М. С. Бродский (*Одесса*), **И. Ц. Гохберг** (*Кишинев*),
М. Г. Крейн (*Одесса*), **В. И. Мацаев** (*Харьков*)

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ТЕОРИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Доклад посвящен результатам, полученным в самое последнее время (1958—1961 гг.).

1. Фундаментальным положением теории линейных вполне непрерывных операторов является теорема о существовании у таких операторов нетривиальных инвариантных подпространств (Дж. Нейман, Н. Ароншайн и К. Смит [1]). Из этого результата легко выводится существование у всякого линейного вполне непрерывного оператора, действующего в гильбертовом пространстве, максимальной цепочки вложенных друг в друга инвариантных подпространств.

В 1958 г. впервые Л. А. Сахнович [2], [3] показал, что этот геометрический факт позволяет получить ряд существенно новых результатов в направлении теории М. С. Лившица [4], [5] треугольных моделей несамосопряженных операторов и отсюда вывести ряд новых аналитических фактов.

2. Примерно в этот же период в работах М. С. Бродского [6], [7], [8] появился интеграл, дающий абстрактное треугольное представление несамосопряженного оператора. В этом представлении вольтерров оператор (вполне непрерывный оператор со спектром, сосредоточенным в нуле) восстанавливается по своей мнимой эрмитовой компоненте и какой-либо максимальной цепочке инвариантных подпространств. Изучение этого интеграла (интеграла треугольного усечения) естественным образом привело к выделению различных классов банаховых пространств, состоящих из вполне непрерывных операторов и представляющих собой идеалы кольца линейных ограниченных операторов ([9], [10], [ГК]*). Оказалось, что принадлежность одной из эрмитовых компонент вольтеррова оператора какому-либо из этих классов, влечет принадлежность второй компоненты соответствующему классу; тем самым обнаружился ряд важных связей между спектрами компонент вольтеррова оператора (И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [11], [12]; В. И. Мацаев [13]).

Хотя в основе интеграла треугольного усечения лежат некоторые геометрические и алгебраические идеи, эта теория приводит к разнообразным и иногда неожиданным аналитическим выводам, которые находят применение в теории интегральных и дифференциальных уравнений [14], теории преобразований Гильберта [13], теории мультипликативного представления оператор-функций [15] и др. С другой стороны, выясняется, что существенный прогресс в теории интеграла треугольного усечения иногда достигается благодаря применению новых средств теории аналитических функций.

3. Вообще одной из характерных тенденций теории несамосопряженных операторов является непрерывное расширение применяемых в ней средств и методов современной теории аналитических функций. Основным каналом для использования этих методов является, с одной стороны, естественная и ставшая уже классической традиция исследования спектральных свойств линейного оператора на основе изучения резольвенты оператора как аналитической оператор-функции ([17]—[19], [9]) и, с другой стороны, сравнительно недавно начатое изучение определителей возмущения линейных операторов ([20]—[22], [13]).

Изучение резольвенты позволило получить для ограниченных и неограниченных операторов сильные признаки существования «достаточно полного» набора инвариантных подпространств ([23]—[26]). Это обстоятельство, в свою очередь, позволило получить треугольные модели, а также построить общую теорию абстрактных треугольных представлений для широких классов ограниченных и даже неограниченных операторов с вещественным спектром ([2], [3], [27], [ГК]).

4. Центральной задачей теории несамосопряженных операторов остается построение теории, которую в какой-то мере для достаточно широкого класса операторов можно было бы назвать обобщением теории приведения матриц подобным преобразованием к жордановой форме.

В первую очередь должны быть исследованы и классифицированы одноклеточные операторы, характеризуемые тем, что все их инвариантные подпространства составляют множество, упорядоченное по вложению. Эти операторы являются аналогами матриц, жорданова форма которых состоит из одной клетки. Хотя еще нельзя говорить о теории одноклеточных операторов, однако в этой области получен ряд важных результатов ([28]—[31]).

5. За недостатком места здесь будут сформулированы только некоторые основные предложения, так или иначе связанные с теорией абстрактного треугольного представления вполне непрерывных операторов. Ряд других исследований, в особенности из числа упомянутых в п. 3, получили освещение в пленарных докладах М. В. Келдыша и В. Б. Лидского [32] и М. Г. Крейна [33].

