \to A$, удовлетворяющее условию $R^2 = R$.

Проектор R называется гладким [3], если условие $\rho\in V^+, \langle a, \rho\rangle = 0$ при $a\in \ker^+ R = A^+\cap \ker^+ R$ влечет $\langle a, \rho\rangle = 0$ при $a\in\ker R$.

Проектор Q называется квазидополнением проектора R [3], если

$$\ker^+ R = \mathrm{im}^+ Q, \quad \mathrm{im}^+ R = \ker^+ Q.$$

Проектор R называется P-проектором, если он по норме не превосходит 1, гладкий и обладает гладким квазидополнением с нормой, не превосходящей 1.

Заметим, что гладкое квазидополнение к P-проектору R всегда единственно и его в дальнейшем будем обозначать через R'.

Далее, P-проектор R и элемент a из A называются совместимыми, если $Ra + R'a = a$.

Два P-проектора R и Q называются совместимыми, если $RQ = QR$.

P-проектор R называется бисовместимым с элементом a, если он совместим с a и с любым P-проектором, совместимым с a.

Элементы множества $U = \{u = Re: R\text{-}P\text{-проектор}\}$, являющиеся логикой, называются проективными единицами.

Грань $G\subset K$ называется выставленной, если $G = \{\rho\in K: \langle a, \rho\rangle = 1\}$ для некоторого $a \in A$.

Проективной гранью, соответствующей P-проектору R, называется подмножество $F_R = K \cap \mathrm{im}\, R^* = \{\rho\in K: \langle Re, \rho\rangle = 1\}$, где R^* – оператор на V, заданный равенством $\langle a, R^*\rho\rangle = \langle Ra, \rho\rangle$.

Определение 1. [1] Будем говорить, что пространства (A,e) и (V,K)

находятся в спектральной двойственности, если для любых $a \in A$ и $\lambda \in R$ существует P–проектор R, бисовместимый с a и такой, что $<a, \rho> \le \lambda$ при $\rho \in \mathrm{im}\ R^{*} \cap K$ и $<a, \rho> > \lambda$ при $\rho \in \mathrm{im} R^{\prime *} \cap K$.

Эквивалентное определение: (A, e) и (V, K) находятся в спектральной двойственности [3], следующие два условия выполнены:

i. Каждая по норме выставленная грань K проективна.

ii. Каждый элемент $a \in A$ допускает единственное разложение $a = a^{+} - a^{-}$ такое, что a^{+}, $a^{-} \in A^{+}$ и $a^{+} \perp a^{-}$.

Здесь $a^{+} \perp a^{-}$ означает, что $\{\rho \in K: <a^{+}, \rho>=1\} \cap \{\rho \in K: a^{-}, \rho>=1\} = \varnothing$.

P–проектор R называется центральным, если $R+R' = I$. Проективная единица $u = Re$ называется центральной, если R — центральный P–проектор.

Пространство (A, e) с порядковой единицей называется фактором, если оно не содержит центральных проективных единиц, кроме 0 и e.

Проективная единица $u = Re$ называется абелевой, если $\mathrm{im}\ R = R(A)$ — векторная решетка.

Пространство A с порядковой единицей имеет тип I, если для любого центрального P–проектора R в A, подпространство $\mathrm{im}\ R$ содержит абелеву проективную единицу.

Элемент $u \in U$ называется атомом, если u — минимальный элемент логики U.

Проективная единица u называется конечной, если она является супремумом конечного числа атомов.

Минимальное число атомов, супремум которых равен u, называется размерностью u.

Фактор A назовем фактором типа I_n, если размерность единицы e равна n.

Если e является супремумом только n–ортогональных атомов, то A назовем однородным фактором типа I_n.

Пусть E — рефлексивное банахово пространство, единичный шар которого — гладкое, строго выпуклое множество, т.е. собственными гранями E_1^* являются только множества вида $\{\sigma\}$, где σ — экстремальная точка E_1^* и для каждого $\sigma \in \partial e\ E_1^*$ существует единственный элемент $x \in \partial\ e\ E_1$ такой, что $\sigma(x) = 1$.

Рассмотрим пространства $A=R+E$ и $V=R+E^{*}$. Порядок и норма на A (на V) определяются следующим образом:

$$a = \alpha + x \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \ge \|x\| \quad (\rho = \beta + \xi \ge 0 \Leftrightarrow \beta \ge \|\xi\|\ ),$$

$$\|a\| = |\alpha| + \|x\| \ (\|\rho\| = \max(|\beta|, \|\xi\|)\ )$$

для $a \in A$, $\rho \in V$ соответственно.

