УДК 517.98

М. А. БЕРДИКУЛОВ, С. Т. ОДИЛОВ

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ ОДНОРОДНЫХ ТИПА I_n

Мақолада тузилиши ва хоссалари бўйича I_n типдаги JBW-алгебраларга жуда яқин бўлган тартибланган банах фазолари ўрганилган.

Предварительные сведения и определения. Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей и (V, K) — пространство с базовой нормой, которые находятся в спектральной двойственности [1,2]. Через $U, \mathcal{P}, \mathcal{F}$ обозначим множество всех проективных единиц, всех P-проекторов в A и всех проективных граней K соответственно. Известно, что $U, \mathcal{P}, \mathcal{F}$ являются логиками и попарно изоморфны [1].

Проективная единица $u \in U$ называется атомом, если u — минимальный элемент U; P-проектор R называется центральным, если $R + R' = \mathrm{I}$. Пространство A называется фактором, если оно не содержит центральных P-проекторов, кроме 0 и I. Проективная единица $u \in \mathrm{Re}$ называется абелевой, если $\mathrm{im}R = R(A)$ — векторная решетка. Пространство A с порядковой единицей имеет тип I, если для любого центрального P-проектора R в A $\mathrm{im}R$ содержит абелеву проективную единицу.

Элемент $u \in U$ называется конечным, если он является супремумом конечного числа атомов. Минимальное число атомов, супремум которых равен u, называется размерностью u, т. е. $\dim u = \inf\{k{:}u = \bigvee_{i=1}^{k} u_i,\ u_i$— атомы$\}$. Пространство A имеет тип I_n, если размерность единицы e равна n; A называется пространством с порядковой единицей однородным типа I_n, если e является супремумом только n ортогональных атомов, т. е. если $e = \bigvee_{i=1}^{k} u_i$, u_i— атомы, $u_i \perp u_j$, $i \neq j$, то $k = n$.

Определение 1. Элемент $\tau \in K$ называется следом, если $\tau(Ra + R'a) = \tau(a)$ для всех $a \in A$, $R \in \mathcal{P}$.

Основные результаты. Пусть A — пространство с порядковой единицей однородное типа I_n.

Лемма 1. Пусть $u \in U$ и $\dim uk$, $u = \mathrm{Re}$. Тогда $R(A)$ — подпространство с порядковой единицей однородное типа I_k.

Доказательство. Известно, что $\mathrm{im}R$ и $\mathrm{im}R^*$ находятся в спектральной двойственности [3, 4]. Покажем, что u является супремумом K-ортогональных атомов.

Пусть для некоторого $s > k$ $u = \bigvee_{i=1}^{s} u_i$, u_i— атомы, $u_i \perp u_j$, $i \neq j$. Так как $\dim e = n$, $u \leqslant e$, то e можно разложить на ортогональные атомы таким образом, что первые s атомов совпадают с разложением u. Отсюда $u' = e - u = \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{s} u_i = \sum_{i=s+1}^{n} u_i$. Следовательно, $\dim u' \leqslant n - (s+1) + 1 = n - s$. Далее, так как $s > k$, то

$$n = \dim e = \dim(u \vee u') \leqslant k + (n - s) = n - (s - k) < n.$$

Это — противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $u, v \in U$ такие, что $u \leqslant v$. Тогда

$$\dim(v - u) = \dim v - \dim u.$$

Доказательство. Так как U — ортомодулярная решетка, то существует $h = u' \wedge v = v - u$, такое, что $v = h \vee u$. Из леммы 1 получим, что $\dim v = \dim u + \dim h$.

Лемма 3. Если u — атом и v — произвольная проективная единица, то элемент $u \vee v - v$ является либо нулем, либо атомом.

Доказательство. Напомним что для всех $u, v \in U$ $\dim(u \vee v) \leqslant \dim u + \dim v$. Поэтому, если $\dim v = k$, то размерность элемента $u \vee v$ равна либо k, либо $k+1$. В силу леммы 2 $\dim(u \vee v - v)$ равен либо нулю, либо единице. Это означает, что элемент $u \vee v - v$ либо нуль, либо атом.

Лемма 4. Пусть u, v — различные атомы в A. Если w — проективная единица, отличная от нуля, и $u \vee v$ такая, что $w \leqslant u \vee v$, то w — также атом.

Доказательство. Положим $w_1 = u \vee v - w$. Тогда $u \leqslant u \vee w_1 \leqslant \leqslant u \vee w$. Докажем, что либо $u = u \vee w_1$, либо $u \vee w_1 = u \vee v$.

