УДК 517.98, 519.21

М.А.БЕРДИКУЛОВ

УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ НА ПРОСТРАНСТВАХ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

Мақолада тартиб бўйича бирлик элементи бор фазолардаги шартли кутилмалар ўрганилган ва бундай фазоларнинг бир синфи – умумлашган спин-факторлар учун шартли кутилманинг мавжуд булиш шартлари топилган.

Условные ожидания на алгебрах фон Неймана и на JBW-алгебрах изучены многими авторами [1—3]. Так как пространства с порядковой единицей являются обобщением этих пространств, то, естественно, ставится задача: изучить условные ожидания на пространствах с порядковой единицей.

Пространство с порядковой единицей представляет собой некоторую статистическую модель [4], как пространство аффинных функций на пространстве состояний и их теория в последнее время быстро развивается. В классической модели пространством состояний является симплекс, а в общем случае пространство состояний — произвольное выпуклое множество в некотором локально выпуклом пространстве.

Элементы пространства с порядковой единицей, как правило, истолковываются как пространство наблюдаемых некоторой физической системы.

Предварительные сведения. Пусть A — действительное линейное, упорядоченное пространство. Через A^+ обозначим множество положительных элементов A. Элемент $e\in A^+$ называется порядковой единицей, если для каждого $a\in A^+$ существует число $\lambda\in R^+$ такое, что $-\lambda e\leq a\leq\lambda e$. Если порядок архимедов, то отображение $a\to\|a\|=\inf\{\lambda>0:-\lambda e\leq a\leq\lambda e\}$ является нормой. В случае, когда A — банахово пространство относительно этой нормы, говорят, что (A,e) — пространство с порядковой единицей e [5].

В дальнейшем под проектором в пространстве с порядковой единицей A будем понимать линейное, положительное, слабо* непрерывное отображение $R:A\to A$, удовлетворяющее условию $R^2=R$.

Проектор R называется гладким, если условие

$$\rho\in V^+,\ \langle a,\rho\rangle=0 \text{ при } a\in\ker^+R=A^+\cap\ker^+R$$

влечет $\langle a,\rho\rangle=0$ при $a\in\ker R$.

Проектор Q называется квазидополнением проектора R [5], если

$$\ker^+R=\mathrm{im}^+Q,\ \mathrm{im}^+R^+Q.$$

Проектор R называется P-проектором, если он по норме не превосходит 1, гладкий и обладает гладким квазидополнением с нормой, не превосходящей 1.

Заметим, что гладкое квазидополнение к P-проектору R всегда единственно и в дальнейшем будем обозначать его через R'.

Элементы множества $U=\{u=\mathrm{Re}:R\text{-произвольный } P\text{-проектор в } A\}$ называются проективными единицами.

Основные результаты. Пусть (A,e) – пространство с порядковой единицей, B — его подпространство, являющееся пространством с порядковой единицей, содержащей e.

Определение 1. Линейное отображение $E:A\to B$ назовем условным ожиданием относительно B, если:

1. $E(e)=e$;
2. $a\geq0\Rightarrow E(a)\geq0$;
3. $E(Ra)=R(Ea)$ для всех P-проекторов R в A таких, что $\mathrm{Re}\in B$ и $a\in A$.

Нетрудно показать, что $\|E\|=1$.

На самом деле, пусть $a\in A$ и $\|a\|\le 1$, т.е. $-e\le a\le e$. Тогда в силу положительности E имеем, что $E(a+e)\ge 0$ и $E(e-a)\ge 0$. Так как E линейное и $E(e)=e$, то последние неравенства означают $-e\le E(a)\le e$. Следовательно, $\|E\|\le 1$. Но $E(e)=e$. Поэтому $\|E\|=1$.

Из определения 1 вытекает, что E идемпотентное отображение, т.е. $E(E(a))=E(a)$ для всех $a\in A$.

Действительно, если $u\in B$ – некоторая проективная единица, то $u=\mathrm{Re}$ для некоторого P-проектора R, и в силу условия 3 определения 1 $E(u)=E(\mathrm{Re})=R(Ee)=\mathrm{Re}=u$. Далее пусть $a=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i\in B$. Тогда, очевидно, что $u_i\in B$ и $E(a)=\sum_{i=1}^{k}E\lambda_i u_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i=a$. Значит, $E(a)=a$ для всех $a\in B$. Так как $E(a)\in B$ для любого $a\in A$, то $E(E(a))=E(a)$.

Как сказано выше, примером для пространств с порядковой единицей является JBW-алгебра. Известно, что условные ожидания на JBW-алгебрах определены следующим образом [3].

