УДК 517.98+519.21

М. А. БЕРДИКУЛОВ, Э. Ю. АЗИЗОВ

УСЛОВНЫЕ ОЖИДАНИЯ НА JBW-АЛГЕБРАХ

В статье выделен класс состояний на JBW-алгебре A, связанных с данной JWB-подалгеброй $B \subset A$, которой назван B-следовым пространством. Установлено взаимно-однозначное соответствие между B-ожиданиями и B-следовыми состояниями, а также выявлена связь между произвольными B-ожиданиями и каноническим условным ожиданием $M(\cdot|B)$, построенным по следу. Найдены условия на B, при которых B-ожидание единственно.

В частном случае, когда JBW-алгебра является эрмитовой частью W^*-алгебры, результаты работы являются аналогами результатов [1].

I. Вспомогательные результаты. Пусть A — JBW-алгебра [2] с точным нормальным конечным следом τ [3]. Пусть $\hat{A}$ — OJ-алгебра измеримых элементов относительно A [3].

Лемма 1. Для любых $a, b \in \hat{A}$ эквивалентны условия:

1) $a(ab) = a^2 b$;

2) $a \leftrightarrow b$.

Здесь $a \leftrightarrow b$ означает совместность элементов a и b [3, 4].

Доказательство. Так как $\hat{A} = E(A_{sp}) \oplus S(X, M_3^8)$ [3], где $E(A_{sp})$ — алгебра измеримых элементов, присоединенных к JW-алгебре A_{sp} [3], $S(X, M_3^8)$ — алгебра допустимых отображений гиперстоуновского компакта X в M_3^8, то лемму достаточно доказать для каждого случая отдельно.

Случай 1. В силу теоремы 1 [5] и замечания 2.2 [6] можно считать, что след τ продолжается до точного нормального конечного следа τ_1 на обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{U}(A_{sp})$. Алгебра $E(A_{sp})$ лежит в эрмитовой части $*$-алгебры $E(\mathcal{U}(A_{sp}))$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{U}(A_{sp})$ [3]. Поэтому доказательство леммы вытекает из теоремы 3 в [4, с. 187].

Случай 2. Алгебраические операции в $S\left(X, M_3^8\right)$ вводятся поточечно, и доказательство леммы редуцируется к случаю M_3^8. В [7] утверждение леммы доказано для произвольных JBW-алгебр, в частности, для M_3^8. Лемма доказана.

Теорема 1 [8]. Пусть φ, ψ — нормальные положительные функционалы на A и $\psi \leqslant \varphi$ (т. е. $\psi(x) \leqslant \varphi(x) \, \forall x \in A^+$). Тогда существует элемент $d_0 \in A$, $0 \leqslant d_0 \leqslant 1$, такой, что $\psi(x) = \varphi(d_0 x) \, \forall x \in A$.

Пусть B — JBW-подалгебра A.

Определение 1. Линейное отображение $\Phi : A \to B$ назовем условным ожиданием относительно B, если:

1) $a \geqslant 0 \Rightarrow \Phi(a) \geqslant 0$;

2) $\Phi(ab) = \Phi(a) b$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

Условное ожидание Φ назовем нормальным (или B-ожиданием), если для любой сети $\{a_\alpha\}$:

$$a_\alpha \nearrow a \Rightarrow \Phi(a_\alpha) \nearrow \Phi(a).$$

Через $L_1(A, \tau)$ и $L_2(A, \tau)$ (соотв. $L_1(B, \tau)$ и $L_2(B, \tau)$) обозначим пространства L_1 и L_2, построенные по следу τ на A (соотв. на B) [3].

2. Основные результаты. Пусть A — JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ, B — JBW-подалгебра A. Множество точных нормальных состояний σ на A, со свойством

$$\sigma(a(bc)) = \sigma((ab)c),$$

для $a \in A$, $b, c \in B$, обозначим через S_B и будем называть B-следовым пространством.

Очевидно, B-следовое пространство содержит пространство всех нормальных следов и является слабо замкнутым выпуклым множеством в предсопряженном пространстве N.

Введем множество $B^c = \{a \in A \mid a \leftrightarrow b, \ \forall b \in B\}$.

Уточнением теоремы Радона—Никодима для состояний из S_B является следующий результат, в котором выясняются свойства производной Радона—Никодима в следствии теоремы 4.3 [3].