Пусть ни одно из этих равенств не выполнено. Тогда $0 < u \vee w_1 - u < < u \vee v - u$. Из леммы 3 следует, что это противоречит минимальности $u \vee v - u$. Поэтому либо $u \vee w_1 = u$, либо $u \vee w_1 = u \vee v$. Отсюда вытекает, что элемент w — атом.

В самом деле, пусть $u = u \vee w_1$. Тогда из минимальности u получим, что $u = w_1$. Далее $w = u \vee v - w_1 = u \vee v - u$, и в силу леммы 3 w является минимальным элементом.

Пусть теперь $u \vee w_1 = u \vee v$. Тогда $w = u \vee v - w_1 = u \vee w_1 - w_1$, и w — атом в силу той же леммы 3.

Лемма 5. Если $u, v \in U$, то

$$\dim(u \vee v) = \dim u + \dim v - \dim(u \wedge v).$$

Доказательство. Сначала предположим, что $\dim v = k$ и $\dim u = 1$, т. е. u — атом. Здесь возможны два случая: либо $u \wedge v = u$, либо $u \wedge v = 0$.

Пусть $u \wedge v = 0$. Тогда $\dim(u \vee v) = k + 1$. В самом деле, предположим, что это неверно, т. е. $\dim(u \vee v) = k$. В силу леммы 2 имеем

$$\dim(u \vee v - v) = \dim(u \vee v) - \dim v = k - k = 0.$$

Из леммы 3 следует, что $u \vee v - v = 0$, т. е. $u \vee v = v$ или $u \leqslant v$. Это противоречие, так как $u \wedge v = 0$. Следовательно, $\dim(u \vee v) = k + 1 = = \dim v + \dim u$.

Далее, пусть $u \wedge v = u$. Тогда $\dim(u \vee v) = \dim v = k = k + 1 - 1 = = \dim u + \dim v - \dim(u \wedge v)$.

Пусть теперь $\dim u = s$, $\dim v = k$, т. е. $u = \bigvee_{i=1}^{s} u_i$, $v = \bigvee_{j=1}^{k} v_j$, u_i, v_j — атомы, $u_i \perp u_j (v_i \perp v_j)$, $i \neq j$. Если $u \wedge v = 0$, то $u_i \wedge v = 0$ для всех $i = \overline{1, s}$. Так как u_i — атомы, то в силу предыдущих рассуждений имеем $\dim(u_i \vee v) = k + 1$. Рассмотрим произвольные u_{i_1}, u_{i_2} и покажем, что $\dim(u_{i_1}, \vee u_{i_2} \vee v) = k + 2$. Не ограничивая общности, рассмотрим u_1, u_2. Пусть $\dim(u_1 \vee u_2 \vee v) = k + 1$. В силу леммы 3 заключаем, что либо $u_1 \vee v \geqslant u_2$, либо $u_2 \vee v \geqslant u_1$. Пусть $u_1 \vee v \geqslant u_2$; так как u_2 — атом, то в силу однородности пространства A существуют ортогональные атомы h_1, $h_2 \leqslant \leqslant u_1 \vee v$, $h_i \neq u_2 (u = 1,2)$, такие, что $u_2 \leqslant h_1 \vee h_2$. Если $h_1 \vee h_2 = v_{i_1} \vee v_{i_2}$ для некоторых i_1, i_2, то $u_2 \leqslant v_{i_1} \vee v_{i_2} \leqslant v$. Это противоречит тому, что $v \wedge u_2 = 0$. Далее, если $h_1 \vee h_2 = u_1 \vee v_{i_0}$ для некоторого i_0, то отсюда заключаем, что $v_{i_0} \leqslant u_1 \vee u_2$. В самом деле, так как u_1, u_2, v_{i_0} — три различных атома, $u_2 \leqslant u_1 \vee v_{i_0}$, то $u_2 \vee u_1 \leqslant u_1 \vee v_{i_0}$. По лемме 4, $u_2 \vee u_1 = = u_1 \vee v_{i_0}$. Следовательно, $v_{i_0} \leqslant u_1 \vee u_2$. Это противоречит тому, что $v \wedge (u_1 \vee u_2) = 0$. Значит, $\dim(u_1 \vee u_2 \vee v) = k + 2$. Наконец, аналогичные рассуждения показывают, что $\dim(u \vee v) = \dim u + \dim v$.