Пусть A – JBW-алгебра с единицей 1, A_1 – ее JBW-подалгебра, содержащая 1.

Определение 2. Линейное отображение $E:A\to A_1$ называется условным ожиданием относительно A_1, если:

1. $E(1)=1$;
2. $x\ge 0\Rightarrow E(x)\ge 0\ \forall x\in A$;
3. $E(ax)=AE(x)\ \forall x\in A,\ \forall x\in A_1$.

Это определение согласуется с определением 1, т.е. условное ожидание на JBW-алгебрах можно определить, как в определении 1.

На самом деле, в определениях 1 и 2 первые два условия одинаковы, поэтому проверим эквивалентность условий 3 в обоих определениях.

Пусть p — произвольный идемпотент в JBW-алгебре, соответствующий ему P-проектор R имеет вид: $Rx=U_px$. Очевидно, что $R1=p\in A_1$, и условие 3 в определении 1 в этом случае выглядят как: $E(U_px)=U_p(Ex)$.

2 $\Rightarrow$1. Пусть $E(ax)=aE(x)\ \forall x\in A$ и $\forall x\in A_1$. Так как $U_px=2p(px)-px$, тогда для любого $p\in A_1$ имеем:

$$E(U_px)=E(2p(px)-px)=2E(p(px))-E(px)=2p(pE(x))-pE(x)=U_p(Ex).$$

1$\Rightarrow$2. Пусть $U_p(Ex)=E(U_px)$ (1)

$\forall x\in A$ и для любого $p\in A_1$. Тогда имеем $U_{p'}(Ex)=E(U_{p'}x)\forall x\in A$ и $p'=1-p\in A_1$.

Теперь покажем, что выполнено условие 3 в определении 2.

Известно [6], что имеет место пирсовское разложение

$$x=U_px+2U_{p,p'}x+U_{p'}x$$

для $\forall x\in A$ относительно идемпотента $p\in A$. Поэтому имеем

$$Ex=E(U_px)+E(2U_{p,p'}x)+E(U_{p'}x).$$

С другой стороны, пирсовское разложение для Ex есть

$$Ex=U_p(Ex)+2U_{p,p'}(Ex)+U_{p'}(Ex).$$

Отсюда, учитывая предположение (1), имеем, что

$$2U_{p,p'}(Ex)=E(2U_{p,p'}x). \qquad (2)$$

Так как $U_{p,p'}x=2px-2p(px)$ по определению, то (2) означает, что

$$2p(Ex)-2p(p(Ex))=E(2px-2p(px)),$$

а также равенство (1) означает, что

$$2p(pEx))-pE(x)=E(2p(px)-px).$$

Сложив эти равенства, получим:

$$pE(x)=E(px).$$

Так как линейная оболочка идемпотентов слабо плотна в JBW-подалгебре, а A_1 и E слабо непрерывны, то заключаем, что $a\,E(x)=$ $=E(ax)$. $\forall x\in A$, $\forall a\in A_1$.

В дальнейшем слово подпространство означает пространство с порядковой единицей.

П р и м е р 1. Пусть (A, e) – пространство с порядковой единицей, ρ – некоторое состояние на A. Для $a\in A$ положим

$$E(a)=\rho(a).$$

Тогда E – условное ожидание относительно подпространства $B=\{\lambda e : :\lambda\in R\}$.

П р и м е р 2. Пусть Q некоторый P-проектор в A. Положим $E(a)=Qa+Q'a$ $\forall a\in A$. Тогда E – условное ожидание относительно подпространства $B=\{a\in A: a=Qa+Q'a\}=\mathrm{im}\,Q+\mathrm{im}\,Q'$.

На самом деле, выполнение свойств 1 и 2 в определении 1 вытекает из свойств P-проектора Q. Проверим свойство 3. Пусть $\mathrm{Re}\in B$, т.е. $\mathrm{Re}\in \mathrm{im}\,Q+\mathrm{im}\,Q'$. Это означает, что R и Q совместны, т.е. $RQ=QR$ и $RQ'=Q'R$ (см. [5] 5.26). Следовательно, $\mathrm{Re}(a)=E(Ra)$.

Состояние τ на A называется следом, если $\tau(a)=\tau(Ra)+\tau(R'a)$; $\forall a\in A$ и P-проектора R.

Пусть ρ – некоторое состояние на A и $B\subset A$ – подпространство A, E – условное ожидание относительно B.

Определение 3. Если $\rho(Ea)=\rho(a)$ для всех $a\in A$, то говорят, что E сохраняет ρ.

Очевидно, что в примере 2 условное ожидание E сохраняет след, а в примере 1 — состояние ρ.