После таких обозначений и определений A становится пространством с порядковой единицей, а V — пространством с базовой нормой, которые будут находиться в отделимой, порядковой и нормированной двойственности относительно формы: $<a, \rho> = \alpha\beta + \xi(x)$, где ξ — ограниченный линейный функционал на E.

Так как единичный шар X — гладкое, строго выпуклое множество, то элементы вида $u = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} X_0$, где $X_0 \in X$, $\|X_0\| = 1$, являются проективными единицами, а P–проектор R, соответствующий u, имеет вид: $Ra = <a, \hat{u}>u$, где $\hat{u}$ — непрерывный линейный функционал на A со свойствами: $<u, > \hat{u} = 1$, $\| \hat{u} \| = 1$.

Ортогональными проективными единицами будут только u и $u' = e - u$.

Для любого элемента $a = \alpha + x \in A$, положив $u_a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|}$, будем иметь ортогональное разложение:

$$a = (\alpha + \|x\|)\ u_a + (\alpha - \|x\|\ u'_a, \tag{1}$$

так как $u_a \perp u'_a$.

Это означает, что A и V находятся в спектральной двойственности.

Пространства с порядковой единицей этой конструкции подробно изучены в [4] и названы обобщенными спин–факторами. Оно является пространством с порядковой единицей — однородным фактором типа I_2.

Наша цель — перевести эту конструкцию на матрицы и с помощью их тензорных произведений построить однородный фактор типа I_4.

Пусть $p > 1$. Введем следующее определение в пространстве $M_2(R)_{sa}$ — симметричных 2×2 матриц над R.

Определение 2. Симметричную 2×2 матрицу $T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ назовем p-положительно определенной, если

$$\begin{cases} a + c + \left(|2b|^p + |a - c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \\ a + c - \left(|2b|^p + |a - c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \end{cases}$$

и будем обозначать так: $T \geq_p 0$.

Это — новое определение положительной определенности, 2×2 симметричных матриц обобщающее обычное определение положительной определенности матрицы.

В самом деле, при $p = 2$ имеем, что $a + c \geq 0$ и $(a + c)^2 \geq (2b)^2 + +(a-c)^2$. Отсюда $ac \geq b^2$. Это означает, что $T \geq 0$ в обычном смысле.

П р и м е р ы. 1. Пусть $T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и находим требуемые числа в определении 2: $4+2+2\cdot 2^{\frac{1}{p}} = 6+2\cdot 2^{\frac{1}{p}} > 0$, $4+2 - 2\cdot 2^{\frac{1}{p}} = 6 - 2\cdot 2^{\frac{1}{p}} > 0$. Значит, T p-положительно определена при всех $p > 1$. Очевидно, что T положительно определена и в обычном смысле.

2. Нетрудно проверить, что матрица $\begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{3}} + 1 & 1 \\ 1 & 2^{\frac{1}{3}} - 1 \end{pmatrix}$ p—положительно определена для всех $p \geq 3$, но не положительно определена в обычном смысле.

Заметим, что произвольная положительно определенная матрица в обычном смысле будет p–положительно определенной для всех $p \geq 2$. Это вытекает из известного неравенства: $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \geq (a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$ для всех $p \geq 2$.

Множество p–положительно определенных симметричных 2×2 матриц обозначим через M_p^+.

Лемма 1. M_p^+ является конусом в пространстве $M_2(\mathbb{R})_{sa}$.

Доказательство. Пусть $T=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ и $S=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1\end{pmatrix}$ p–положительно определенные матрицы. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \\ a+c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_1+c_1+\left(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \\ a_1+c_1-\left(|2b_1|+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \end{cases}$$

Нам надо доказать, что $T+S \geq_p 0$; $\lambda T \geq_p 0$; $M_p^+ \cap \left(-M_p^+\right)=\{0\}$.