Лемма 2. Для любого $\sigma \in S_B$ существует $d_\sigma \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$, такой, что $\sigma(a) = \tau(d_\sigma a)$ для всех $a \in A$. Обратно, для любого $t \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$ с $\|t\|_1 = 1$, $\sigma(a) = \tau(ta)$ и $\sigma \in S_B$.

Доказательство. В силу следствия теоремы 4.3 [3], существует $d \in L_1(A, \tau)$, $d \geqslant 0$, такой, что $\sigma(a) = \tau(da)$. Покажем, что $d \in L_1\left(B^c, \tau\right)$.

Пусть $a \in A$, $b \in B$, тогда

$$\tau(d(ab^2)) = \sigma(ab^2) = \sigma((ab)b) = \tau\left(d((ab)b)\right).$$

Следовательно, $\tau((db^2)a) = \tau(((db)b)a)$, т. е. $\tau((db^2 - (db)b)a) = 0$ для всех $a \in A$. Отсюда $db^2 = (db)b$, значит, $d \leftrightarrow b$ в силу леммы 1.

Обратно, пусть $t \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$ с $\|t\|_1 = 1$ и $\sigma(a) = \tau(ta)$. Для $a \in A$ $b, c \in B$ имеем

$$\sigma(a(bc)) = \tau(t(a(bc))) = \tau((ta)(bc)) = \tau(((ta)b)c) = \tau((t(ab))c) =$$
$$= \tau(t((ab))c)) = \sigma((ab)c).$$

Отсюд а,$\sigma \in S_B$. Лемма доказана.

Теорема 2. Каждому состоянию $\sigma \in S_B$ соответствует B-ожидание $\Phi_\sigma : A \to B$, такое, что, для $a \in A$, $b \in B$

$$\sigma(ab) = \sigma\left(\Phi_\sigma(a)\, b\right). \qquad (\ast)$$

Отображение Φ_σ единственным образом определяется состоянием σ и равенством $(\ast)$. При этом $\|\Phi_\sigma(a)\| \leqslant \|a\|$.

Обратно, для любого B-ожидания Φ существует состояние $\sigma \in S_B$, такое, что $\Phi = \Phi_\sigma$.

Доказательство. Пусть $f_a(b) = \sigma(ab)$ для $a \in A$, $b \in B$. В силу [2] f_a является нормальным функционалом на B. Причем f_a положителен, если $a \geqslant 0$.

Пусть $a \in A^+$, $b \in B^+$, тогда $b = b_1^2$ для некоторого $b_1 \in B$.

Имеем

$$f_a(b) = \sigma(ab) = \sigma\left(ab_1^2\right) = \sigma\left(U_{b_1}a\right) \leqslant \|a\|\,\sigma\left(U_{b_1}1\right) = \|a\|\,\sigma\left(b_1^2\right) = \|a\|\,\sigma(b),$$

где

$$U_{b_1}a = 2b_1(b_1 a) - b_1^2 a.$$

По теореме 1 существует положительный элемент $a' \in B$, $0 \leqslant a' \leqslant \|a\| 1$ такой, что $f_a(b) = \sigma(a'b)$, т. е. $\sigma(ab) = \sigma(a'b)$.

Определим $\hat{\Phi}_\sigma(a) = a'$. Для произвольного $a \in A$ положим $\Phi_\sigma(a) = \hat{\Phi}_\sigma(a_+) - \hat{\Phi}_\sigma(a_-)$, где a_+, a_- — соответственно положительная и отрицательная части элемента a [4 с. 143].

Очевидно, отображение $\Phi_\sigma : A \to B$ линейно.

По построению Φ_σ является положительным и в силу теоремы 1 выполняется неравенство $\|\Phi_\sigma(a)\| \leqslant \|a\|$.

По теореме 2.1 [9] линейное идемпотентное отображение Φ_σ обладает свойством $\Phi_\sigma(ab) = \Phi_\sigma(a)\, b$ для $a \in A$, $b \in B$.