Актуальным является вопрос – при каких условиях существует условное ожидание относительно данного подпространства? В общем случае вопрос пока остается открытым. Здесь задача решается для одного класса пространств с порядковой единицей — обобщенных спин-факторов.

Пусть X – рефлексивное банахово пространство, единичный шар которого гладкое, строго выпуклое множество, т.е. собственными гранями X_1^* являются только множество вида $\{\sigma\}$, где σ – экстремальная точка X_1^* и для каждого $\sigma\in\partial e X_1^*$ существует единственный элемент $x\in\partial e X_1$ такой, что $\sigma(x)=1$.

Рассмотрим пространства $A=R+X$ и $V=R+X^*$. Порядок и норма на A (на V) определяются следующим образом:

$$a=\alpha+x\geq 0\Leftrightarrow\alpha\geq 0\ (\rho=\beta+\xi\geq 0\Leftrightarrow\beta\geq\|\xi\|),$$

$$\|a\|=|\alpha|+\|x\|,\ (\|\rho\|=\max(|\beta|,\|\xi\|))$$

для $a\in A$, $\rho\in V$ соответственно.

После таких обозначений и определений A становится пространством с порядковой единицей, а V – пространством с базовой нормой, которые будут находиться в отделимой, порядковой и нормированной двойственности относительно формы:

$$<a,\rho>=\alpha\beta+\xi(x), \tag{3}$$

где ξ – ограниченный линейный функционал на X.

Пространства с порядковой единицей такой конструкции называют обобщенными спин-факторами [7].

След τ на обобщенных спин-факторах определяется следующим образом: $\tau(\alpha+x)=\alpha$.

Так как единичный шар X – гладкое, сторого выпуклое множество, то элементы вида $u=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_0$, где $x_0\in X$, $\|x_0\|=1$, являются проективными единицами, а P-проектор – R, соответствующий u, имеет вид: $Ra=<a,\hat{u}>u$, где $\hat{u}$ – непрерывный линейный функционал на A со свойствами: $<u, \hat{u}>=1$, $\|\hat{u}\|=1$.

Пусть $A=R+X$ – обобщенный спин-фактор. $B\subset A$ – произвольное подпространство A. Нетрудно показать, что произвольное подпространство B имеет вид: $B=R+X_0$, где X_0 – некоторое подпространство X.

Теорема 1. В A существует сохраняющее след условное ожидание относительно В тогда и только тогда, когда существует проектор T из X в X_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть существует условное ожидание E, сохраняющее след относительно $B=R+X_0$. Для произвольного $a=\alpha+x\in A$, условное ожидание A и B имеет вид:

$$E\,a=\alpha+Tx. \tag{4}$$

Здесь T – проектор из X в X_0.

На самом деле, пусть $E\,a=\alpha+f(x)+Tx$ для некоторого функционала f на X и линейного отображения $T:X\to X_0$. Берем $u\in B$ и пусть u=Re. Так как $Eu=u$, то условие $ERa=REa$ означает, что $<a,\hat{u}>u=<E\,a,\hat{u}>u$, т.е. $<a,\hat{u}>=<E\,a,\hat{u}>$.

Так как проективная единица u имеет вид:

$u=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_0$ $x_0\in X_0$, $\|x_0\|=1$ и ей соответствует состояние $\hat{u}=1+\xi_0$ в B^*, $\xi_0\in X_0^*$, $\|\xi_0\|=1$, $<\xi_0,x_0>=1$, то имеем

$$<a,\ \hat{u}>=<\alpha+x,1+\varepsilon_0>=\alpha+\xi_0(x),$$

$$<Ea,\ \hat{u}>=<\alpha+f(x)+Tx,\ 1+\xi_0>=\alpha+f(x)+\xi_0(Tx).$$

Отсюда заключаем, что $f(x)=0$ для всех $x\in X$. Значит, $Ea=\alpha+Tx$. В силу идемпотентности E, имеем $\alpha+Tx=Ea=E^2a=E(\alpha+Tx)=\alpha+T^2x$.

Из этого следует, что $T^2x=Tx$. Значит, T тоже является идемпотентным.

Покажем, что $\|T\|\le 1$.

Пусть $a=\alpha+x\ge 0$, т.е. $\alpha\ge\|x\|$, тогда $E(a)=\alpha+Tx\ge 0$, т.е. $\alpha\ge\|Tx\|$. Отсюда $\left\|T\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)\right\|\le 1$. Так как $\left\|\dfrac{x}{\alpha}\right\|\le 1$, то $\|T\|\le 1$ в силу произвольности x и α.

Следовательно, T – проектор.