---

* Через [ГК] обозначается книга И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна «Несамосопряженные операторы в гильбертовом пространстве» (находится в печати).

§ 1. Максимальные цепочки инвариантных подпространств вполне непрерывного оператора

В дальнейшем $\mathfrak{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство. Замкнутое (в смысле сильной сходимости) множество ортогональных проекторов $\mathfrak{P}=\{P\}$ называется *цепочкой*, если оно упорядочено (естественным образом) и содержит проекторы O и I. Пара проекторов (P^-, P^+) $(P^- < P^+;\ P^-, P^+ \in \mathfrak{P})$ называется *разрывом* цепочки $\mathfrak{P}$, если в $\mathfrak{P}$ нет ни одного проектора, расположенного между P^- и P^+. Размерность подпространства $(P^+ - P^-)\mathfrak{H}$ называется *размерностью разрыва*. Цепочка, не имеющая ни одного разрыва, называется *непрерывной*. Цепочка называется *максимальной*, если она не является правильной частью никакой другой цепочки. Максимальная цепочка характеризуется тем, что либо она непрерывна, либо всякий ее разрыв одномерен.

Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *собственной цепочкой* оператора A, действующего в $\mathfrak{H}$, если для любого $P \in \mathfrak{P}$ подпространство $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A. Из упоминавшейся во введении теоремы Дж. Неймана и Н. Ароншайна [1] выводится следующее важное предложение [2]:

У всякого линейного вполне непрерывного оператора существует по крайней мере одна собственная максимальная цепочка.

Среди различных аналитических результатов, которые получил Л. А. Сахнович, отправляясь от этого предложения, отметим следующий [3]:

Для любого вольтеррова оператора A

$$\mathrm{Sp}\left(A_R^2\right)=\mathrm{Sp}\left(A_J^2\right), \tag{1}$$

где A_R и A_J — эрмитовы компоненты оператора A:

$$A_R=\frac{A+A^*}{2}, \quad A_J=\frac{A-A^*}{2i}.$$

§ 2. Абстрактное треугольное представление вольтеррова оператора

Идея абстрактного треугольного представления вольтеррова оператора, введенного М. С. Бродским [8], легко поясняется на примере операторов, действующих в n-мерном пространстве E_n. Пусть A — вольтерров оператор, действующий в E_n (т. е. A — нильстепенной оператор, $A^n=0$) и $\mathfrak{P}=\{P_j\}_{j=0}^n$ — его собственная максимальная цепочка. Для ортонормированного базиса $\{e_j\}$, определяемого равенствами

$$\Delta P_j=P_j-P_{j-1}=(\cdot,\ e_j)\,e_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

будем иметь

$$Ae_k=\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}e_j \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Из последних соотношений путем несложных преобразований получается равенство

$$A=2i\sum_{k=1}^{n} Q_kA_J\Delta P_k,$$

где Q_k — любой из проекторов P_{k-1} и P_k. Это представление обобщается на вольтерровы операторы в гильбертовом пространстве. Именно, имеет место следующее предложение ([8], [10]):

Пусть A — произвольный вольтерров оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{P}$ — его собственная максимальная цепочка. Тогда

$$A=2i\int_{\mathfrak{P}} PA_J\,dP. \tag{2}$$

Сходимость интеграла (2) понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение σ_ε цепочки $\mathfrak{P}$ (т. е. цепочка, состоящая из конечного числа проекторов $0 = P'_0 < P'_1 < \ldots < P'_m = I$ из $\mathfrak{P}$), такое, что для всех расширенных разбиений $\sigma = \{P_j\}_0^n \supset \sigma_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left\| A - 2i \sum_{j=1}^{n} Q_j A_j (P_j - P_{j-1}) \right\| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были при этом операторы $Q_j \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющие условиям $P_{j-1} \leqslant Q_j \leqslant P_j$.

