УДК 517.98

М. А. БЕРДИКУЛОВ, С. Т. ОДИЛОВ

ОБОБЩЕННЫЕ СПИН-ФАКТОРЫ

Мақолада умумлашган спин-фактор деб номланувчи янги фазо тушунчаси киритилган ва умумлашган спин-факторлар I_2 типли тартиб бўйича бирлик элементи мавжуд бўлган фазолар ичида қандай ўрин тутиши ҳақидаги теорема исботланган.

В работе введен новый класс пространств с порядковой единицей — обобщенные спин-факторы — и дана характеризационная теорема, указывающая место обобщенных спин-факторов среди пространств с порядковой единицей типа I_2.

Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей и (V, K) — пространство с базовой нормой, которые находятся в порядковой, отделимой и нормированной двойственности [1].

Через $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$ обозначим множества всех проективных единиц, P-проекторов в A и проективных граней K соответственно.

Определение 1 [1]. Говорят, что A и V находятся в *спектральной двойственности,* если A поточечно монотонно, σ-полно и для каждых $a \in A$ и $\lambda \in \boldsymbol{R}$ существует проективная грань F, которая бисовместима с a и удовлетворяет условиям

$$a \leqslant \lambda \quad \text{на} \quad F, \; a > \lambda \quad \text{на} \quad F^{\#}. \tag{1}$$

Здесь $F^{\#}$ — квазидополнение F в K.

Если A и V находятся в спектральной двойственности и $A = V^*$, то множества $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ являются попарно изоморфными полными ортомодулярными решетками (следствие 12.5 в [1]).

Определение 2. Множество K (база V) называется *гладким,* если каждая экстремальная точка K имеет единственную гиперплоскость, опорную (несущую) к K, т. е. для $x \in \partial e K$ существует единственный функционал $f \in V^*$, такой, что $f(x)=1$.

Множество K называется *строго выпуклым*, если никакой его открытый отрезок не содержит граничных точек этого множества, т. е. собственными гранями K являются только множества вида $\{\sigma\}$, где σ — экстремальная точка K.

P-проектор R называется *центральным*, если $R+R'=I$. Проективная единица $u=\text{Re}$ называется *центральной*, если R — центральный P-проектор. Пространство A с порядковой единицей называется *фактором*, если оно не содержит центральных проективных единиц, кроме 0 и e. Проективная единица $u=\text{Re}$ называется *абелевой*, если $\operatorname{im} R = R(A)$ — векторная решетка. Пространство A с порядковой единицей имеет *тип I*, если для любого центрального P-проектора R в $A \cdot \operatorname{im} R$ содержит абелеву проективную единицу. Элемент $u \in \mathcal{U}$ называется *атомом*, если u — минимальный элемент логики $\mathcal{U}$. Элемент $u \in \mathcal{U}$ называется *конечным*, если он является супремумом конечного числа атомов. Минимальное число атомов, супремум которых равен u, называется *размерностью* u. Фактор A назовем *фактором* типа I_n, если размерность единицы e равна n. Если e является супремумом только n ортогональных атомов, то назовем A *однородным фактором типа* I_n. Через M^+ обозначим множество всех положительных элементов множества M.

Определение 3 [1]. Элемент $\tau \in K$ называется *следом*, если $\tau(Ra+R'a)=\tau(a)$ для всех $a \in A$, $R \in \mathcal{P}$.

Рассмотрим один класс пространств с порядковой единицей и пространств с базовой нормой в следующей конструкции.

Пусть E — банахово пространство, E^* — его сопряженное пространство. Положим $V=\mathbf{R}+E$, $A=\mathbf{R}+E^*$ и определим двойственность между A и V следующим образом: если $a=\alpha+x \in A$, $\rho=\beta+\eta \in V$, то

$$\langle a, \rho\rangle = \alpha\beta + \langle x, \eta\rangle, \tag{2}$$

где $\langle x, \eta\rangle = \eta(x)$ — обычная двойственность между E и E^* для $x \in E^*$, $\eta \in E$.

Превратим A и V в упорядоченные пространства, определив порядок следующим образом:

для $a \in A$ считаем $a \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \|x\|$;

для $\rho \in V$ считаем $\rho \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\beta \geqslant \|\eta\|$.

