ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Л. М. БРЭГМАН

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОБЩЕЙ ТОЧКИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЛЕНИНГРАД 1967

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Л. М. БРЭГМАН

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОБЩЕЙ ТОЧКИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

*диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук
И. В. Романовский.

ЛЕНИНГРАД 1967

Диссертация выполнена при кафедре вычислительной математики Ленинградского ордена Ленина государственного университета имени А. А. Жданова.

Защита состоится на заседании Ученого Совета математико-механического фекультета Ленинградского университета 18 мая 1967 г.

Реферат разослан «26» февраля 1967 г.

В различных областях математики и ее приложениях часто встречаются задачи нахождения общей точки некоторой системы выпуклых множеств или минимизации выпуклой функции на пересечении этих множеств.

К таким задачам можно отнести системы линейных уравнений и неравенств, задачи линейного и выпуклого программирования, некоторые функциональные уравнения и неравенства и т. д.

Для решения таких задач существуют довольно эффективные методы (см., например, [1]). Однако, часто эти методы оказываются непригодными из-за ограниченности памяти ЭВМ. Причем это может быть не из-за большого объема исходной информации, а из-за того, что в процессе счета требуется хранить целый ряд промежуточных данных.

Поэтому полезно иметь методы, в которых количество хранимых промежуточных данных невелико.

К таким методам можно отнести рассматриваемый в диссертации релаксационный метод.

Идея релаксационного метода следующая:

Пусть в линейном топологическом пространстве X задано некоторое семейство замкнутых выпуклых множеств $A_i (i \in I)$, общую точку которых нам нужно найти. Будем считать, что $R = \bigcap_{i \in I} A_i$ не пусто. Возьмем некоторое множество S, такое что $S \cap R \neq \Lambda$ (Λ — пустое множество) и рассмотрим функцию $D(x, y)$, заданную на множестве $S \times S$. Затем строим последовательность $\{x^n\}$ следующим образом:

1. $x^0 \in S$ выбираем произвольно.
2. Если x^n известно, то выбираем $i_n \in I$ и находим x^{n+1} — точку, которая реализует $\min\limits_{z \in A_{i_n}} D(z, x^n)$.

Функцию $D(x, y)$ будем называть функцией релаксации, последовательность $\{x^n\}$ — релаксационной последовательностью, а последовательность индексов $\{i_0, i_1, \ldots\}$ — управлением релаксацией.

При выполнении некоторых условий релаксационная последовательность сходится к некоторой точке из R.

Исследованию такого релаксационного метода и его применению для решения некоторых экстремальных задач и посвящена диссертация. Диссертация состоит из введения и девяти параграфов.

Во введении описана общая идея релаксационного метода и указана связь этого метода с описанными в литературе методами, в частности с [2] и [3].

В § 1 рассматриваются условия, налагаемые на функцию релаксации, и доказываются теоремы о том, что релаксационная последовательность сходится к общей точке заданной системы множеств, если берется одно из следующих трех управлений релаксацией:

1-е управление.

Множество I конечно ($I = \{1, 2, \ldots m\}$) и индексы выбираются в циклическом порядке, т. е. $i_0=1, i_1=2, \ldots i_{m-1}= = m, i_m=1, i_{m+1}=2$ и т. д.

2-е управление.

В качестве i_n выбирается тот индекс, который реализует $\max\limits_{i\in I}\min\limits_{z\in A_i} D(z, x^n)$. (Предполагается, что такой индекс существует).

3-е управление.

Множества A_i являются полупространствами, т. е. $A_i = \{x \in X \mid f_i(x) \geqslant b_i\}$, где f_i — линейные непрерывные функционалы, b_i — вещественные числа. В качестве i_n будем выбирать тот индекс, для которого $b_{i_n} - f_{i_n}(x^n) \geqslant \gamma \sup\limits_{i\in I}(b_i - f_i(x^n))$, где $\gamma > 0$. В этом случае последовательность $\{x^n\}$ сходится к общей точке множеств A_i, если X — нормированное пространство и $\|f_{i_n}\| \leqslant M$ при всех n.