Последнее предложение допускает следующее обращение ([10], [8]):

Если для некоторого самосопряженного вполне непрерывного оператора X и некоторой максимальной цепочки $\mathfrak{P}$ интеграл

$$Y = 2i \int_{\mathfrak{P}} PXdP \tag{3}$$

сходится, то Y является единственным вольтерровым оператором с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$ и мнимой компонентой X.

Вещественная компонента Y_R оператора Y выражается через X при помощи формулы

$$Y_R = i \int_{\mathfrak{P}} (PXdP - dPXP). \tag{4}$$

§ 3. Нормированные идеалы кольца ограниченных операторов

В дальнейшем через $\mathfrak{S}_\infty$ обозначается банахово пространство всех линейных вполне непрерывных операторов с обычной равномерной нормой.

Для выяснения условий сходимости интегралов (3) и (4), а также для установления ряда зависимостей между спектрами эрмитовых компонент вольтеррова оператора понадобятся некоторые специальные банаховы пространства $\mathfrak{S}$. Эти пространства характеризуются следующими тремя свойствами:

1) они состоят из операторов, принадлежащих $\mathfrak{S}_\infty$;

2) они являются двусторонними идеалами в кольце $\mathfrak{R}$ всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$;

3) для любых X, $Y \in \mathfrak{R}$ и $A \in \mathfrak{S}$

$$|XAY|_{\mathfrak{S}} \leqslant |X|\,|A|_{\mathfrak{S}}\,|Y|, \tag{5}$$

где через $|A|_{\mathfrak{S}}$ обозначена норма в $\mathfrak{S}$ элемента $A \in \mathfrak{S}$.*

Такие пространства называются *нормированными идеалами* кольца $\mathfrak{R}$. Нормированные идеалы были введены и изучались Дж. Нейманом и Р. Шаттеном [34] в их теории «cross-spaces».

Приведем примеры конкретных нормированных идеалов $\mathfrak{S}$, играющих в дальнейшем важную роль. При их построении используется понятие последовательности $\{s_n(A)\}$ *s-чисел* вполне непрерывного оператора A. Последняя определяется как последовательность всех собственных чисел неотрицательного оператора $(A^*A)^{1/2}$, занумерованных в порядке убывания с учетом их кратности.

Простейшие нормированные идеалы образуют [34] совокупности $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$

---

* Заметим, что из (5) вытекает унитарная инвариантность нормы $|\cdot|_{\mathfrak{S}}$, т. е. что $|U_1 A U_2|_{\mathfrak{S}} = |A|_{\mathfrak{S}}$ для любого $A \in \mathfrak{S}$ и любых унитарных операторов U_1 и U_2.

всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty$, а норма определяется равенством

$$|A|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(s_p(A^*A)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности, $\mathfrak{S}_1$ совпадает с множеством всех *ядерных* операторов [35], а $\mathfrak{S}_2$ — с множеством всех *операторов Гильберта—Шмидта*. Пространство $\mathfrak{S}_2$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определяемым равенством

$$(X, Y) = \mathrm{Sp}(XY^*) \quad (X, Y \in \mathfrak{S}_2).$$

Пусть π_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — некоторая невозрастающая последовательность положительных чисел, такая что

$$\pi_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \infty, \quad \lim_{j\to\infty} \pi_j = 0.$$

Каждая последовательность $\Pi = \{\pi_n\}$ порождает тройку нормированных идеалов $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$. Идеалы $\mathfrak{S}_\Pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ состоят соответственно из всех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$|A|_\Pi = \sup_n \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} < \infty$$

и

$$|A|_\pi = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j s_j(A) < \infty.$$

Через $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ обозначается нормированный идеал, представляющий собой замыкание по норме $|X|_\Pi$ всех конечномерных операторов. Этот идеал состоит из тех $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} s_j(A)}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j} = 0.$$

Оказывается, что $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_\pi$ сепарабельны, а $\mathfrak{S}_\Pi$ всегда несепарабельно. Особую роль в дальнейшем играют нормированные идеалы $\mathfrak{S}_\omega$ и $\mathfrak{S}_\Omega$, являющиеся частными случаями идеалов $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ при $\Pi = \Omega = \{(2j-1)^{-1}\}$. (Пространство $\mathfrak{S}_\omega$ введено впервые в [9], об остальных нормированных идеалах см. [10], [ГК]).