Если зададим нормы на A и V по формуле

$$\|a\| = |\alpha| + \|x\|, \qquad \|\rho\| = \max\{|\beta|, \|\eta\|\}$$

для $a \in A$, $\rho \in V$ соответственно, то A становится пространством с порядковой единицей $e=1+0$, а V — пространством с базовой нормой, где базой V служит множество

$$K = \{\rho \in V^+ : \langle e, \rho\rangle = 1\} = \{1+\eta : \eta \in E_1\}.$$

Здесь E_1 — единичный шар банахова пространства E.

Легко проверить, что A и V относительно формы (2) будут находиться в отделимой, порядковой и нормированной двойственности. Кроме того, $A=V^*$.

Теорема 1. Пространства A и V находятся в спектральной двойственности тогда и только тогда, когда E рефлексивно и K — строго выпуклое гладкое множество.

Доказательство. Пусть K — строго выпуклое гладкое множество. Так как K — сдвиг единичного шара E_1, то K центрально симметрично. Поэтому диаметрально противоположные точки K обозначим через ρ и ρ'. Очевидно, что A поточечно монотонно полно относительно двойственности (2).

В силу того, что K строго выпукло, его собственные грани имеют вид $\{\sigma\}$, где σ — экстремальная точка K. Так как K — гладкое множество, то для каждой экстремальной точки σ существует единственная опорная (несущая) гиперплоскость H, такая, что $\{\sigma\}=K\cap H$. Это означает, что $F=\{\sigma\}$ — выставленная грань K, т. е. $F=a^{-1}(0)\cap K$ для некоторого $a\in A^+$ [1].

Покажем, что F — проективная грань K. Предположим, что существует проективная грань $G\subset K$, такая, что $G\subset F$ и $<a,\rho>=\rho(a)>0$ для всех $\rho\in G^{\#}$. Пусть $R\in\mathcal{P}$ — P-проектор, соответствующий G, значит, $G=(\operatorname{im}R^*)\cap K$. Так как $G\subset F$, то $a=R'a=0$ на G и $a=R'a$ на $G^{\#}$. Поэтому для всех $\rho\in F$ имеем

$$0=<a,\rho>=<R'a,\rho>=<a,(R')^*\rho>=<a,(R^*)'\rho>.$$

Известно, что $\operatorname{im}^+(R^*)'=\operatorname{cone}(G^{\#})=\bigcup_{\lambda>0}\{\lambda G^{\#}\}$ и, по предположению, $<a,\rho>>0$ для $\rho\in\operatorname{cone}(G^{\#})\setminus\{0\}$; тогда $(R^*)'\rho=0$ и, значит, $\rho\in G$. Таким образом, мы показали, что $F\subset G$, т. е. $G=F$. Следовательно, каждая грань $F=\{\sigma\}$ множества K является проективной и $F^{\#}=\{\sigma'\}$. Пусть u — проективная единица в A, связанная с F свойством $\sigma(u)=1$, $\sigma'(u)=0$. Тогда P-проектор R, соответствующий u, задается по формуле

$$R^*\rho=<u,\rho>\sigma, \tag{3}$$

для всех $\rho\in V$. Из этого следует, что элементы из A совместимы с F тогда и только тогда, когда они имеют вид $\alpha u+\beta$ для $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$.

Теперь проверим условие (1) определения 1.

Пусть $x\in A$ — произвольный элемент. Положим

$$\alpha=\inf_{\rho\in K}<x,\rho> \quad \text{и} \quad \beta=\sup_{\rho\in K}<x,\rho>.$$

Но существуют точки σ и σ' в K такие, что $<x,\sigma>=\alpha$ и $<x,\sigma'>=\beta$ в силу слабой компактности единичного шара в E [2]. Напомним, что σ' диаметрально противоположная точка для σ в K. Из сказанного выше следует, что совместимыми с x могут быть только проективные грани $\{\varnothing\}$, $\{\sigma\}$, $\{\sigma'\}$, K. Поэтому для любого $\lambda\in\boldsymbol{R}$ существует единственная проективная грань F, совместимая с x, такая, что $x\leqslant\lambda$ на F и $x>\lambda$ на $F^{\#}$. Поскольку $F=\{\sigma\}$ при $\lambda<\alpha$, $F=\{\sigma\}$ при $\alpha\leqslant\lambda<\beta$ и $F=K$ при $\lambda\geqslant\beta$, то A и V находятся в спектральной двойственности.

