УДК 517.98

М.А.БЕРДИКУЛОВ, И.М.ЖУРАЕВ

НОРМАЛЬНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

Тартиб киритилган тўла фазоларда, мусбат функционаллар учун нормаллилик билан проектив элементларидаги тўла аддитивлик бир хил эканлиги исботланган

Предварительные сведения. Пусть (A,e) — пространство с порядковой единицей, (V,K) — пространство с базовой нормой. Через A^+(соответственно V^+) обозначим множество положительных элементов в A (соответственно в V). Предположим, что эти пространства находятся в отделимой порядковой и нормированной двойственности [1]. Двойственность между перечисленными пространствами обозначим через $<,>$.

Определение 1. Положительное проекционное отображение $R:A\to A$ с единичной нормой назовем P — проектором, если существует единственное положительное проекционное отображение $R':A\to A$ единичной нормой и такое, что

$$\mathrm{im}^+R=\ker^+R', \quad \mathrm{im}^+R^*=\ker^+R'^*,$$
$$\ker^+R=\mathrm{im}^+R', \quad \ker^+R^*=\mathrm{im}^+R'^*,$$

где R^* — сопряженное к R отображение, т.е. $R^*: V\to V$,

$$<Ra,\rho>=<a,R^*\rho> \text{ для } a\in A,\ \rho\in V.$$

Обозначим через $\wp$ множество всех P - проекторов в A.

Отображение $R\to R'$ называется **ортодополнением** в $\wp$, при этом R' также является P-проектором и называется **квазидополнением** для R.

В пространстве A элементы вида $u=Re, R\in\wp$ называются проективными единицами, их совокупность обозначим через U.

Пространство с порядковой единицей A называется монотонно полным, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{a_\alpha\}$ из A существует точная верхняя грань $a=\sup a_\alpha$. Будем предполагать, что A и V находятся в спектральной двойственности. Тогда любой элемент $a\in V$ имеет спектральное разложение: $a=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda$.

Две проективные единицы называются совместимыми, если соответствующие им P- проекторы коммутируют.

Пусть a,b — элементы A, $\left\{e_{\lambda}^{a}\right\}$ и $\left\{e_{\mu}^{b}\right\}$ — их спектральные семейства.

Два элемента a и b называются совместимыми, если все пары $\left\{e_{\lambda}^{a}\right\}$, $\left\{e_{\mu}^{b}\right\}$ совместимы.

Напомним, что замкнутое по норме подпространство $M\subset A$ называется абелевым, если оно замкнуто относительно отображения $a\to a^2=\int\lambda^2 de_{\lambda}$ и любые два элемента в M совместимы.

Абелево подпространство $M\subset A$ называется максимальным, если оно не содержится ни в каком другом подабелевом подпространстве $M'\neq A$.

Определение 2. Линейный функционал φ называется нормальным, если для любой сети $\{x_{\alpha}\}\subset A$, монотонно убывающей к нулю,

$$\varphi(x_{\alpha})\to 0.$$

Определение 3. Положительный функционал f на пространстве с порядковой единицей A называется вполне аддитивным на проективных единицах, если для любого ортогонального семейства проективных единиц $\{u_{\alpha}\}$ справедливо равенство.

$$f(\sup_{\alpha} u_{\alpha})=\sum_{\alpha} f(u_{\alpha}).$$

Основные результаты.

Лемма 1. Пусть (A,e) — пространство с порядковой единицей. Пусть имеется возрастающая последовательность операторов $\{T_n\}$ на A и $\sup\|T_n\|=m<\infty$. Тогда существует линейный оператор T такой, что для любого $x\in A$ $Tx=\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, при этом $\|T\|\leq m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $m\geq n$ оператор T_m-T_n положителен, следовательно, для любого $x\in A^+$ и линейного положительного функционала φ имеем

$$\varphi(T_m x-T_n x)=\varphi(T_m x)-\varphi(T_n x)\geq 0.$$

Для фиксированного x и φ числовая последовательность $\{\varphi(T_n x)\}$ возрастает и $|\varphi(T_n x)|\leq\|\varphi\|\ldots\|T_n x\|\leq m\|\varphi\|\|x\|$. Отсюда заключаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(T_n x)$.

Далее пусть x и φ произвольны. Так как $x=x_+-x_-$,то

$$\varphi(T_m x-T_n x)=\varphi_+(T_m x_+-T_n x_+)-\varphi_-(T_m x_+-T_n x_+)-$$
$$-\varphi_+(T_m x_--T_n x_-)+\varphi_-(T_m x_--T_n x_-).$$

Из вышесказанного следует, что $|\varphi(T_m x-T_n x)|\to 0, m,n\to\infty$.
Известно, что $\|T_m x-T_n x\|=\sup\limits_{\|\varphi\|\leq 1}|\varphi(T_m x-T_n x)|$.