Имеет место следующее предложение, связывающее введенные пространства в пары или тройки:

Общий вид линейного непрерывного функционала $F(X)$ в $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ одно из подпространств $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p \leq \infty)$, $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$, дается формулой $F(X) = \mathrm{Sp}(A^*X)$, где A — произвольный оператор из пространства $\mathfrak{S}^*$, совпадающего соответственно с $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_q$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$, причем

$$|F| = \sup_{X\in\mathfrak{S}} \frac{|F(X)|}{|X|_{\mathfrak{S}}} = |A|_{\mathfrak{S}^*}.$$

Таким образом, пространства $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_q\,(q^{-1}+p^{-1}=1)$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ изометричны пространствам, сопряженным соответственно к пространствам $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_p\,(1<p\leqslant\infty)$, $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$. Для случая $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_p\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ эта теорема доказана в [34], а для остальных случаев в [10].

§ 4. Условия сходимости интеграла треугольного усечения. Интеграл треугольного усечения как оператор

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольная максимальная цепочка и $(P_j^-,\ P_j^+)$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega;\ \omega\leqslant\infty)$ — все ее разрывы. Имеет место следующее предложение:

Если оператор $X\in\mathfrak{S}_\omega$ и выполняется необходимое условие

$$\left(P_j^+-P_j^-\right)X\left(P_j^+-P_j^-\right)=0\qquad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ \omega),$$

то интеграл треугольного усечения

$$\int\limits_{\mathfrak{P}} PXdP \tag{6}$$

сходится. Для всякого оператора X, не принадлежащего $\mathfrak{S}_\omega$, найдется непрерывная цепочка, такая, что интеграл (6) *не сходится даже в слабом смысле.*

Первая и основная часть этой теоремы доказана В. И. Мацаевым в [9], вторая — И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [ГК]. До этого результата М. С. Бродским ([6], [8]) была доказана сходимость интеграла (6) для $X\in\mathfrak{S}_1$, а И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном ([10], [12]) — для $X\in\mathfrak{S}_p\,(p>1)$.

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольная непрерывная максимальная цепочка. Она порождает два *трансформатора* $\mathscr{T}$ и $\mathscr{E}$ (два оператора, действующих в пространстве операторов), определенные равенствами

$$\mathscr{T}(X,\ \mathfrak{P})=\int\limits_{\mathfrak{P}} PXdP,\quad \mathscr{E}(X,\ \mathfrak{P})=i\int\limits_{\mathfrak{P}}(PXdP-dPXP).$$

Трансформаторы $\mathscr{T}$ и $\mathscr{E}$ являются замкнутыми неограниченными операторами в $\mathfrak{S}_\infty$ ([8], [ГК]). Трансформатор $\mathscr{T}$ является неограниченным проектором ($\mathscr{T}^2=\mathscr{T}$), определенным на всех операторах X, допускающих представление $X=X_1+X_2$, где $X_1\,(\in\mathfrak{S}_\infty)$ обладает собственной цепочкой $\mathfrak{P}$, а X_2 — дополнительной цепочкой $\{I-P\}_{P\in\mathfrak{P}}$. При этом $\mathscr{T}(x)=X_1$ [ГК]. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2$ трансформатор $\mathscr{T}$ является *ортогональным* проектором [11]. Отсюда, в частности, вытекает равенство (1).

Для исследования действий трансформаторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{E}$ в различных нормированных идеалах, существенную роль играют следующие тождества ([12], [ГК]), имеющие место для любых X, X_1 и X_2 из $\mathfrak{S}_2$:

$$\operatorname{Sp}\left(\mathscr{T}\left(X_1\right)X_2^*\right)=\operatorname{Sp}\left(X_1\mathscr{T}\left(X_2\right)^*\right), \tag{7}$$

$$[\mathscr{E}(X)]^2=X^2+\mathscr{E}(X\mathscr{E}(X)+\mathscr{E}(X)X). \tag{8}$$

§ 5. Связь между спектрами эрмитовых компонент вольтерровых операторов

1. Рассмотрение связей между спектрами эрмитовых компонент вольтеррова оператора A начнем со случая, когда $A_J\in\mathfrak{S}_1$. Если $H\in\mathfrak{S}_\infty$ — самосопряженный оператор, то через $n_+(H,\ r)$ $(n_-(H,\ r))$ обозначается число характеристических чисел (т. е. чисел, обратных к собственным) оператора H, содержащихся на отрезке $(0,\ r]$ $([-r,\ 0))$. Имеет место следующее фундаментальное предложение:

