М. А. БЕРДИКУЛОВ, К. Р. КОДИРОВ

OJ-АЛГЕБРА ИЗМЕРИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО СУБАДДИТИВНОЙ МЕРЫ

(Представлено акад. АН РУз Ш. А. Аюповым)

Пусть A — JBW-алгебра, ∇ — множество идемпотентов A.

Определение 1 [1]. Отображение $m: \nabla \to [0, \infty]$ называется субаддитивной мерой на A, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$1)\ m(\theta)=0,\quad m(p)=0 \Rightarrow p=\theta;\quad 2)\ p \leqslant q \Rightarrow m(p) \leqslant m(q);$$

$$3)\ p \sim q \Rightarrow m(p)=m(q);\quad 4)\ m(p v q) \leqslant m(p)+m(q);$$

$$5)\ p_n \uparrow p \Rightarrow m(p_n) \Rightarrow m(q).$$

Конечность и полуконечность субаддитивных мер определяются как обычно.

Примеры. 1. Следы на A являются субаддитивными мерами.

2. Пусть τ — след на A, γ — непрерывное отображение R в R со свойствами: $\gamma(0)=0$, $\gamma(x) \leqslant \gamma(y)$ при $x \leqslant y$ и $\gamma(x+y) \leqslant \gamma(x)+\gamma(y)$ для всех $x, y \in R_+$. Тогда $m(x)=\gamma(\tau(x))$ — субаддитивная мера на A.

Замечание 1. Как отмечалось в работе [2], основные субаддитивные меры имеют вид, как в примере 2.

2. Типы JBW-алгебр не связаны с конечностью или полуконечностью субаддитивных мер. Например, если JBW-алгебра имеет тип I_∞ с полуконечным следом τ, то, положив $m(x)=\dfrac{\tau(x)}{1+\tau(x)}$, получим конечную субаддитивную меру.

Пусть A — конечная JBW-алгебра, τ — точный нормальный конечный след на A с условием $\tau(1)=1$. Пусть m — субаддитивная мера на A вида $m(x)=\gamma(\tau(x))$, N — пространство нормальных функционалов на A.

Лемма 1. *Множество*

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{g \in N\colon -nm \leqslant g \leqslant nm \text{ на } \nabla\}$$

плотно в банаховом пространстве N, где $g \leqslant nm$ на ∇ означает, что $g(e) \leqslant nm(e)$ для любого $e \in \nabla$.

Доказательство. Если S не плотно в N, то существует непрерывный линейный функционал x_0 на N, такой, что $x_0 \neq 0$, $g(x_0)=0$ для всех $g \in S$. Так как $g(x_0)=0$ равносильно равенству $g(r(x_0))=0$, где $r(x_0)$ — носитель элемента x_0, то достаточно доказать, что $r(x_0)=0$. Имея $\tau \leqslant m$ на ∇, находим, что $\tau_e^1(x)=\tau(ex)$ также принадлежит множеству S. По условию $g(r(x_0))=0$ для любого $g \in S$ и, в частности, $\tau_e(r(x_0))=0$, $\forall e \in \nabla$. Положив $e=r(x_0)$, будем иметь

$\tau(r(x_0))=0$. В силу точности τ заключаем, что $r(x_0)=0$. Это означает, что $x_0=0$. Следовательно, $x_0=0$. Лемма доказана.

Пусть A — JBW-алгебра, ∇ — множество идемпотентов A, m — конечная субаддитивная мера на A.

Определение 2 [1]. Топологией сходимости по мере m на JBW-алгебре назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образует множества вида

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in A: \exists\ p \in \nabla, \ \|U_p a\| \leqslant \varepsilon, \ m(p^1) \leqslant \delta\}$$

$$\text{для всех } \varepsilon, \delta > 0.$$

Топологию сходимости по мере обозначим через t.

Следующие две теоремы доказаны [3] для случая, когда субаддитивная мера есть след.

Теорема 1. Если последовательность элементов $\{x_n\} \simeq A$ t-сходится к нулю и ограничена на норме ($\|x_n\| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$), то она $*$-слабо сходится к нулю в A.

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{t} x$, т. е. для любого ε, $\delta>0$ существует номер n_0, такой, что $x_n \in N(\varepsilon, \delta)$ при $n \geqslant n_0$. Это означает, что существует последовательность $\{e_n\} \simeq \nabla$, такая, что $m\left(e_n^1\right) \leqslant \delta$, $\left\|U_{e_n} x_n\right\| \leqslant \varepsilon$, $n \geqslant n_0$.

