М. А. БЕРДИКУЛОВ, Н. Д. ЯДГОРОВ

ПРОСТРАНСТВА С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ ТИПА I

Упорядоченные банаховы пространства с порядковой единицей впервые были изучены Альфсеном [1]. Примерами этих пространств являются пространства ограниченных измеримых функций на пространстве с мерой, эрмитова часть алгебры фон Неймана, йордановы банаховы алгебры. Как правило, эти пространства изучались в паре со своими предсопряженными или сопряженными пространствами, которые являются примерами упорядоченных банаховых пространств с базовой нормой (или с базой) [1]. Альфсен и Шульц [2] изучили дуальную пару — пространство с порядковой единицей и пространство с базовой нормой (в дальнейшем для краткости, так будем называть упорядоченные банаховы пространства с порядковой единицей и с базовой нормой соответственно) и построили для них некоммутативную спектральную теорию.

Классификация алгебр фон Неймана по типам I, II, III, полученная Мюрреем и фон Нейманом [3], сыграла важную роль в развитии теории алгебр фон Неймана. Аналогичная классификация йордановых операторных алгебр (JW-алгебр) построена Топпингом [4].

Естественно ставится задача: для пространств с порядковой единицей построить классификацию по типам I, II, III.

Один из подходов к решению этой задачи предложен в работе [5], в которой дана глобальная классификация пространств с порядковой единицей на языке проекционных отображений (P-проекторов). Однако эта классификация для общих пространств не совсем согласуется с интуицией, поскольку имеются примеры конечномерных пространств с порядковой единицей типа II (см. примеры 3, 4, в § 4 [5]).

Нашей целью является построение классификации, обобщающей классификацию JW-алгебр и согласующейся с классическими примерами.

В настоящей работе сделана попытка построения классификации пространства с порядковой единицей по типам в случае, когда оно находится в спектральной двойственности с пространством с базовой нормой. Доказана теорема о том, что пространство с порядковой единицей всегда разделяется на прямую сумму подпространства типа I и подпространства непрерывного типа с центральной проективной единицей.

Предварительные сведения. Все изложенные ниже понятия и определения заимствованы из [1, 2]. Пусть A — пространство с порядковой единицей e, V — пространство с базовой нормой. Предположим, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности, т. е. для $x \in A$, $\rho \in V$

$$x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \langle x, \rho \rangle \geqslant 0 \ \forall \rho \geqslant 0;$$

$$\rho \geqslant 0 \Longleftrightarrow \langle x, \rho \rangle \geqslant 0 \ \forall x \geqslant 0;$$

$$\|x\| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\langle x, \rho \rangle| \leqslant 1, \text{ когда } \|\rho\| \leqslant 1;$$

$$\|\rho\| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\langle x, \rho \rangle| \leqslant 1, \text{ когда } \|x\| \leqslant 1.$$

Через $A+(V+)$ обозначим множество положительных элементов в A (в V). Для положительного проекционного отображения R (т. е. $R^2=R$) в A через $\mathrm{im}R$ $(\mathrm{ker}R)$ обозначим его образ (соответственно ядро). Сопряженное к R отображение, которое действует в V, обозначим через R^* (в силу двойственности $\langle Rx, \rho \rangle = \langle x, R^*\rho \rangle$). Пусть $\mathrm{im}^+R = \mathrm{im}R \cap A^+$, $\mathrm{ker}^+R = \mathrm{ker}R \cap A^+$.

Определение 1. Положительное проекционное отображение R: $A \to A$ с единичной нормой называется P-проектором, если существует единственное положительное проекционное отображение R': $A \to A$ с единичной нормой, такое, что

$$\mathrm{im}^+R = \mathrm{ker}^+R', \ \mathrm{im}^+R^* = \mathrm{ker}^+R'^*,$$

$$\mathrm{ker}^+R = \mathrm{im}^+R', \ \mathrm{ker}^+R^* = \mathrm{im}^+R'^*.$$

Множество P-проекторов в A обозначим через $\mathcal{P}$. Для $R, Q \in \mathcal{P}$ $R < Q$, если $\mathrm{im}\,R \subset \mathrm{im}\,Q$. Тогда множество $\mathcal{P}$ частично упорядочено. Очевидно, для любого $R \in \mathcal{P}$ $\theta \leqslant R \leqslant I$, где θ — нулевое, а I — тождественное отображения. Отображение $R \to R'$ является ортодополнением в $\mathcal{P}$ и P-проектор R' называется квазидополнением R. Элементы вида $u = Re$, $R \in \mathcal{P}$ называются проективными единицами; их совокупность обозначим через U. В U отображение $Re \to e - Re$ является ортодополнением. Как известно, множества $\mathcal{P}$ и U являются σ-полными решетками (предложение 4.2.8[2]).