Для любого вольтеррова оператора A с $A_J \in \mathfrak{S}_1$ справедливо равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(A_R, r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(A_R, r)}{r} = \frac{h}{\pi}, \tag{9}$$

где константа h определяется по оператору A_J и любой максимальной цепочке $\mathfrak{P}$ оператора A формулой

$$h = \left(\lim \sum_j |\Delta P_j A_J \Delta P_j|_1\right) = \int_{\mathfrak{P}} |dPA_J dP|_1. \tag{10}$$

В частности, если оператор A диссипативен, т. е. $A_J \geqslant 0$, то $h = SpA_J$. Кроме того, для оператора A_R существует след в смысле главного значения, который равен нулю:

$$\lim_{r\to 0} \sum_{|\lambda_j| \geqslant r} \lambda_j(A_R) = 0. \tag{11}$$

Эти утверждения, за исключением формулы (10), доказаны в [21] методом определителей возмущения. Формула (10) установлена в [ГК].

Если некоторый самосопряженный оператор A_R обладает спектральными свойствами (9) и (11), то это еще не означает, что он является вещественной компонентой вольтеррова оператора A, мнимая компонента которого принадлежит $\mathfrak{S}_1$. Так, например, в [10] показано, что для любого вольтеррова оператора с мнимой компонентой из $\mathfrak{S}_1$ имеют место соотношения

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^+(A_R)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{2j-1}} \\[4ex] \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^-(A_R)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{2j-1}} \end{array}\right\} \leqslant \frac{2|A_J|_1}{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{12}$$

которые, очевидно, не вытекают из (9) и (11).*

Отметим, что соотношения (12) являются *точными* в двух смыслах. Во-первых, в (12) достигается знак равенства, если A_J — одномерный оператор. Во-вторых, для любого самосопряженного оператора $X \in \mathfrak{S}_1$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой вольтерров оператор A с $A_J = X$, что левая часть из (12) будет превосходить правую, если ее уменьшить на ε.

Отметим также, что в силу (12) трансформаторы $\mathscr{T}$ и $\mathscr{E}$ непрерывно отображают $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}_2$.

2. Результат (1) Л. А. Сахновича обобщается следующим образом ([12], [13]): *Если у вольтеррова оператора A мнимая компонента $A_J \in \mathfrak{S}_p$ $(1 < p < \infty)$, то и вещественная компонента $A_R \in \mathfrak{S}_p$, причем*

$$\sup_{A_J \in \mathfrak{S}_p} \frac{|A_R|_p}{|A_J|_p} = \gamma_p < \infty.$$

Константа γ_p обладает свойством

$$\gamma_p = \gamma_q \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

---

* Через $\lambda_j^+(A_R)$ и $\lambda_j^-(A_R)$ обозначаются соответственно положительные собственные числа операторов A_R и $-A_R$, занумерованные в порядке убывания.

и является логарифмически выпуклой функцией от p.

Этот результат означает, что трансформаторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{C}$ непрерывно отображают $\mathfrak{S}_p$ в $\mathfrak{S}_p$ $(1 < p < \infty)$.

3. Пусть

$$\pi_n = n^{-\frac{1}{\rho}} L(n) \quad (1 < \rho < \infty, \ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

где $L(v)$ $(1 \leqslant v < \infty)$ — произвольная положительная дважды дифференцируемая функция, для которой $\frac{vL'(v)}{L(v)} \to 0$ при $v \to \infty$. В этом случае пространства $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ состоят соответственно из тех операторов $A \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых

$$s_n(A) = o\left(n^{-\frac{1}{\rho}} L(n)\right)$$

и

$$s_n(A) = O\left(n^{-\frac{1}{\rho}} L(n)\right).$$

Имеет место следующее предложение. Пусть $\mathfrak{S}$ — одно из пространств $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{S}_\Pi$, где последовательность $\Pi = \{\pi_n\}$ определяется равенством (13).