Пусть $\{a_\alpha\}$ — сеть в A и $a_\alpha \nearrow a$. Очевидно, что $\sup \Phi_\sigma(a_\alpha) \leqslant \Phi_\sigma(\sup a_\alpha)$, Так как σ нормально, то

$$\sigma\left(\Phi_\sigma(a)\right) = \sigma(a) = \sigma\left(\sup a_\alpha\right) = \sup \sigma\left(a_\alpha\right) =$$
$$= \sup \sigma\left(\Phi_\sigma\left(a_\alpha\right)\right) = \sigma\left(\sup \Phi_\sigma(a_\alpha)\right),$$

т. е. $\sigma\left(\Phi_\sigma(a) - \sup \Phi_\sigma(a_\alpha)\right) = 0$. В силу точности σ имеем $\Phi_\sigma(a) = \sup \Phi_\sigma(a_\alpha)$. Значит, Φ_σ является B-ожиданием.

Единственность Φ_σ: пусть Φ — некоторое B-ожидание, отличное от Φ_σ. Тогда $\sigma(\Phi(a)\, b) = \sigma(ab) = \sigma\left(\Phi_\sigma(a)\, b\right)$ для $a \in A$, $b \in B$, т. е. $\sigma\left(\left(\Phi(a) - \Phi_\sigma(a)\right) b\right) = 0$. Положив $b = \Phi(a) - \Phi_\sigma(a)$, получаем $\sigma\left(\left(\Phi(a) - \Phi_\sigma(a)\right)^2\right) = 0$. В силу точности σ $\Phi(a) = \Phi_\sigma(a)$ для всех $a \in A$.

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть Φ — произвольное B-ожидание. Положим $\sigma(a) = \tau(\Phi(a))$, тогда

$$\sigma(a(bc)) = \tau(\Phi(a(bc))) = \tau(\Phi(a)(bc)) = \tau((\Phi(a)\, b)\, c) = \tau(\Phi(ab)\, c) =$$
$$= \tau(\Phi((ab)\, c)) = \sigma((ab)\, c)$$

для $a \in A$, $b, c \in B$. Значит, $\sigma \in S_B$, Теорема доказана.

Следующий результат является аналогом теоремы Радона—Никодима для условных ожиданий и устанавливает связь между произвольными B-ожиданиями и каноническим условным ожиданием $M(\cdot|B)$ относительно B, построенным по следу τ [10].

Теорема 3. Для любого B-ожидания Φ, существует единственный элемент $t_\Phi \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$, такой, что $\Phi(a) = M\left(t_\Phi a | B\right)$ для всех $a \in A$.

Обратно, для любого $t \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$ с $M(t|B) = 1$, отображение Φ, определенное равенством $\Phi(a) = M(ta|B)$, является B-ожиданием. Соответствие $\Phi \leftrightarrow t_\Phi$ взаимно-однозначно между множеством всех B-ожиданий и множеством

$$\left\{t \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+ \,|\, M(t|B) = 1\right\}.$$

Доказательство. Пусть Φ — B-ожидание. Положим $\sigma(a) = \tau(\Phi(a))$. Тогда, как и в теореме 2, $\sigma \in S_B$. По лемме 2 существует элемент $d_\sigma \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$, такой, что $\sigma(a) = \tau\left(d_\sigma a\right)$ для всех $a \in A$.

Более того, для $b \in B$ получим

$$\tau(\Phi(a)\, b) = \tau(\Phi(ab)) = \sigma(ab) = \tau\left(d_\sigma (ab)\right) =$$
$$= \tau\left(\left(d_\sigma a\right) b\right) = \tau\left(M\left(d_\sigma a | B\right) b\right).$$

Отсюда следует, что $\Phi(a) = M\left(d_\sigma a | B\right)$ для $a \in A$. Значит, в этом случае $t_\Phi = d_\sigma$.

Единственность t_Φ: если $t_1, t_2 \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$, такие, что $\Phi(a) = M(t_1 a|B)$, $\Phi(a) = M(t_2 a|B)$ для всех $a \in A$, то

$$\tau(t_1 a) = \tau(M(t_1 a|B)) = \tau(M(t_2 a|B)) = \tau(t_2 a).$$

Отсюда $t_1 = t_2$.