Следовательно, последовательность $\{T_n x\}$ фундаментальна по норме; так как A полно, то существует $Tx=\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Оператор T, так определенный,аддитивен и однороден. Так как $\|T_n x\|\leq\|T_n x\|\|x\|\leq m\|x\|$, то в пределе имеем $\|Tx\|\leq m\|x\|$, т.е. T — ограниченный линейный оператор и $\|T\|\leq m$

Лемма доказана.

Пусть A — пространство с порядковой единицей с условием $A\cong V^*$.

Теорема 2. Для того чтобы положительный линейный функционал f на A был нормальным,необходимо и достаточно, чтобы он был вполне аддитивен на проективных единицах A.

Доказательство. Пусть f — нормальный функционал, $\{u_\alpha\}$ — ортогональное семейство проективных единиц $u=\sup\limits_{\alpha\in\Gamma} u_\alpha$, Γ — направленное по включению множество конечных наборов индексов α. Если $\gamma\in\Gamma$, то положим $e_\gamma=\sup\limits_{\alpha\in\gamma} u_\alpha=\sum\limits_{\alpha\in\gamma} u_\alpha$.

Тогда, очевидно, $\{e_\gamma\}$ — возрастающая сеть и $u=\sup e_\gamma$. В силу нормальности f имеем $f(u)=\lim\limits_{\gamma} f(e_\gamma)$,т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\gamma_0\in\Gamma$ такое, что

$$|f(u)-f(e_\gamma)|<\varepsilon \text{ для всех } \gamma\geq\gamma_0, \text{ т.е.}$$

$$|f(u)-\sum_{\alpha\in\gamma} f(u_\alpha)|<\varepsilon. \tag{1}$$

Это означает, что f вполне аддитивен на проективных единицах. Наоборот, пусть f вполне аддитивен на проектных единицах. а) Сначала докажем, что существует минорантное семейство проективных единиц $F=\{v\}\subset A$ такое, что f нормален на $R_v(A)$, для каждого $v\in F$, где R_v — P — проектор, соответствующий v.

Пусть u — произвольная проективная единица из A. Можно доказать, что так как A — сопряженное пространство с порядковой единицей, то A обладает разделяющим семейством нормальных состояний. Поэтому существует нормальный положительный функциал φ на A такой, что

$$f(u)<\varphi(u). \tag{2}$$

Покажем, что существует проективная единица $h_1\leq u$ такая, что

$$f(h)\leq\varphi(h) \text{ для всех } h\leq h_1. \tag{3}$$

Допустим, что свойство (3) не выполнено, т.е. для любой проективной единицы $h\leq u$ существует проектная единица $r\leq h$ такая, что

$$f(r)\geq\varphi(r). \tag{4}$$

Рассмотрим множество всех ортогональных семейств проективных единиц $\{r_\alpha\}\subset A$ таких, что $f(r_\alpha)\geq\varphi(r_\alpha)$, $r_\alpha\leq u$. Очевидно, это множество упорядочено по включению и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Значит, существует максимальное семейство проективных единиц $\left\{r'_\alpha\right\}$ такое, что $f\left\{r'_\alpha\right\}\geq\varphi\left\{r'_\alpha\right\}$, $r'_\alpha\leq u$ для всех α.

Покажем, что $\sup\limits_\alpha r'_\alpha=u$. Если это не так, то в силу (4) существует ненулевая проективная единица $r_0\leq u-\sup\limits_\alpha r'_\alpha$, для которой $f(r_0)\geq\varphi(r_0)$, что противоречит максимальности$\left\{r'_\alpha\right\}$. Таким образом, $\sup\limits_\alpha r'_\alpha=u$. Так как f вполне аддитивен на проективных единицах, то

$$f(u)=\sum_{\alpha} f\left\{r'_{\alpha}\right\}\geq\sum_{\alpha}\varphi\left\{r'_{\alpha}\right\}=\varphi(u),$$

что противоречит условию (2). Следовательно, выполняется свойство (3). Тогда $f(a)\leq\varphi(a)$ для любого неотрицательного элемента вида $a=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i u_i$, где $\lambda_i\geq 0$, u_i — проективная единица, $u_i\leq h_1$, $i=1,2,\ldots,k$. Так как любой элемент $R_{h_1}(A)$ можно аппроксимировать по норме ступенчатыми из $R_{h_1}(A)$ и функционалы f и φ непрерывны по норме, то $f(x)\leq\varphi(x)$ для всех положительных $x\in R_{h_1}(A)$.