Обратно, пусть A и V находятся в спектральной двойственности. Так как K-пространство состояний A (база V) слабо компактно, то E рефлексивно [2]. В силу предложения 8.7 из [1] проективные единицы A являются экстремальными точками $A_1^+=A_1\cap A^+$, где A_1 — единичный шар пространства A. Поэтому они имеют вид $u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_0$, $\|x_0\|=1$. Это вытекает из следующего результата.

Лемма. Пусть $a\in A_1^+$ — произвольный элемент, $a=\alpha+x$. Если a является экстремальной точкой множества A_1^+, то $\alpha=\|x\|=\frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $a=\alpha+x$ — экстремальная точка A_1^+. Сначала покажем, что $\alpha+\|x\|=1$. Так как $a\in A_1^+$, то $\alpha\geqslant\|x\|$ и $\alpha+\|x\|=\|a\|\leqslant 1$. Предположим, что $\alpha+\|x\|<1$, $\alpha>\|x\|$ и $\varepsilon_1=1-\alpha-\|x\|$, $\varepsilon_2=\alpha-\|x\|$, $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $b=\alpha+\left(1+\frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x$, $c=\alpha+$

$+\left(1-\frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x$. Если $\alpha=\|x\|$, то положим $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, 2\|x\|)$, $b=\alpha+$ $+\frac{\varepsilon}{2}+\left(1+\frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x$, $c=\alpha-\frac{\varepsilon}{2}+\left(1-\frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x$. Тогда $b, c\in A_1^+$ и $a=\frac{1}{2}(b+c)$. Это противоречит экстремальности a. Значит, $\alpha+\|x\|=1$.

Ясно, что $\alpha<\frac{1}{2}$ не выполняется. Пусть $\alpha>\frac{1}{2}$, тогда для любого $\delta<\alpha-\frac{1}{2}$ элементы

$$b=\alpha+\delta+\left(1-\frac{\delta}{\|x\|}\right)x \quad \text{и} \quad c=\alpha-\delta+\left(1+\frac{\delta}{\|x\|}\right)x$$

положительны и имеют единичные нормы. Отсюда $a=\frac{1}{2}(b+c)$, что противоречит экстремальности a. Следовательно, $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\|x\|=\frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Таким образом, заключаем, что проективными единицами пространства A являются только 0, e и экстремальные точки A_1^+. Так как множество проективных единиц $\mathcal{U}$ и множество проективных граней $\mathcal{F}$ в K изоморфны, то элементами $\mathcal{F}$ являются только $\{\varnothing\}$, K и экстремальные точки K. Следовательно, K — строго выпуклое множество. В силу спектральной двойственности между A и V каждая экстремальная точка K имеет единственную опорную (несущую) гиперплоскость, т. е. K — гладкое множество. Теорема доказана.

Для любого элемента $a=\alpha+x\in A$, положив

$$u_a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|},$$

будем иметь

$$a=(\alpha+\|x\|)\,u_a+(\alpha-\|x\|)\,u_a', \tag{4}$$

где

$$u_a'=e-u_a=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|}.$$

Отсюда заключаем, что любой элемент A имеет вид $a=\alpha u+\beta u'$ для некоторых $\alpha, \beta\in R$ и для некоторого $u\in\mathcal{U}$. Поэтому спектральным для a является семейство

$$e_\lambda=\begin{cases} 0 & \text{при } \lambda\leqslant\alpha-\|x\|,\\ e-u_a & \text{при } \alpha-\|x\|<\lambda\leqslant\alpha+\|x\|,\\ e & \text{при } \lambda>\alpha+\|x\|.\end{cases}$$

Согласно этим рассуждениям, A — пространство с порядковой единицей однородное типа I_2.

Определение 4. Пространство с порядковой единицей $A=R+E^*$, удовлетворяющей условию теоремы 1, будем называть *обобщенным спин-фактором.*

Замечание. В случае, когда E — гильбертово пространство, A является обычным спин-фактором, т. е. JW-алгеброй типа I_2 [3].

Пусть A — обобщенный спин-фактор. Для элемента $a=\alpha+x$ положим $\tau(a)=\alpha$. Тогда τ является следом на A.