Определение 2. P-проектор R назовем центральным, если $R + R' = I$; проективную единицу $u = Re$ назовем центральной, если R — центральный P-проектор. Пусть $r(a) = \wedge\{u\colon u \in U, a \leqslant \|a\| u\}$, $c\,(a) = \wedge\{u\colon u \in U, u$ — центральная проективная единица, $a \leqslant \|a\|\,u\}$. Элемент $r\,(a)$ $(c\,(a))$ называется носителем (центральным носителем) $a \in A$.

Два элемента a и b называются ортогональными, если $r(a) \perp r\,(b)$, т.е. $r\,(a$ $\;$ $r\,(b) \leqslant e$; и центрально ортогональными если $c\,(a) \perp c(b)$.

Пусть $K \subset V$ — база пространства с базовой нормой V. Тогда $K = \{\rho \in V^+, \ <e, \delta> = 1\}$.

Грань F выпуклого множества K назовем выставленной по норме, если $F = \{\rho \in K < a, \rho > = 0\}$ для некоторого $a \in A^+$; проективной, если F имеет такой же вид для $a = Re$, $R \in \mathcal{P}$.

Определение 3. Будем считать, что A и V находятся в спектральной двойственности, если каждая выставленная по норме грань базы K проективна и любой элемент $a \in A$ представляется единственным образом в виде $a = a_+ - a_-$, где a_+, $a_- \in A^+$ и $a_+ \perp a_-$.

Согласно [1, 2], если A и V находятся в спектральной двойственности, то множество U является полной ортомодулярной решеткой, т. е. полной логикой.

Основные результаты. Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей, (V, K) — пространство с базовой нормой Предположим, что A и V находятся в спектральной двойственности.

Определение 4. Для $M \subset A$ множество $M^c = \{a \in A \,|\, a \perp b$ для всех $a \in M\}$ назовем ортодополнением M.

Теорема 1. Для любого $M \subset A$ существует P-проектор R, такой, что $M^c = \operatorname{im} R$.

Доказательство. Рассмотрим множество проективных единиц $U_M = \{r(x) \,|\, x \in M\}$. В силу того, что логика проективных, единиц полна, существует $\vee U_M = u = R'e$. Докажем, что $M^c = \operatorname{im} R$.

Пусть $x \in M^c$, тогда $r(x) \perp r(a)$ для каждого $a \in M$. Более того, $r(x) \perp R'e$, т. е. $r(x) \leqslant e - R'e = Re$. Значит, $x \in \operatorname{im} R$, т. е. $M^c \subset \operatorname{im} R$. Очевидно, $M^c \supset \operatorname{im} R$. Теорема доказана.

Лемма 1. Для центрального P-проектора R, если $a \in \operatorname{im} R$, то $c(a) \in \operatorname{im} R$.

Доказательство очевидно, так как в этом случае $c(a) \leqslant Re$.

Определение 5 [5]. Проективная единица $u = Re$ называется абелевой, если $\operatorname{im} R$ — векторная решетка.

Лемма 2. Пусть $u = Re$ — центральная проективная единица. Тогда:

1) если $v = Qe$ — абелева проективная единица в A, то $u \wedge v$ является абелевой в $\operatorname{im} R$;

2) если $v \in \operatorname{im} R$ и $v = Qe$ абелева в $\operatorname{im} R$, тогда v является абелевой в A.

Доказательство 1). Пусть проективная единица $v = Qe$ абелева в A. Так как $u = Re$ — центральная проективная единица, то $u \wedge v = RQe = QRe$. Положим $u \wedge v = He$. Тогда $\operatorname{im} H \subset \operatorname{im} Q$, $\operatorname{im} H \subset \operatorname{im} R$. Так как $\operatorname{im} Q$ — векторная решетка, то $\operatorname{im} H$ — векторная решетка в $\operatorname{im} R$.