В § 2 приводятся примеры функций релаксации, удовлетворяющих условиям § 1. В частности, если X — вещественное гильбертово пространство, то можно взять функцию релаксации $D(x, y) = \| x-y \|^2$. Эта функция удовлетворяет условиям § 1, если считать, что в X введена слабая топология. Поэтому построенная с помощью этой функции релаксационная последовательность будет слабо сходиться к общей точке любой заданной системы выпуклых множеств.

В конечномерном пространстве в качестве функции релаксации можно взять функцию

$$D(x, y) = f(x) - f(y) - (g(y), x - y) \qquad (1)$$

где $f(x)$ — некоторая строго выпуклая дифференцируемая функция, а $g(x)$ — ее градиент в точке x.

Построенная по формуле (1) функция $D(x, y)$ для широкого класса функций $f(x)$ будет удовлетворять условиям § 1.

Например, функции

$$D_1(x, y) = \| x - y \|^2, \qquad (2)$$

$$D_2(x, y) = \sum_{j=1}^{p} (y_j - x_j + x_j (\ln x_j - \ln y_j)) \qquad (3)$$

будут удовлетворять условиям § 1.

В § 3 релаксационный метод применяется для задач минимизации выпуклых функций при линейных ограничениях. Доказывается, что для функции релаксации, построенной по функции $f(x)$ с помощью формулы (1), релаксационная последовательность сходится к минимуму функции $f(x)$ при заданных ограничениях в форме равенств и начальном приближении x^0 — точке безусловного минимума функции $f(x)$. Если ограничения заданы в форме неравенств, то строится модификация релаксационного метода, которая позволяет в этом случае решать задачи выпуклого программирования. При этом одновременно можно получить решение двойственной задачи.

В § 4 рассматривается вопрос о применении релаксационного метода для решения задач линейного программирования. В этом случае нужно либо заменить задачу линейного программирования «близкой» задачей выпуклого программирования и применять методы § 3, либо свести задачу линейного программирования с помощью соотношений двойственности к системе линейных неравенств и находить ее решение — общую точку полупространств.

При замене задачи «близкой» задачей выпуклого программирования может быть удобно добавлять к минимизируемой функции выпуклую функцию, содержащую логарифмы переменных, т. к. это позволяет опустить ограничения вида $x_j \gg 0$. В этом случае получены оценки близости решения полученной задачи выпуклого программирования к решению исходной задачи.

§ 5 посвящен применению релаксационного метода для решения задач квадратичного программирования.

Задача квадратичного программирования сводится к бесконечному числу линейных неравенств, и эта система решается релаксационным методом с 3-им управлением релаксацией. Для случая когда $D(x, y) = \|x - y\|^2$, выписаны формулы вычисления приближения x^{n+1} по приближению x^n.

В § 6 оценивается быстрота сходимости релаксационного метода в конечномерном случае.

В этом параграфе считается, что функция релаксации $D(x, y)$ построена по формуле (1), релаксационная последовательность сходится к некоторой точке x^* — общей точке заданных множеств A_i, участвующая в формуле (1) функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x^* и $M(x^*)$ — матрица вторых производных функции $f(x)$ в точке x^* — неособенная.

В этом случае доказывается:

1. Если множества A_i — полупространства и число их конечно, то последовательность $\{x^n\}$ сходится к x^* не медленнее, чем геометрическая прогрессия, т. е. $\|x^n - x^*\| = O(\Theta^n)$, где $0 \leqslant \Theta < 1$ при любом из трех описанных выше управлений релаксацией.

2. Если A_i — произвольные замкнутые выпуклые множества, выбрано 2-ое управление релаксацией и $R = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ имеет внутреннюю точку, то $\|x^n - x^*\| = O(\Theta^n)$ $(0 \leqslant \Theta < 1)$.

Приводится пример, показывающий, что в общем случае условие п. 2 опустить нельзя.