Так как φ — нормальный функциал, то из последнего неравенства следует, что f нормален на $R_{h_1}(A)$. Используя лемму Цорна, отсюда получаем утверждение а).

б) Теперь покажем, что f нормален на всем пространстве A. Пусть $x_\alpha\downarrow 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|x_\alpha\|\leq 1$ для всех α. Пусть f нормален на $R_{u_1}(A)$ и $R_{u_2}(A)$. Докажем, что f нормален на $R_{u_1+u_2}$.

Пусть $u_1+u_2=u$, тогда в силу свойства а) существует $h\leq u$ такой, что f нормален на $R_{h_1}(A)$ для всех $h_1\leq h$.

Далее, так как f нормален на $R_{u_1}(A)$ и $R_{u_2}(A)$, то $h_1\geq u_1$, $h_1\geq u_2$. Отсюда $h_1\geq u_1\vee u_2=u_1+u_2=u$. Значит $h_1=u$ и f нормален на $R_u(A)=R_{u_1+u_2}(A)$.

Пусть $\{u_\alpha\}$— ортогональное семейство проективных единиц из A таких, что f нормален на $R_{u_\alpha}(A)$ для всех α и $\sup_{\alpha} u_\alpha=e$. Такое семейство существует в силу а). Пусть также$\{q_\beta\}$ — возрастающая сеть супремумов конечных наборов u_α. Тогда $q_\beta\uparrow e$ и в силу предыдущего f нормален на $R_{q_\beta}(A)$, так как $q_\beta=\sup_{\alpha\in\beta} u_\alpha=\sum_{\alpha\in\beta} u_\alpha$, где β конечный набор индексов α.

Так как $f(R_{q_\beta}x_\alpha)\to 0$ по α, то второе слагаемое в равенстве

$$f(x_\alpha)=f(x_\alpha-R_{q_\beta}x_\alpha)+f(R_{q_\beta}x_\alpha)$$

стремится к нулю. Необходимо оценить первое слагаемое. Так как семейство операторов $\{R_{q_\beta}\}$ удовлетворяет условию леммы 1, то

$$|f(x_\alpha-R_{q_\beta}x_\alpha)|\leq\|f\|\,\|x_\alpha-R_{q_\beta}x_\alpha\|\to 0.$$

Следовательно, $f(x_\alpha)\to 0$, т.е. f нормален. Теорема доказана.

Пусть (A,e) — пространство с порядковой единицей, (N,K) — пространство с базовой нормой. Предположим, что они находятся в спектральной двойственности и $A \cong N^*$. В этом случае N — множество всех нормальных функционалов на A. В N введем естественный частичный порядок: $f \le g \Leftrightarrow f(a) \le g(a)$ для всех $a \in A^+$, где $f, g \in N$.

Определение. Элемент $\psi \in N$ назовем единицей, если $\psi \ge 0$ и множество $\cup\{g \in N: -n\psi \le g \le n\psi\}$ плотно по норме в пространстве N.

Теорема 3. Пусть M — ограниченное по норме подмножество N.

Следующие условия эквивалентны:

(i) M слабо относительно компактно;

(ii) сужение M на каждое максимальное абелево подпространство слабо относительно компактно;

(iii) для любой последовательности $\{u_n\}$ ортогональных проективных единиц в A $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = 0$ равномерно по всем $f \in M$.

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна. Так как всякое ортогональное семейство проективных единиц совместно ([1], с.28), т.е. лежит в некотором максимальном абелевом подпространстве, то утверждение (ii)$\Leftrightarrow$(iii) есть следствие результата Гротендика [2]. Поэтому достаточно доказать, что (ii) $\Rightarrow$(i). Так как M ограничено по норме в A^*, то его $\sigma(A^*, A)$ — замыкание $\overline{M}$ в A^* является $\sigma(A^*, A)$ — компактным в A^* в силу теоремы Банаха-Алаоглу [3]. Остается доказать, что всякий элемент $f \in \overline{M} \subset A^*$ принадлежит $N \subset A^*$, так как слабая топология в $\sigma(N, A)$ есть сужение топологии $\sigma(A^*, A)$.

Пусть $f \in \overline{M}$. Если A_0 — произвольное максимальное абелево подпространство A, то суженние f на A_0 принадлежит замыканию сужения M на A. По предположению (ii) $M\big|_{A_0}$ слабо относительно компактно в N и, значит, $f\big|_{A_0} \in \overline{M}\big|_{A_0} \subset N$. Следовательно, сужение функционала f на всякое максимальное абелево подпространство нормально. Так как всякое ортогональное семейство проективных единиц совместно [1], то f является вполне аддитивным функционалом на проективных единицах. По теореме 2 f нормально, т.е. $f \in N$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $T: N \to N$ — положительное, линейное отображение такое, что $\|T\| \le 1$ и $T\psi \le \psi$, где ψ — единица в N. Тогда для любого $f \in N$ существует $\hat{f} \in N$ такое, что $n^{-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k f \to \hat{f}$, $n \to \infty$ по норме N.