Если $u \wedge v = h$ и $h = \bigvee_{j=1}^{t} h_j$, h_j — атомы для всех $j = \overline{1, t}$, то в силу того, что U ортомодулярно, существуют u_0 и v_0, такие, что $u = u_0 \vee h$, $v = = v_0 \vee h$ и $\dim u_0 = s - t$, $\dim v_0 = k - t$. Далее $u \vee v = (v_0 \vee h) \vee (v_0 \vee h) = = u_0 \vee v_0 \vee h$, $u_0 \wedge v_0 = 0$, $(u_0 \vee v_0) \wedge h = 0$ и, значит,

$$\begin{aligned}\dim(u \vee v) &= \dim(u_0 \vee v_0 \vee h) = \dim(u_0 \vee v_0) + \dim h = \\ &= \dim v_0 + \dim u_0 + \dim h = s - t + k - t + t = s + k - t = \\ &= \dim u + \dim v - \dim h.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Если u, v — различные атомы в A, то $R(A)$ — пространство с порядковой единицей однородное типа I_2, где $\mathrm{Re} = u \vee v$.

Доказательство. Так как $R(A)$ содержит атомы u, v, то $R(A)$ имеет тип I [2]. Заметим, что максимальное число попарно ортогональных атомов в $R(A)$ равно двум. Действительно, так как u и $u \vee v - u$ — ненулевые ортогональные атомы (лемма 3), то это число не меньше 2, но если ω_1, ω_2, ω_3 — три ненулевых, ортогональных атома в $R(A)$, то $\omega_1 + \omega_2$ — ненулевая, не минимальная проективная единица относительно $u \vee v$. Этого не может быть в силу леммы 4. Следовательно, $R(A)$ однородно типа I_2. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть A — однородный фактор типа I_n, $u \in U$, $u = \mathrm{Re}$. Тогда $R(A)$ — тоже фактор. Если $\dim u = k$, то $R(A)$ — однородный фактор типа I_k.

Доказательство. Предположим обратное, пусть $R(A)$ — не фактор, т. е. в $R(A)$ существует центральный относительно R P-проектор Q, такой, что

$$Q(R(A)) + Q'_R(R(A)) = R(A),$$

где Q'_R — квазидополнение Q в $R(A)$.

В силу леммы 3.5 из [4] $R(A) = \mathrm{im}R$ — пространство с порядковой единицей $u = \mathrm{Re}$, $V_R = \mathrm{im}R^*$ — пространство с базовой нормой с базой $K_0 = K \cap V_R$ и $R(A)$ с V_R находится в спектральной двойственности. Поэтому в дальнейшем вместо термина «центральные относительно R» употребляем просто термин «центральный».

После таких обозначений заключаем, что K_0 имеет расщепленную грань F_Q [1] в силу предположения. По предложению 3.1, из [2] вытекает, что если $\rho \in \partial_e F_Q$ и $\sigma \in \partial_e F^{\#}_Q = \partial_e F_{Q'}$, то $\mathrm{face}(\{\rho, \sigma\}) = [\rho, \sigma]$. Здесь $\partial_e F_Q$ — множество экстремальных точек грани F_Q, $\mathrm{face}(\{\rho, \sigma\})$ — наименьшая грань, содержащая ρ и σ [2].

Покажем, что в K существует грань $K_1 \supset K_0$, $K_1 \neq K_0$, которая тоже имеет расщепленную грань. Это означает, что в A существует проективная единица $h = He$, $\dim h > \dim u$, для которого $\mathrm{im}H = H(A)$ — не фактор. Продолжая аналогичным образом, получим, что $h = e$, т. е. A — не фактор. Это противоречит тому, что A — фактор. Значит, $R(A)$ должен быть фактором.

Пусть $u \in U \subset A$ — некоторый атом $u \wedge v = 0$. Положим $Ee = u \vee v$. Тогда $\mathrm{im}E$, $\mathrm{im}E^*$ — пространство с порядковой единицей и пространство с базовой нормой соответственно, которые находятся в спектральной двойственности, $K_1 = K \cap \mathrm{im}E^*$ [3, 4]. Так как атомы в $E(A)$ и экстремальные точки K_1 находятся во взаимно однозначном соответствии (предложение 1.13 [3]), то это соответствие обозначим через $\wedge : v \to \hat{v}$ [2]. В силу леммы 5 $\dim E = k + 1$. Возьмем два атома $a \in Q(R(A))$ и $b \in Q'_R(R(A))$. Тогда $G = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{b}\}) = [\hat{a}, \hat{b}]$, по предложению 3.1 [2].