Так как $T+S=\begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ b+b_1 & c+c_1\end{pmatrix}$, то покажем, что

$$a+a_1+c+c_1+\left(|2(b+b_1)|^p+|a+a_1-c-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$$

$$a+a_1+c+c_1-\left(|2(b+b_1)|^p+|a+a_1-c-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Первое неравенство очевидно, так как все слагаемые положительны в силу условий леммы. Второе равносильно следующему:

$$a+a_1+c+c_1 \geq \left(|2(b+b_1)|^p+|a-c+a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из положительности T и S имеем:

$$a+c+a_1+c_1 \geq \left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

С другой стороны, в силу известного неравенства Минковского, имеет место:

$$\left(|2(b+b_1)|^p+|a-c+a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из этих двух последних неравенств вытекает требуемое утверждение: $T+S \geq_p 0$.

Если $\lambda \geq 0$, то $\lambda T \geq_p 0$ очевидно.

Пусть $M_p^+ \cap \left(-M_p^+\right) \neq \{0\}$. Тогда для ненулевого элемента T этого множества неравенства $T \geq_p 0$ и $-T \geq_p 0$ выполняются одновременно. Это означает, что

$$\begin{cases} a+c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \\ a+c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -a-c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \\ -a-c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0. \end{cases}$$

Из них имеем, что $a + c \geq 0$ и $a + c \leq 0$, т. е. $a + c = 0$, а также

$$|2b|^p+|a-c|^p \geq 0 \quad \text{и} \quad |2b|^p+|a-c|^p \leq 0,$$

т.е. $2b = 0$ и $a - c = 0$. Следовательно, $a = b = c = 0$, т.е. $T = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Конус M_p^+ является порождающим в пространстве $M_2(R)_{sa}$, т.е. $M_2(R)_{sa} = M_p^+ - M_p^+$.

Доказательство. Очевидно, что $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — p-положительно определенная матрица. Для всех чисел t и t' с условием $|t|^p + |t'|^p=1$ симметричные матрицы $\begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1-t & -t' \\ -t' & 1+t \end{pmatrix}$ p — положительно определены и образуют базис в $M_2(R)_{sa}$.

В самом деле, для каждой симметричной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ существуют числа t и t' с условием $|t|^p+|t'|^p=1$ и α, β такие, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\alpha\cdot\begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta\cdot\begin{pmatrix} 1-t & -t' \\ -t' & 1+t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Решив это уравнение относительно a, b, с и находя α, β, t, t', тем самым докажем требуемое утверждение.

Из (2) имеем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha+t\,\alpha+\beta-t\,\beta}{2} & \dfrac{\alpha\,t-\beta\,t'}{2} \\ \dfrac{\alpha\,t'-\beta\,t'}{2} & \dfrac{\alpha-t\,\alpha+\beta+t\,\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда,

$$\begin{cases} \alpha+t\,\alpha+\beta-t\,\beta=2a \\ \alpha t'-\beta t'=2b \\ \alpha-t\,\alpha+\beta+t\,\beta=2c \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha+\beta=a+c \\ (\alpha-\beta)t=a-c\,. \\ (\alpha-\beta)t'=2\,b \end{cases}$$

Из последних двух: $\dfrac{t}{t'}=\dfrac{a-c}{2b}$, из них имеем $t = k\,(a - c)$, $t' = k\,(2b)$ для некоторого положительного числа k. Так как $|t|^p+|t'|^p=1$, то

$k^p\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)=1$, следовательно, $k=\dfrac{1}{\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$. Поэтому

$$t=\frac{a-c}{\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\quad t'=\frac{2b}{\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{3}$$

Значит,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a+c\\ \alpha-\beta=\dfrac{a-c}{t}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\alpha+\beta=a+c\\ \alpha-\beta=\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{cases}$$

Из них

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(a+c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),\ \beta=\frac{1}{2}\left(a+c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Следовательно, имеем, что

$$T=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left(a+c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\begin{pmatrix}1+t & t'\\ t' & 1+t\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{4}\left(a+c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\begin{pmatrix}1-t & -t'\\ -t' & 1+t\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Лемма доказана.

Пространство $M_2(R)_{sa}$–симметричных 2×2 матриц над R относительно порядка в определении 2 обозначим через $M_p^2(R)_{sa}$.

Определение 3. Число $\|T\|_p=\dfrac{1}{2}\left(|a+c|+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ назовем нормой симметричной 2×2 матрицы $T=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ в $M_p^2(R)_{sa}$.

Нетрудно видеть, что $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ будет порядковой единицей в $M_p^2(R)_{sa}$ относительно p–порядка, и это норма есть порядковая норма матрицы.

Пусть $E=R_p^2=\left\{x=(x_1,x_2)\in R^2:\|x\|_p=\left(|x_1|^p+|x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$.