Если у вольтеррова оператора A мнимая компонента $A_J \in \mathfrak{S}$, то и вещественная компонента $A_R \in \mathfrak{S}$, причем существует абсолютная константа $\gamma_\mathfrak{S}$, зависящая только от пространства $\mathfrak{S}$, такая что

$$|A_R|_\mathfrak{S} \leqslant \gamma_\mathfrak{S} |A_J|_\mathfrak{S}.$$

Отсюда вытекает, что трансформаторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{C}$ отображают непрерывно каждое из пространств $\mathfrak{S}$ в себя. Последнее предложение для пространств $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$ и $\mathfrak{S}_\Pi$ при $1 < \rho < 2$ доказано в [13], а для остальных случаев — в [12].

Наконец, отметим, что для любого вольтеррова оператора A с $A_J \in \mathfrak{S}_\omega$ имеет место оценка [9]

$$|A_R| \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^+(A_J) + \lambda_j^-(A_J)}{2j-1}. \tag{14}$$

Эта оценка — также *точная*. Если A_J — одномерный оператор, то в (14) имеет место знак равенства. Кроме того, для любого самосопряженного оператора $X \in \mathfrak{S}_\omega$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется вольтерров оператор A с $A_J = X$, такой что

$$|A_R| > \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^+(A_J) + \lambda_j^-(A_J)}{2j-1} - \varepsilon.$$

Оценки вида (12) и (14) допускают обобщение ([13], [14]) и распространяются на широкие классы трансформаторов [14]. В [14] даются применения этих оценок к теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

§ 6. Одноклеточные операторы

1. Как известно, инвариантные подпространства конечномерного оператора в том и только том случае образуют упорядоченное по вложению множество, когда матрица этого оператора сводится к одной лишь клетке Жордана. В связи с этим вполне непрерывный оператор называется *одноклеточным*, если из любых двух его инвариантных подпространств одно является частью другого. В качестве примера можно

привести оператор $If(x)=\int\limits_x^1 f(t)\,dt$, действующий в пространстве $\mathscr{L}^{(2)}(0,1)$ ([29]), а также его степени ([36])

$$I^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^1 (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \quad (\alpha>1).$$

Любой простой вольтерров оператор* с одномерной мнимой компонентой $\left(\frac{A-A^*}{2i}f=(f,e)\,\omega e,\ \|e\|=1\right)$ унитарно эквивалентен оператору $i\omega I$ ([4]) и, следовательно, одноклеточен.

Одноклеточный оператор, действующий в бесконечномерном пространстве $\mathfrak{H}$, всегда вольтерров. Отметим также, что *одноклеточный оператор всегда цикличен*, т. е. существует такой вектор $f\neq 0$, что линейная оболочка последовательности $f,\ Af,\ A^2f,\ \ldots$ плотна в $\mathfrak{H}$.

2. Мы не будем останавливаться на формулировках аналитических признаков одноклеточности интегральных операторов, задаваемых ядрами того или иного типа ([28], [31], [36], [37]). Известные в настоящее время абстрактные критерии одноклеточности связаны с понятием характеристической оператор-функции, впервые введенным М. С. Лившицем [4], а затем обобщенным в работах [38], [5], [30].

Представим мнимую компоненту вольтеррова оператора A в виде $\frac{A-A^*}{2i}=RJR^*$, где R — вполне непрерывное отображение некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}_W$ в $\mathfrak{H}$, а J — действующий в $\mathfrak{H}_W$ оператор, удовлетворяющий условиям $J=J^*$, $J^2=E$. Оператор-функция

$$W(\lambda)=E-2iR^*(A-\lambda E)^{-1}RJ$$

называется *характеристической* для оператора A. Если $\mathfrak{H}_0$ — некоторое подпространство в $\mathfrak{H}$, то оператор-функция

$$W_0(\lambda)=E-2iR_0^*(A_0-\lambda E)^{-1}R_0J \quad (A_0f=P_0Af\ (f\in\mathfrak{H}_0),\quad R_0=P_0R),$$

где P_0 — оператор проектирования на $\mathfrak{H}_0$ — называется *проекцией* $W(\lambda)$ на $\mathfrak{H}_0$.