Обозначим через $K' = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{v}\})$. По выбору $a \neq v$, $b \neq v$ и $(a \vee b) \wedge v = 0$, $\dim(a \vee b \vee v) = 3$. Значит, K' имеет тип I_3. Поэтому $G^{\#}_{K'} = \{x\}$, т. е. квазидополнение G относительно K' состоит из одной точки, которая является экстремальной для K'.

Рассмотрим множества $\sigma = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{x}\})$, $\mathcal{T} = \mathrm{face}(\{\hat{b}, \hat{x}\})$. Здесь возможны следующие случаи:

а) σ и $\mathcal{T}$ — гладкие строго выпуклые множества;

б) $\sigma = [\hat{a}, \hat{x}]$ и $\mathcal{T}$ — гладкое строго выпуклое множество;

в) $\mathcal{T} = [\hat{b}, \hat{x}]$ и σ — гладкое строго выпуклое множество;

г) $\sigma = [\hat{a}, \hat{x}]$ и $\mathcal{T} = [\hat{b}, \hat{x}]$.

а) Пусть σ и $\mathcal{T}$ — гладкие строго выпуклые множества (грани K'). Берем $\hat{y} \in \partial_e \sigma, \hat{z} \in \partial_e \mathcal{T}$ — экстремальные точки. Тогда $\Omega = \mathrm{face}(\{\hat{y}, \hat{z}\})$ может быть: (i) либо гладким строго выпуклым множеством, (ii) либо линейным сегментом $[\hat{y}, \hat{z}]$, (iii) либо совпадает с K'. Проверим эти возможные варианты по отдельности. В силу однородности K' $\Omega^{\#}_{K'} = \{\hat{v}\}$ состоит из одной точки. Поэтому $\hat{v} \in \sigma \cap \mathcal{T}$, так как $\Omega = \mathrm{face}(\{\hat{y}, \hat{y}'_{\Omega}\}) = \mathrm{face}(\{\hat{z}, \hat{z}'_{\Omega}\})$ и $\hat{y}, \hat{y}_{\Omega}, \hat{v}$ (соответственно $\hat{z}, \hat{z}_{\Omega}, \hat{v}$) ортогональны. Отсюда заключаем, что $\sigma = \mathcal{T}$, так как они имеют две общие различные экстремальные точки $\hat{x}, \hat{v}$, для которых $\mathrm{face}(\{\hat{x}, \hat{v}\}) = \sigma = \mathcal{T}$. Это противоречит тому, что K' имеет тип I_3. Далее, если $\Omega = [\hat{y}, \hat{z}]$, то, естественно, $\hat{v} \in \sigma \cap \mathcal{Y}$, и тоже получаем противоречие. В последнем случае, если $\Omega = K'$, то это противоречит однородности K' (лемма 6).

б) Пусть $\sigma = [\hat{a}, \hat{x}]$ и $\mathcal{T}$ — гладкое строго выпуклое множество. Покажем, что для всех $\hat{y} \in \partial_e \mathcal{T}$ $\mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{y}\}) = [\hat{a}, \hat{y}]$.

Очевидно, $\mathcal{T}^{\#} = \{\hat{a}\}$ и $\{\hat{x}\}^{\#}_{\mathcal{T}} = \{\hat{b}\}$. Пусть $\{\hat{y}'_{\mathcal{T}}\}$ — квазидополнение $\{\hat{y}\}$ относительно $\mathcal{T}$. Предположим, что $\mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{y}\})$ — гладкое строго выпуклое множество (грань K'). Тогда к граням $\mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{x}\}) = [\hat{a}, \hat{x}]$, $\mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{y}\})$, $\mathrm{face}(\{\hat{y}, \hat{x}\}) = \mathcal{T}$ применимы рассуждения, аналогичные случаю (i) в пункте а), и получим противоречие. Значит, $\mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{y}\}) = [\hat{a}, \hat{y}]$ для всех $\hat{y} \in \partial_e \mathcal{T}$. Это означает, что $K' = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{v}\}) = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{x}\}) = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \mathrm{face}(\{\hat{b}, \hat{x}\})\}) = \mathrm{face}(\{\hat{a}, \mathcal{T}\}) = \mathrm{co}(\{\hat{a}\} \cup \mathcal{T})$, т.е K' имеет расщепленную грань $\mathcal{T}$ (или $\{\hat{a}\}$). В силу произвольности атома $a \in Q(R(A))$ заключаем, что $\mathrm{face}(\{F_Q, \mathcal{T}\}) = \mathrm{co}(F_Q \cup \mathcal{T})$. По предположению, $\mathrm{face}(\{F_Q, F_{Q'}\}) = \mathrm{co}(F_Q \cup F_{Q'})$. Отсюда $F_E = \mathrm{face}(\{F_R, \{\hat{v}\}\}) = \mathrm{face}(\{F_R, \mathcal{T}\}) = \mathrm{face}(\{F_Q, F_{Q'}, \mathcal{T}\}) = \mathrm{face}(\{F_Q, \mathrm{face}(\{F_{Q'}, \mathcal{T}\})\}) = \mathrm{co}(F_Q \cup \cup \mathrm{face}(\{F_{Q'}, \mathcal{T}\}))$.