Нужно показать, что $x_0 \to \theta$ $*$-слабо, т. е. $g(x_n) \to 0$ для любого нормального состояния $g \in N$. Пусть сначала $g \in S$ (см. лемму 1), т. е. $g\left(e_n^1\right) \leqslant k_0 m\left(e_n^1\right)$ при некотором натуральном k_0. Имеем

$$g(x_n) = g\left(U_{e_n} x_n\right) + 2g\left(U_{e_n, 1-e_n} x_n\right) + \left(U_{1-e_n} x_n\right),$$

причем

$$\left|g\left(U_{e_n} x_n\right)\right| \leqslant \left\|U_{e_n} x_n\right\| g(1) \leqslant \varepsilon g(1).$$

Оценим второе слагаемое. Так как $U_{e_n, 1-e_n} x_n = 2\left(1-e_n\right)\left(e_n x_n\right)$, то в силу неравенства Шварца

$$\left|g\left(U_{e_n, 1-e_n} x_n\right)\right| \leqslant 2\sqrt{g(e^1)\, g\left(e_n x_n\right)^2)} \leqslant 2\sqrt{g(e^1)}\sqrt{\left\|e_n x_n\right\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{k_0 m(e^1)}\left\|x_n\right\| \leqslant 2\sqrt{k_0}\sqrt{\delta}.$$

Учитывая равенство $U_{1-e_n} x_n = \left(1-e_n\right)\left(x_n - 2e_n x_n\right)$, в итоге получаем $g\left(x_n\right) \to 0$.

Пусть теперь $f \in N$ — произвольное нормальное состояние. По лемме 1, для любого $\eta>0$ существует $g \in S$, такое, что $\|f-g\| \leqslant \eta$. Тогда если $g(e) \leqslant k_0 m(e)$, то при $n \geqslant n_0$ имеем

$$|f(x_n)| \leqslant |(f-g)\ (x_n)| + |g(x_n)| \leqslant \|f-g\|\,\|x_n\| + |g(x_n)| \leqslant \eta +$$

$$+ \varepsilon + 7\sqrt{k_0}\sqrt{\delta}, \quad \text{т. е. } |f(x_n)| \to 0.$$

Значит, $x_n \to 0$ $*$-слабо. Теорема доказана.

Теорема 2. Единичный шар в JBW-алгебре A полон в равномерности, порожденной топологией t.

Доказательство. $\{x_n\}$ — последовательность Коши в единичном шаре, т. е. $(x_n - x_m) \to 0$ в топологии t при $m, n \to \infty$. Так как $\|x_n - x_m\| \leqslant 2$, то по теореме 1 $(x_n - x_m) \to 0$ $*$-слабо, т. е.

последовательность $\{x_n\}$ $\ast$-слабо фундаментальная. В силу $\ast$-слабой компактности единичного шара в A (теорема Банаха — Алаоглу), в JBW-алгебре A существует элемент x_0 ($\|x_0\| \leqslant 1$), такой, что $x_n \to x_0$ $\ast$-слабо.

Покажем, что $x_n \to x_0$ по мере, т. е. в топологии t. Так как $(x_n - x_m) \xrightarrow{t} 0$ в топологии t при m, $n \to \infty$, то в силу теоремы 2.1, (iv), в [1], $(x_n - x_m)^2 \to \theta$, а по теореме 1 $(x_n - x_m)^2 \to 0$ $\ast$-слабо при m, $n \to \infty$. В частности, $\tau((x_n - x_m)) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Пусть ε, $\delta_1 > 0$ произвольны. Существует номер n_0, такой, что при m, $n \geqslant n_0$

$$\tau((x_n - x_m)^2) \leqslant \varepsilon^2 \delta_1 .$$

Если $m \geqslant n_0$, $n, k \geqslant m$, то по неравенству Шварца

$$\tau((x_n - x_m)\ (x_k - x_m)^2) \leqslant \tau((x_n - x_m)^2)\ \tau((x_k - x_m)^2) \leqslant \varepsilon^4 \delta_1^2 .$$

Так как в JBW-алгебре умножение $\ast$-слабо непрерывно по каждому аргументу ([4], лемма 4.1) и τ нормально, а значит, $\ast$-слабо непрерывно, то, перейдя в последнем неравенстве к $\ast$-слабому пределу сначала по n, затем по k, получим неравенство

$$\tau((x_0 - x_m)^2)^2 \leqslant \varepsilon^4 \delta_1^2 , \text{ т. е. } \tau((x_0 - x_m)^2) \leqslant \varepsilon^2 \delta_1 .$$