Достаточность. Если существует проектор T из X в X_0, то $E(\alpha+x)=$ $=\alpha+Tx$ – условное ожидание относительно B.

Проверим выполнение условий 1 – 3 в определении 1.

Действительно, выполнение условия 1 очевидно, так как $e=1+0$ в обобщенных спин-факторах.

2. Пусть $a=\alpha+x\geq 0$, т.е. $\alpha\geq\|x\|$. Так как $\|T\|\leq 1$, то $\|Tx\|\leq\|x\|$. Поэтому $\|Tx\|\leq\alpha$. Это означает, что $E(\alpha+x)=\alpha+Tx\geq 0$.

3. Пусть $u=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_0\in B$ и ей соответствует состояние $\hat{u}=1+\xi_0$ в B^*, $\xi_0\in X_0^*$. Тогда

$$ERa=<a,\ \hat{u}>u=<\alpha+x,1+\xi_0>u=(\alpha+\xi_0(x))u,$$
$$REa=<Ea,\ \hat{u}>u=<\alpha+Tx,\ 1+\xi_0>u=(\alpha+\xi_0(Tx))u.$$

Так как T – проектор из X в X_0, то T^* – проектор из X_0^* в X. Это означает, что $\xi_0(Tx)=\xi_0(x)$ для всех $x\in X$, $\xi_0\in X_0^*$. Поэтому имеем, что $REa=ERa$.

Сохранение следа через E вытекает из определения следа. Теорема доказана.

Аналогичная теорема в случае, когда A – JBW-алгебра доказана в [8].

Теорема 2. Пусть $A=R+X$ – обобщенный спин-фактор, $\rho=1+\xi_0$ – состояние на A. $B=R+X_0$ – его подпространство. Для того чтобы существовало сохраняющее ρ условное ожидание $E:A\to B$, необходимо и достаточно, чтобы $T^*\xi_0=\xi_0$, где T – проектор из теоремы 1.

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 1 существует условное ожидание относительно B и имеет вид: $E(\alpha+x)=\alpha+Tx$, где T – проектор из X на X_0.

Далее, достаточно проверить сохраняемость ρ относительно E:

$$\rho\ (E\alpha)=<\rho,\ E(\alpha+x)>=<\rho,\alpha+Tx>=\alpha+\xi_0(Tx),$$
$$\rho(a)=<\rho,\alpha+x>=\alpha+\xi_0(x).$$

Если E сохраняет состояние ρ, то

$$\xi_0(Tx)=\xi_0(x),\ \text{т.е.} <T^*\xi_0,\ x>=<\xi_0,\ x>\forall x\in X.$$

Следовательно, $T^*\xi_0=\xi_0$. Достаточность вытекает из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $A=R+X$ – обобщенный спин-фактор, $\rho=1+\xi_0$ – состояние на A и $B=R(A)+R'(A)$ для некоторого P-проектора R. Тогда существует сохраняющее ρ условное ожидание относительно $B\Leftrightarrow\rho=\hat{u}$, где $u=\mathrm{R}e$.

В банаховых пространствах проектор на произвольное подпространство не всегда существует [9].

Следствие 2. Пусть $A=R+X$ – обобщенный спин-фактор. Относительно произвольного подпространства A существует условное ожидание, тогда и только тогда, когда X – гильбертово пространство.

ЛИТЕРАТУРА

1. U m e g a k i H. Conditional expectation in an operator algebra. //П. Tohoku Math. J.8 (1956). P. 86—100.

2. T a k e s a k i M. Conditional expectations in von Neumann algebras. //Funct. Anal., 1972. V.9. P.306–321.

3. А ю п о в Ш. А. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах. //Докл.АН УзССР, 1981, № 10. С. 3—5.
4. Х о л е в о А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980. 320 с.
5. A l f s e n E. M., S h u l t z F. W. Non commutative spectral theory for affine functions on convex sets. //Mem.Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.: AMS, 1976. 122 p.
6. Ж е в л а к о в К. А., С л и н ь к о А. М., Ш е с т а к о в И. П., Ш и р ш о в А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 432 с.
7. Б е р д и к у л о в М. А. Пространства с порядковой единицей однородного типа . //Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. № 4, 1990.
8. А ю п о в Ш. А., Б е р д и к у л о в М. А., А з и з о в Э. Ю. //Условные ожидания на спин-факторах //Узб.мат.журн., № 3, 1991.
9. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Институт математики
имени В.И. Романовского

Дата поступления
25.11.02

M.A.Berdikulov

Conditional expectations in order—unit spaces

(Summary)

In this paper we study conditional expectations on order-unit spaces and conditions of existence of conditional expectations for generalized spin-factors are found.