Тогда, как заметили выше, $A=R+R_p^2$ обобщенный спин-фактор. Произвольный элемент $a=\alpha+x=\alpha+(x_1;x_2)$ в A, как в (1), разлагается по двум ортогональным атомам:

$$a = \left(\alpha + \|x\|_p\right)u_a + \left(\alpha - \|x\|_p\right)u'_a, \text{ где } u_a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\|x\|_p}; \frac{x_2}{\|x\|_p}\right) \qquad (1')$$

Теорема 1. Линейное отображение $a=(\alpha, x_1, x_2) \to T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha + x_2 & x_1 \\ x_1 & \alpha - x_2 \end{pmatrix}$ является порядковым и изометрическим изоморфизмом между $A=R+R_p^2$ и пространством $M_p^2(R)_{sa}$.

Доказательство. Для всех чисел t и t' с условием $|t|^p + |t'|^p = 1$ соответствие $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t;t') \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix}$ устанавливает взаимно однозначную связь между базисными элементами (атомами) A и $M_p^2(R)_{sa}$.

Теперь определим, какая симметричная 2×2 матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ставится элементу $a=(\alpha, x_1, x_2)$ относительно этого соответствия.

В силу (4) и (1′) получим:

$$\begin{cases} \alpha + \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2}\left(a + c + \left(|2b|^p\right) + |a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \alpha - \left(|x_1|^p + |x_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2}\left(a + c - \left(|2b|^p + |a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \end{cases}.$$

Отсюда, $2\alpha=a+c$, $x_1=b$, $2x_2,=a-c$. Решив эту систему, находим

$$a = \alpha + x_2, \quad b = x_1, \quad c = \alpha - x_2.$$

Таким образом, установим требуемое отображение.

Изометричность и сохранение порядка этим отображением легко проверяется. Теорема доказана.

Разложение (4) можно рассмотреть как разложение матрицы T по атомам.

Итак, как следствие теоремы 1 доказана следующая

Теорема 2. Пространство действительных симметричных 2×2 матриц $M_p^2(R)_{sa}$ является спектральным пространством с порядковой единицей однородного типа I_2 относительно порядка в определении 2.

Так как есть разложение (4) по атомам в $M_p^2(R)_{sa}$, то можно определить любой степень матрицы. Например, рассмотрим "квадрат" матрицы:

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(a + c + \left(|2b|^p + |a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2 u + \frac{1}{4}\left(a + c + \left(|2b|^p + |a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2 u'.$$

Подставляя в эту формулу $u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+t & t'\\ t' & 1-t\end{pmatrix}$ и $u'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-t & -t'\\ -t' & 1+t\end{pmatrix}$ и учитывая t и t', из (3) после некоторых выкладок имеем, что

$$T^{(2)}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3a^2+2ac-c^2+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{2}{p}} & 4b(a+c)\\ 4b(a+c) & -a^2+2ac+3c^2+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{2}{p}}\end{pmatrix}.$$

Этот квадрат действительно есть обобщение обычного квадрата, так как при $p=2$ имеем, что

$$T^{(2)}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3a^2+2ac-c^2+4b^2+a^2-2ac+c^2 & 4b(a+c)\\ 4b(a+c) & -a^2+2ac+3c^2 4b^2+a^2-2c+c^2\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & b(a+c)\\ b(a+c) & b^2+c^2\end{pmatrix}=T^2$, т. е. новый квадрат совпадает с квадратом в обычном смысле.

Насколько разные эти квадраты, показывает следующий факт.

Известно [5], что пространство действительных симметричных 2×2 матриц — $M_2(R)_{sa}$, с помощью обычного квадрата превращается в *JB*-алгебру, так как верно равенство: $\|T^2\|=\|T\|^2$.

Непосредственным вычислением можно показать, что равенство $\left\|T^2\right\|_p=\|T\|_p^2$ равносильно следующему: $\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|2b|^2+|a-c|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, которое верно только при $p=2$. Это означает, что $M_p^2(R)_{sa}$ нельзя превращать в *JB*-алгебру при $p\neq 2$.

Надо отметить, что и в этом случае (с новым квадратом) верно равенство $\left\|T^{(2)}\right\|_p=\|T\|_p^2$.

Далее исследуем тензорное произведение обобщенных спин-факторов.

Пусть $A=M_p^2(R)_{sa}$. Тензорное произведение A на A, пространства $A\otimes A$ будут подпространством $M_4(R)_{sa}$.