Пусть $(x_0 - x_m)^2 = \int\limits_0^\infty \lambda\, de_\lambda$ — спектральное разложение элемента $(x_0 - x_m)^2$. Если $e = e\varepsilon^2$, то, очевидно, имеют место следующие неравенства:

$$(x_0 - x_m)^2 \geqslant \varepsilon^2 e^1 ,$$

$$U_e(x_0 - x_m)^2 = e(x_0 - x_m)^2 \leqslant \varepsilon^2 1. \qquad (\ast)$$

Из первого неравенства имеем $\varepsilon^2 \tau(e^1) \leqslant \tau((x_0 - x_m)^2) \leqslant \varepsilon^2 \delta_1$, т. е. $\tau(e^1) \leqslant \delta_1$. Так как основные субаддитивные меры имеют вид $m(e) = \gamma(\tau(e))$, где γ—выпуклая, справа непрерывная числовая функция и $\gamma(\theta) = 0$, то для любого $\delta > 0$ существует $\delta_1 > 0$, такой, что $\gamma(\delta_1) < \delta$. Следовательно, $m(e^1) = \gamma(\tau(e^1)) \leqslant \gamma(\delta) \leqslant \delta$. Из неравенства ($\ast$) вытекает, что $\|U_e(x_0 - x_m)^2\| \leqslant \varepsilon^2$. Так как $(x_0 - x_m) \longleftrightarrow (x_0 - x_m)^2$ и e является спектральным идемпотентом $(x_0 - x_m)^2$, то $(x_0 - x_m) \longleftrightarrow e$. Поэтому $U_e(x_0 - x_m)^2 = (U_e(x_0 - x_m))^2$. Следовательно, $\|(U_e(x_0 - x_m))^2\| \leqslant \varepsilon^2$, т. е. $\|U_e(x_0 - x_m)\| \leqslant \varepsilon$. Итак, мы показали, что при $m \geqslant n_0$ $(x_0 - x_m) \in N(\varepsilon, \delta)$, т. е. $x_m \xrightarrow{t} x_0$. Теорема доказана.

Пусть теперь A — JBW-алгебра, τ — точный нормальный конечный след. Пусть m — субаддитивная мера на A вида $m(x) = \gamma(\tau(x))$. В [1] изучены свойства топологии сходимости по мере m и пополнение A в топологии t сходимости по мере обозначена через $\hat{A}$ и доказано, что в силу непрерывности операций в A, $(\hat{A}, t)$ является топологической йордановой алгеброй. $\hat{A}$ назван алгеброй измеримых элементов для JBW-алгебры A относительно субаддитивной меры m.

Лемма 2. Множество $\hat{A}^+ = \{\alpha^2;\ \alpha \in \hat{A}\}$ замкнуто относительно топологии t.

Теорема 3. Алгебра $\tilde{A}$ является универсальной OJ-алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

Доказательство. В силу непрерывности в топологии t операции умножения в $\hat{A}$, множество $\hat{A}^+$ всех квадратов элементов из $\hat{A}$ является t-замыканием конуса $A^+=\{\alpha^2,\ \alpha\in A\}$ JBW-алгебры A. Конус $\hat{A}^+$ определяет на $\hat{A}$ частичный порядок, удовлетворяющий, очевидно, аксиомам 1), 2), 4) определения OJ-алгебры из [5] и индуцирующий на A исходный частичный порядок. Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.3 из [3] с использованием результатов этой работы, т. е. теорем 1 и 2.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Каримов А. Қ., Қодиров Қ. Р.//Деп. ГФНТИ ГҚНТ РУз. 2503—96. 17 с.
[2] Каримов А. Қ.//Узб. матем. журн. 1993. № 4. С. 42—47.
[3] Аюпов Ш. А.//Изв. АН СССР. Серия матем. 1983. № 1. С. 3—25.
[4] Alfsen E M., Shultz F. W., Stormer E.//Advances in Math. 1979. Vol. 28. N 1. P. 11—56.
[5] Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. и др.//Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан. 1983. 304 с.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН РУз

Дата поступления
22. 05. 96

М. А. Бердиқулов, Қ. Р. Қодиров

СУБАДДИТИВ ЎЛЧОВГА НИСБАТАН ЎЛЧАНУВЧИ ОПЕРАТОРЛАР OJ-АЛГЕБРАСИ

Мақолада берилган субаддитив ўлчовга нисбатан ўлчанувчи операторларнинг топологик йордан алгебраси универсал OJ-алгебра эканлиги исботланган.

M. A. Berdikulov, K. R. Kodirov

OJ-ALGEBRA OF MEASURABLE OPERATORS RELATIVELY SUBADDITIVE MEASURE

In this paper it is proved, that topological Jordan algebra of measurable operators of relatively subadditive measure is the universal OJ-algebra.