Следовательно, $K_1 = \mathrm{im} E^* \cap K$ — грань K строго содержит K_0 и имеет расщепленную грань.

в) Аналогично случаю б).

г) В этом случае K' — симплекс и очевидно, что F_E имеет расщепленную грань $F_Q \vee \{\hat{v}\} = F_Q \vee \{\hat{x}\}$. Теорема доказана.

Следствие. Для различных атомов $u, v \in A$ в однородном факторе

A типа I_n, подпространство $R(A)$ является однородным фактором типа I_2, где $\mathrm{Re}=u\vee v$.

Определение 2. Будем говорить, что проективные единицы $u, v\in U$ эквивалентны, если $\dim u=\dim v$, и эту эквивалентность обозначим через $u\sim v$.

Замечание. Из леммы 5 следует, что для всех $u, v\in U$ $u\vee v-u\sim v-u\wedge v$.

Лемма 7. Пусть A — однородный фактор типа I_n. Если в A существует след τ, то $\tau(u)=\frac{1}{n}$ для любого атома u в A.

Доказательство. Пусть $u, v\in A$ — произвольные атомы. Положим $h=u\vee v$, $h=\mathrm{Re}$. В силу следствия $R(A)$ — однородный фактор типа I_2.

Рассмотрим сужение следа τ на $R(A)$. Как показано в [5], $\tau(u)=\tau(v)$. Далее, так как $e=\sum_{i=1}^{n}u_i$, где u_i — ортогональные атомы, то $1=\tau(e)=$ $=\tau(\sum_{i=1}^{n}u_i)=\sum_{i=1}^{n}\tau(u_i)=n\tau(u_1)$. Отсюда $\tau(u_1)=\frac{1}{n}$. Следовательно, $\tau(u)==\frac{1}{n}$ для всех атомов u из A. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть $u, v\in A$ — различные проективные единицы в A, такие, что $\dim u=\dim v$, т. е. $u\sim v$ и τ — след на A. Тогда $\tau(u)=\tau(v)$.

Доказательство. Пусть $u, v\in U$ и $\dim u=\dim v=k$. Из леммы 7 следует, что $\tau(u)=\frac{k}{n}=\tau(v)$.

Теорема 2. Пусть τ — след на однородном факторе A типа I_n. Тогда для всех проективных единиц $u, v\in A$ имеет место неравенство

$$\tau(u\vee v)\leqslant\tau(u)+\tau(v).$$

Доказательство. Так как $u\vee v-u\sim v-u\wedge v$, то в силу леммы 8 $\tau(u\vee v-u)=\tau(v-u\wedge v)$. Отсюда

$$\tau(u\vee v)+\tau(u\wedge v)=\tau(u)+\tau(v)$$

или

$$\tau(u\vee v)\leqslant\tau(u)+\tau(v).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W. //Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R. I.: AMS. 1976. XI+120 p.
2. Alfsen E. M., Shultz F. W. //Acta Math. 1978. Vol. 140. №3—4. P. 155.
3. Alfsen E. M., Shultz F. W. //Proc. London Math. Soc. 1979. Vol. 38. P. 497.
4. Edwards C. M. //Math. Ann. 1977. Vol. 230. P. 123.
5. Бердикулов М. А. //Изв. АН УзССР. Сер. физ-мат. наук. 1990. № 4. С. 8.

Институт математики
имени В. И. Романовского АН РУз

Дата поступления
27.05.92

THE STRUCTURE OF SPACES WITH ORDINAL UNIT HOMOGENEOUS OF THE TYPE I_n

M. A. Berdikulov, S. T. Odilov

(Summary)

The spaces with ordinal unit close by properties to JBW-algebras of the type I_n are studied.