Нахождение приближения x^{n+1} по приближению x^n может быть довольно трудным. Поэтому в § 7 рассматривается так называемая „неполная релаксация", которая в ряде случаев позволяет сократить вычисления при нахождении x^{n+1}.

Применение метода неполной релаксации проиллюстрировано примерами для случая, когда $D(x, y) = \|x - y\|^2$. При этом получаются методы, описанные в работах [2], [3], [4], [5].

При этом, если выполнены условия теорем § 6, быстрота сходимости остается такой же (т. е. не медленнее, чем геометрическая прогрессия).

В § 8 релаксационный метод применяется для решения неравенств в гильбертовом пространстве.

Неравенство $Ax \geqq b$, где A — линейный непрерывный оператор действующий из гильбертова пространства H_1

в гильбертово пространство с конусом H_2, $x \in H_1$, $b \in H_2$, сводится к бесконечной системе неравенств вида $(f_i, x) \geqslant b_i$, где f_i — линейные функционалы, b_i — вещественные числа.

Для решения этой системы применяется релаксационный метод с функцией релаксации $D(x, y) = \| x - y \|^2$ и 3-м управлением релаксацией. Полученная релаксационная последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится к x^*-решению неравенства $Ax \geq b$.

В §§ 1—8 считалось, что рассматриваемые множества имеют непустое пересечение. Однако, заранее может быть неизвестно, выполнено ли это условие. Поэтому полезно иметь признак, который позволял бы в ходе счета устанавливать, что пересечение данных множеств пусто.

Исследованию этого вопроса посвящен § 9. Здесь доказывается следующая теорема:

Для того, чтобы пересечение данных множеств было непустым необходимо, а в случае компактности множества элементов последовательности $\{x^n\}$ и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} D(x^{n+1}, x^n)$ сходился.

С помощью этой теоремы можно устанавливать, что пересечение данных множеств пусто.

Если $D(x, y) = \| x - y \|^2$, множества A_i являются полупространствами конечномерного пространства и число их конечно, то теорему можно доказать и без условия компактности множества $\{x^n\}$, однако в общем случае это условие опускать нельзя.

Релаксационным методом с функцией релаксации (3) решались задачи минимизации функции $\sum_{j=1}^{p}(c_j x_j + x_j \ln x_j)$ при линейных ограничениях.

Вычислительная схема получается особенно простой если все коэффициенты в ограничениях равны 0,1 или -1. В частности, релаксационный метод быстро сходится для задач с транспортными ограничениями:

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b.$$

В этом случае релаксационный метод совпадает с методом Г. В. Шелейховского, который применяется для расчета пассажиропотоков в городах (см. [6]).

Основное содержание диссертации изложено в работах [7]—[9].

В заключение приношу глубокую благодарность своему руководителю, И. В. Романовскому, за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. ИЛ 1963.
2. AGMON S. «The relaxation method for linear inequalities». Canad. J. Math., 6, № 3, 1954.
3. MOTZKIN T. S., SCHOENBERG I. I. «The relaxation method for linear inequalities», Canad. J. Math., 6, № 3, 1954.
4. ЕРЕМИН И. И. «Обобщение релаксационного метода Моцкина—Эгмона». УМН, 20, вып. 2, 1965.
5. ЕРЕМИН И. И. «Релаксационный метод решения систем неравенств с выпуклыми функциями в левых частях» ДАН, 160, № 5, 1965.
6. БРЭГМАН Л. М. «Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями». Ж. выч. матем. и мат. физ., 7, № 1, 1967.
7. БРЭГМАН Л. М. «Нахождение общей точки выпуклых множеств методом последовательного проектирования», ДАН, 162, № 3, 1965.
8. БРЭГМАН Л. М. «Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач оптимизации», ДАН, 171, № 5, 1966.
9. БРЭГМАН Л. М. «Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования». Ж. выч. матем. и мат. физ. (в печати).

Тип. ЛОЛГУ. Заказ 908. Тираж 180. 1/2 п. л. М 08101. 25-I-67 г.