Второе утверждение очевидно. Лемма доказана.

Определение 6. Пространство A с порядковой единицей называется типа I, если для любого центрального P-проектора R в A $\operatorname{im} R$ содержит абелеву проективную единицу.

Теорема 2. В каждом пространстве A с порядковой единице существует центральный P-проектор R, такой, что $\mathrm{im}R$ имее тип I, $\mathrm{im}R'$ не содержит ненулевых абелевых проективных единиц Этот P-проектор единственный и является наибольшим сред центральных P-проекторов R, таких, что $\mathrm{im}R$ имеет тип I.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. Сумма произвольного семейства центрально-ортогональных абелевых проективных единиц также является абелевой.

Доказательство. Пусть $\{u_\iota\}_{\iota\in T}=\{R_\iota e\}_{\iota\in T}$ — произвольное семейство центрально-ортогональных проективных единиц. Положим $u=Re=\sum\limits_{\iota\in T}u_\iota$. Обозначим $h_\iota=c(u_\iota)$, $\iota\in T$, $h_\iota=H_\iota e$, где H_ι — центральные P-проекторы. В этих обозначениях $u_\iota=H_\iota(u)$. Отсюда $\mathrm{im}\,R=\bigoplus\sum\limits_{\iota\in T}\mathrm{im}\,R_\iota$. Поэтому, если $\mathrm{im}\,R_\iota$ — векторная решетка для любого $\iota\in T$, то $\mathrm{im}\,R$ — векторная решетка, как прямая сумма векторных решеток. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{u_\iota\}_{\iota\in T}$ — максимальное семейство центрально-ортогональных абелевых проективных единиц в A, $u=\sum\limits_{\iota\in T}u_\iota$. По лемме 3, u абелева проективная единица. Обозначим $h=Re=c(u)$. Если Q — ненулевой центральный P-проектор, такой, что $Qe\leqslant h$, то в силу леммы 2 Qu является ненулевой абелевой проективной единицей в $\mathrm{im}\,R$. Следовательно, $\mathrm{im}\,R$ — пространство с порядковой единицей Re типа I. Из построения видно, что $\mathrm{im}\,R'$ не содержит ненулевых абелевых проективных единиц. Теорема доказана.

Определение 7. Пространство A с порядковой единицей называется фактором, если оно не содержит центральных проективных единиц, кроме 0 и e.

Проективную единицу $u\in U$ назовем атомом, если она является минимальной, т. е. из $v\leqslant u$, $v\in U$ следует, что либо $v=u$, либо $v=0$.

Теорема 3. Фактор A имеет тип I тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы один атом.

Доказательство. Пусть A имеет атом $u=Re$, тогда $\mathrm{im}\,R\cong\boldsymbol{R}$ [6], где $\boldsymbol{R}$ — числовая прямая. Значит, $\mathrm{im}\,R$ — векторная решетка, т. е. A типа I.

Наоборот, пусть A типа I, тогда A содержит абелеву проективную единицу $v=Qe$, такую, что $\mathrm{im}\,Q=\boldsymbol{Z}\bigcap\mathrm{im}\,Q$, где $\boldsymbol{Z}$ — центр A [1]. Поэтому $\mathrm{im}\,Q\cong\boldsymbol{R}$ и, значит, v является атомом. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alfsen E. M. Compact convex gets and boundary integrals//Ergebnisse der Math. Vol. 57. Berlin: Springer Verlag. 1971. 219 p.

2. Alfsen E. M., Shultz F. W. Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets//Mem. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 172. 122 p.
3. Murray F., Von Neumann J. On rings of operators//Ann. of Math. 1936. Vol. 37. P. 116—229.
4. Topping D. M. Jordan algebras of self-adjoint operators//Mem. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 53. P. 1—48.
5. Chu C. H., Wright J. D. M. A theory of types for convex sets and ordered banach spaces//Proc. London Math. Soc. 1978. Vol. 36. P. 434—517.
6. Alfsen E. M., Shultz F. W. State spaces of Jordan algebras//Acta Math. 1978. Vol. 140. No. 3—4. P. 155—190.