В самом деле, так как любой P-проектор R на A действует по правилу $Ra=\sigma(a)u$, где $u=Re$, σ — экстремальная точка K, соответствующая R, то

$$\sigma=1+\eta,\quad \sigma'=1-\eta,\quad \|\eta\|=1,$$

$$u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y_0,\quad u'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y_0,\quad \|y_0\|=1,$$

$$\sigma(a)=\alpha+\langle x,\eta\rangle,\quad \sigma'(a)=\alpha-\langle x,\eta\rangle,$$

$$Ra=\sigma(a)\,u=\frac{1}{2}\sigma(a)+\frac{1}{2}\sigma(a)\,y_0,$$

$$R'a=\sigma'(a)\,u'=\frac{1}{2}\sigma'(a)-\frac{1}{2}\sigma'(a)\,y_0,$$

$$Ra+R'a=\frac{1}{2}(\sigma(a)+\sigma'(a))+\frac{1}{2}(\sigma(a)-\sigma'(a))\,y_0,$$

$$\tau(Ra+R'a)=\frac{1}{2}(\sigma(a)+\sigma'(a))=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha=\alpha=\tau(a).$$

Следующая теорема выделяет обобщенные спин-факторы в классе спектральных пространств с порядковой единицей типа I_2.

Теорема 2. Для того, чтобы спектральное пространство с порядковой единицей $A=V^*$ однородное типа I_2 было обобщенным спин-фактором, необходимо и достаточно, чтобы в A существовал след.

Доказательство. Необходимость вытекает из предыдущих рассуждений.

Достаточность. Пусть A — спектральное пространство с порядковой единицей однородное типа I_2, τ — след на A. В силу теоремы 2 из [4] K центрально симметрично, т. е. K изоморфно единичному шару некоторого банахова пространства E. Тогда $H=\{\rho\in V:\rho(e)=1\}$ — гиперплоскость, которая содержит K. Так как $\tau\in H$, то $V_0=H-\tau$ является подпространством V. Множество $K_0=K-\tau$ выпукло, уравновешенно в V_0 и функционал Минковского для K_0 определяет норму на V_0. Следовательно, $E=V_0$. Отсюда заключаем, что $V=\boldsymbol{R}\tau+E$. Так как $A=V^*$, то $A=\boldsymbol{R}e+E^*$. По теореме 1, A является обобщенным спин-фактором. Теорема доказана.

Пусть A — обобщенный спин-фактор. Тогда $A=\boldsymbol{R}+E^*$ для некоторого рефлексивного банахова пространства E. Как было отмечено, любой элемент $a\in A$ имеет вид $a=\alpha u+\beta u'$ для некоторых α, $\beta\in\boldsymbol{R}$ и для некоторого $u\in\mathcal{U}$. Рассмотрим множество

$$M_u=\{\alpha u+\beta u':\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R}\}.$$

Множество M_u является абелевым подпространством A [1] и коммутативной банаховой алгеброй относительно произведения

$$a\circ b=(\alpha u+\beta u')\circ(\alpha_1 u+\beta_1 u')=\alpha\alpha_1 u+\beta\beta_1 u' \tag{5}$$

для

$$a=\alpha u+\beta u',\qquad b=\alpha_1 u+\beta_1 u'.$$

В самом деле, для $a=\alpha u+\beta u'$ имеем $a^2=\alpha^2 u+\beta^2 u'$ по теореме о функциональном исчислении в [1]. В силу следствия 9.9 из [1] операция $ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-a^2-b^2]$ в M_u определяет умножение. Несложные вычисления показывают, что это умножение совпадает с (5), так как

$$(a+b)^2=(\alpha+\alpha_1)^2u+(\beta+\beta_1)^2u',\qquad b^2=\alpha_1^2u+\beta_1^2u'.$$

Следовательно, множество M_u порядково и алгебраически изоморфно R^2 при соответствии $\alpha u+\beta u' \to (\alpha, \beta) \in R^2$. Поэтому модуль элемента $a=\alpha+x$ в силу (4) равняется

$$|a| = \frac{1}{2}(|\alpha+\|x\||+|\alpha-\|x\||)+\frac{1}{2}(|\alpha+\|x\||-|\alpha-\|x\||)\,x_0,$$

где $x_0=\frac{x}{\|x\|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W.//Mem. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 172. P. 122.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
3. Hanche-Olsen H., Stormer E. Jordan Operator Algebras. London: Pitman Ltd, 1984. VIII+183 p.
4. Бердикулов М. А.//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 4. С. 8.

Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз

Дата поступления 15. 04. 93

GENERALIZED SPIN FACTORS

M. A. Berdikulov, S. T. Odilov

(Summary)

In the paper a new class of order unit spaces—generalized spin factors are introduced. Theorem characterizing of generalized spin factors among of order unit spaces of type I_2 is proved.