Пусть a, $b\in A$ и $a=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix}$. Тогда $a\otimes b=$

$=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix} & y\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix}\\ y\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix} & z\begin{pmatrix}u & v\\ v & h\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xu & xv & yu & yv\\ xv & xh & yv & yh\\ yu & yv & zu & zv\\ yv & yh & zv & zh\end{pmatrix}$, и значит, произвольный элемент $T=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i\in A\otimes A$ имеет вид:

$$T=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_2 & b_3\\ b_1 & a_2 & b_3 & b_4\\ b_2 & b_3 & a_3 & b_5\\ b_3 & b_4 & b_5 & a_4\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Известно, что проективные единицы (атомы) в A имеют вид:
$u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+t & t'\\ t' & 1-t\end{pmatrix}$, $v=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+s & s\\ s' & 1-s\end{pmatrix}$, где $|t|^p+|t'|^p=1$,
$|s|^p+|s'|^p=1$.

Известно [6], что тензорное произведение атома на атом является атомом на тензорном пространстве. Поэтому элементы вида

$$u\otimes v=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(1+t)(1+s) & (1+t)s' & t'(1+s) & t's'\\ (1+t)s' & (1+t)(1-s) & t's' & t'(1-s)\\ t'(1+s) & t's' & (1-t)(1+s) & (1-t)s'\\ t's' & t'(1-s) & (1-t)s' & (1-t)(1-s)\end{pmatrix} \tag{6}$$

являются атомами (минимальными проективными единицами) в $A\otimes A$.

Нетрудно убедиться, что ортогональных атомов всего 4: $u\otimes v$, $u\otimes v'$ $u'\otimes v$, $u'\otimes v'$, где $u'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-t & -t'\\ -t' & 1+t\end{pmatrix}$, $v'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-s & -s'\\ -s' & 1+s\end{pmatrix}$, и они тоже имеют соответственно аналогичный вид (6).

Докажем, что произвольный элемент $T\in A\otimes A$ разлагается по 4-м атомам, т.е. для каждого T существуют t, t', s, s', α, β, γ, δ такие, что $T=\alpha\, u\otimes v+\beta u\otimes v'+\gamma u'\otimes v+\delta u'\otimes v'$.

Подставляя в это уравнение данные из (5) и (6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha(1+t)(1+s)+\beta(1+t)(1-s)+\gamma(1-t)(1+s)+\delta(1-t)(1-s)=4a_1\\ \alpha(1+t)(1-s)+\beta(1+t)(1+s)+\gamma(1-t)(1-s)+\delta(1-t)(1+s)=4a_2\\ \alpha(1-t)(1+s)+\beta(1-t)(1-s)+\gamma(1+t)(1+s)+\delta(1+t)(1-s)=4a_3\\ \alpha(1-t)(1-s)+\beta(1-t)(1+s)+\gamma(1+t)(1-s)+\delta(1+t)(1+s)=4a_4\\ \alpha(1+t)s'-\beta(1+t)s'+\gamma(1-t)s'-\delta(1-t)s'=4b_1\\ \alpha(1+s)t'+\beta(1-s)t'-\gamma(1+s)t'-\delta(1-s)t'=4b_2\\ \alpha t's'-\beta t's'-\gamma t's'+\delta t's'=4b_3\\ \alpha(1-s)t'+\beta(1+s)t'-\gamma(1-s)t'-\delta(1+s)t'=4b_4\\ \alpha(1-t)s'-\beta(1-t)s'+\gamma(1+t)s'-\delta(1+t)s'=4b_5\end{cases}$$

Решив эту систему, находим неизвестные t, t', s, s', α, β, γ, δ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=a_1+a_2+a_3+a_4\\ s'\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)t\right)=4b_1\\ t'\left(\alpha+\beta-\gamma-\delta+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)s\right)=4b_2\\ \qquad t's'\left(\alpha-\beta-\gamma+\delta\right)=4b_3\\ t'\left(\alpha+\beta-\gamma-\delta+(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)s\right)=4b_4\\ s'\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta+(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)t\right)=4b_5\end{cases}$$