Докажем обратное утверждение теоремы. Для $z \in L_2\left(B^c, \tau\right)$ и $a \in A$ имеем $z \leftrightarrow a$, тогда

$$M(z(za)|B) = M(z^2 a|B) = M\left(U_z a | B\right).$$

Поэтому для $t \in L_1\left(B^c, \tau\right)^+$, $t = t_1^2$, где $t_1 \in L_2\left(B^c, \tau\right)$, имеем

$$M(ta|B) = M\left(t_1^2 a | B\right) = M\left(U_{t_1} a | B\right) \geqslant 0,$$

когда $a \geqslant 0$.

Следовательно, отображение Φ, определенное как $\Phi(a) = M\left(ta|B\right)$ с $t \in L_1\left(B_1^c(\tau)\right)^+$, $M(t|B) = 1$ является B-ожиданием, так как $\Phi(b) = M(tb|B) = M(t|B)\, b = b$ для всех $b \in B$. Теорема доказана.

Определение 2. Пусть B — JBW-подалгебра A. И пусть $S_0 \subset K$, где K — множество всех точных нормальных состояний на A. Будем говорить, что B достаточно для S_0, если $S_0 \subset S_B$ и для каждого $a \in A$ существует $a' \in B$ такой, что $\Phi_\sigma(a) = a'$ для всех $\sigma \in S_0$.

Теорема 4. Эквивалентны условия:

(i) B достаточно для S_B;

(ii) $B^c \subset B$;

(iii) B-ожидание единственно.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Для $b_1 \in B^c$, $b_1 \geqslant 0$, положим $b = \frac{1}{\tau(b_1+1)}(b_1+1)$, $\sigma(a) = \tau(ba)\ \forall a \in A$. Тогда $\sigma \in S_B$. По условию

(i) $\Phi_\sigma = \Phi_\tau = M(\cdot\,|\,B)$ для всех $\sigma \in S_B$. Отсюда $b = d_\sigma = M(d_\sigma\,|\,B)$. Значит, $b \in B$. Следовательно, $b_1 \in B$ и $(B^c)^+ \subset B$. Так как $B^c = (B^c)^+ - (B^c)^+$, то $B^c \subset B$.

$(ii) => (iii)$. Пусть Φ — некоторое B-ожидание. Положим $\sigma(a) = \tau(\Phi(a))$, тогда $\sigma \in S_B$. В силу теоремы 3 $\Phi(a) = M(t_\sigma a\,|\,B)$ для $t_\sigma \in L_1(B^c, \tau)^+$ с $M(t_\sigma\,|\,B) = 1$ и в силу (ii) t_σ принадлежит $L_1(B, \tau)$. Значит, $t_\sigma = 1$ и $\Phi(a) = M(t_\sigma a\,|\,B) = M(a\,|\,B)$ для любого $a \in A$, т. е. B-ожидание единственно.

$(iii) => (i)$. Вытекает из теоремы 2 и определения 2. Теорема доказана.

Следствие. Пусть B — максимальная сильно ассоциативная подалгебра JBW-алгебры A. Тогда B-ожидание единственно.

Доказательство следует из теоремы 4, так как $B^c = B$ для любых максимальных сильно ассоциативных подалгебр A [4 с. 137].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Umegaki H.//Kodai Math. Sem. Rep. 1959 Vol. 11. P. 51—64. 2. Shultz F W.//J. Funct. Analysis. 1979. Vol. 31, No 3. P. 360—376. 3. Аюпов Ш. А.// Изв. АН СССР, 1983. Т. 47, № 1. С. 3—25. 4. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.//Упорядоченные алгебры. Ташкент: ФАН. 1983. 304 с. 5. Ajupov Sh. A.//Math. Z. 1982. V. 181. P. 253—268. 6. Ajupov Sh. A., Abdullaev R. Z.//Math. Z. 1985. Vol. 188. P. 457—484. 7. Boyadjiev H. N., Voungson M. A.//Compt. rend. de l'Acad. Bulg. des Scien. tome 33, 1980. N. 12. P. 1589—1590. 8 Аюпов Ш. А.//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. № 3. С. 3—4. 9. Бердикулов М. А.//Характеризация условных и тематических ожиданий на йордановых алгебрах/Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 1821—83. 14 с. 10. Аюпов Ш. А.//Докл. АН УзССР. 1981. № 10. С. 3—5.

Институт математики имени В. И. Романовского
АН УзССР

Дата поступления
15. 04. 1985 г.