Доказательство. Рассмотрим выпуклое множество

$$S_n = \{g \in N: -n\psi \le g \le n\psi\}.$$

Для любого ортогонального семейства $\{u_k\}$ проективных единиц $\psi(u_k) \to 0$ при $k \to \infty$ в силу нормальности ψ. Так как для любого $g \in S_n |g(u_n)| \le \psi(u_k)$, то $\lim\limits_{k \to \infty} g(u_n) = 0$ равномерно по всем $g \in S_n$.

Кроме того, $\|g\| \le n\|\psi\|$ для всех $g \in S_n$. По теореме 3 множество S_n слабо относительно компактно; очевидно, что оно слабо замкнуто, тогда S_n — слабо компактное подмножество N.

Пусть $T:N\to N$ — положительный линейный оператор такой, что $\|T\|\le 1$ и $T\psi\le\psi$. Тогда $T(S_n)\subset S_n$.

Положим

$$T_m=m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}T^k.$$

Для любого $f\in S_n$ последовательность $\{T_mf\}$ лежит в S_n. Так как S_n слабо компактно, то по теореме Эберлейна-Шмульяна [4] S_n слабо секвенциально компактно. Поэтому из последовательности $\{T_mf\}$ можно выбрать слабо сходящую последовательность $T_{m_k}f\to\hat f\in N$. Так как $\|T\|\le 1$, то выполнены все условия теоремы Иосида [4, гл.VIII, §3, теорема 2]. Из нее следует, что $T_mf\to\hat f$ по норме N. Утверждение теоремы 4 доказано для любого $f\in S_n$, а значит, для всех $f\in\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$.

Пусть $f\in N$ произвольно. По условию теоремы $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ плотно в N. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существуют $f_1\in\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ и $f_2\in N$ такие, что $f=f_1+f_2$ и $\|f_2\|<\frac{\varepsilon}{3}$. Рассмотрим последовательность $\{T_mf\}=\{T_mf_1+T_mf_2\}$. Так как $f\in\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$, то последовательность $\{T_mf_1\}$ сходится в N и поэтому фундаментальна, т.е. $\|T_nf_1-T_mf_1\|<\frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно больших m,n.

Далее для всех

$$\|T_mf_2\|=\|m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}T^k\,f_2\|\le m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\ \|T^kf_2\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Значит, при достаточно больших m,n

$$\|T_mf-T_nf\|\le\|T_mf_1-T_nf_1\|+\|T_mf_2\|+\|T_nf_2\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает фундаментальность последовательности $\{T_mf\}$. Так как N полно, то существует $\hat f$ такое, что $T_mf\to\hat f$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующий важный результат, являющийся обобщением известной теоремы Витали-Хана-Сакса из теории меры.

Теорема 5. Пусть (A,e) — пространство с порядковой единицей, $\{f_n\}$ — последовательность нормальных положительных функционалов, поточечно сходящаяся к f, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}f_n(a)=f(a)\ \text{для любого}\ a\in A.$$

Тогда f также является нормальным положительным функционалом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что f — положительный линейный функционал. Поэтому в силу теоремы 2 достаточно показать, что f вполне аддитивен на проективных единицах. Пусть $\{u_\alpha\}$ — произвольное ортогональное семейство проективных единиц. Так как оно совместно, то существует максимальное абелево подпространство

$A_0 \in A$, содержащее это семейство. Так как всякое максимальное абелево подпространство является полуполем, то в силу классической теоремы Витали-Хана-Сакса $f\big|_{A_0}$ нормален. Следовательно, $f(\sup\limits_{\alpha} u_\alpha)=\sum\limits_{\alpha} f(u_\alpha)$, т.е. f вполне аддитивен на проективных единицах. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfsen E. M., Shultz F. W.// Memoirs Amer. Math. Soc.1976. Vol. 172. 120 p.
2. Grothendieck A.// Canad. I.Math. 1953. Vol.5 P. 129-173.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функ. анализ. М.: Мир, 1977.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления 30.12.95

POSITIVE NORMAL FUNCTIONALS IN THE ORDER UNIT SPACES

M.A.Berdikulov, I.M.Dzhuraev

(Summary)

For positive functionals in the order unit spaces the coinsideness of normality and complete additiveness on the projection units is proved