Из этих $ts'(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=2(b_1-b_5)$, $t's(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=2(b_2-b_4)$,

$$\frac{t}{t'}=\frac{b_1-b_5}{2b_3}, \qquad \frac{s}{s'}=\frac{b_2-b_4}{2b_3}$$

$$t=k\,(b_1-b_5),\ t'=k\,(2b_3), \qquad s=m\,(b_2-b_4),\ s'=m\,(2b_3).$$

Так как $|t|^p+|t'|^p=1$, и $|s|^p+|s'|^p=1$, то $k=\dfrac{1}{\left(|2b_3|^p+|b_1-b_5|\right)^{\frac{1}{p}}}$,

$$m=\frac{1}{\left(|2b_3|^p+|b_2-b_4|\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Поэтому

$$t=\frac{b_1-b_5}{\left(|2b_3|^p+|b_1-b_5|\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad t'=\frac{2b_3}{\left(|2b_3|^p+|b_1-b_5|\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

$$s=\frac{b_2-b_4}{\left(|2b_3|^p+|b_2-b_4|\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad s'=\frac{2b_3}{\left(|2b_3|^p+|b_2-b_4|\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Из последней системы также имеем, что $t'(\alpha+\beta-\gamma-\delta)=2(b_2-b_4)$, $s'(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=2(b_1-b_5)$.
Подставляя в эти уравнения значения t' и s', получим:

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=\frac{1}{b_3}(b_2+b_4)\left(|2b_3|^p+|b_1-b_5|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta=\frac{1}{b_3}(b_1+b_5)\left(|2b_3|^p+|b_2-b_4|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из $t's'(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=4b_3$ находим: $\alpha-\beta-\gamma+\delta=$

$=\dfrac{1}{b_3}\left(|2b_3|^p+|b_2-b_4|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(|2b_3|^p+|b_1-b_5|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Решая эти уравнения вместе с $\alpha+\beta+\gamma+\delta=a_1+a_2+a_3+a_4$, имеем:

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \frac{1}{b_3}(b_2 + b_4)\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{b_3}(b_1 + b_5)\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left. + \frac{1}{b_3}\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}}\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \qquad (\text{П } 1)$$

$$\beta = \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \frac{1}{b_3}(b_2 + b_4)\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \right.$$

$$- \frac{1}{b_3}(b_1 + b_5)\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} -$$

$$\left. - \frac{1}{b_3}\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}}\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \qquad (\text{П}2)$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{1}{b_3}(b_2 + b_4)\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$+ \frac{1}{b_3}(b_1 + b_5)\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} -$$

$$\left. - \frac{1}{b_3}\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}}\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \qquad (\text{П}3)$$

$$\delta = \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - \frac{1}{b_3}(b_2 + b_4)\left(|2b_3|^p + |b_1 - b_5|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \right.$$

$$- \frac{1}{b_3}(b_1 + b_5)\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left. + \frac{1}{b_3}\left(|2b_3|^p + |b_2 - b_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right). \qquad (\text{П}4)$$

В этом случае $T \geq 0$ означает, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$.

Это есть определение порядка на тензорном произведении $A \otimes A$.

Итак, верна

Теорема 3. Пространство $M_p^2(R)_{sa} \otimes M_p^2(R)_{sa}$ является спектральным пространством с порядковой единицей однородного типа I_4 относительно порядка, определенного указанным выше способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W. Non commutative spectral theory for affine functions on convex sets. // Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.: AMS, 1976. 122 p.
2. Chu C. H., Wright J. D. A theory of types for convex sets and ordered banach spaces. //Proc. London Math. Soc. 1978. Vol. 36. P. 434 – 516.

3. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. State spases of Jordan algebras. // Acta math., 1978, V. 140, N 3 – 4. P. 155 – 190.
4. Б е р д и к у л о в М. А., О д и л о в С. Обобщенные спин-факторы. //Узб. матем. журн., 1995, № 1. С. 12 – 16.
5. А ю п о в Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан, 1986, 124 с.
6. N a m i o k a I., P h e l p s R. R. Tensor products of compact convex sets. // Pacific journal of mathematics. 1969. V. 31. P. 469 – 480.

Институт математики
имени В. И. Романовского

Дата поступления
09. 01. 02

M. A. Berdikulov

AN EXAMPLE OF SPECTRAL ORDER – UNIT SPACE OF THE HOMOGENEOUS TYPE I_4

(Summary)

New definition of a positive definition for real symmetric matrix of 2×2, generalizing usual positive definition is entered. The example of spectral order-unit space of the homogeneous type I_4, showing essential difference, such spaces from JBW-algebras of the same type is constructed.