Оператор-функция $W(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) *Функция $W(\lambda)$ разлагается в сходящийся по норме ряд*

$$W(\lambda)=E+\frac{1}{\lambda}W_1+\frac{1}{\lambda^2}W_2+\ldots \quad (\lambda\neq 0),$$

где W_k $(1, 2, 3, \ldots)$ — *вполне непрерывные операторы.*

2) $W^*(\lambda)JW(\lambda)-J\geqslant 0\ (\operatorname{Im}\lambda>0)$, $\quad W^*(\lambda)JW(\lambda)-J=0\quad(\operatorname{Im}\lambda=0,\ \lambda\neq 0)$.

Совокупность всех оператор-функций, удовлетворяющих условиям 1) и 2), обозначим через (Ω_J).

Пусть $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ принадлежат классу (Ω_J). Если существует такая функция $W_3(\lambda)\in(\Omega_J)$, что $W_1(\lambda)=W_2(\lambda)\,W_3(\lambda)$, то говорят, что $W_2(\lambda)$ — *делитель* функции $W_1(\lambda)$. Проекция характеристической функции $W(\lambda)$ на любое инвариантное подпространство оператора A является делителем для $W(\lambda)$. Обратное утверждение неверно. Имеет место следующая теорема [30]:

Пусть A — простой вольтерров оператор и $W(\lambda)$ — его характеристическая функция. Оператор A одноклеточен в том и только том случае, когда один из любых двух делителей функции $W(\lambda)$ является делителем другого.

3. Пусть A — простой диссипативный вольтерров оператор, для которого $l=Sp\,\frac{A-A^*}{2i}<\infty$. Тогда для его характеристической оператор-функции $W(\lambda)$ имеет место [4] оценка $\|W(\lambda)\|\leqslant e^{\frac{2l}{|\lambda|}}$.

---

* Вольтерров оператор A называется *простым*, если из равенств $Af=A^*f=0$ следует, что $f=0$.

Если последняя оценка точна $\left(\textit{в том смысле, что для любого } \varepsilon > 0 \textit{ найдется такая последовательность } \lambda_k \to 0, \textit{ что } \|W(\lambda_k)\| > e^{\frac{2l-\varepsilon}{|\lambda_k|}}\right)$, *то A — одноклеточный оператор* [28].

Неизвестно, верна ли обратная теорема. Справедливость ее проверена пока лишь для отдельных классов операторов.

4. Пусть вольтерров оператор A коммутирует с некоторой инволюцией I. Тогда его можно рассматривать в I-вещественном ядре, которое инвариантно относительно A. В конечномерном случае оператор A одноклеточен во всем пространстве тогда и только тогда, когда он одноклеточен в I-вещественном ядре. В бесконечномерном случае положение иное. Например, оператор

$$Af(x) = \int_x^1 \| f_1(t) \, f_2(t) \| \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} dt \quad (f(x) = \| f_1(x) \, f_2(x) \|, \quad f_k(x) \in \mathscr{L}^{(2)}(0, 1)),$$

неодноклеточен во всем пространстве, но одноклеточен во множестве вещественных вектор-функций.

Можно ожидать, что окажется справедливой следующая гипотеза М. Г. Крейна: *Если простой вольтерров оператор A коммутирует с некоторой инволюцией I и имеет двумерную мнимую компоненту, то в I-вещественнном ядре он одноклеточен.*

Установление этого предложения сыграло бы фундаментальную роль в теории обратных задач для спектральных функций и теории экстраполяции стационарных случайных процессов с конечного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Aronszajn and R. J. Smith, Invariant subspaces of completely continuous operators, Ann. of Math, 60 (1954), 316—320, русск. перев. в журн. «Математика», Сб. перев., 2, № 1 (1958); 2. Л. А. Сахнович, О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду. Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1 (8) (1959); 3. Л. А. Сахнович, Исследование «треугольной модели» несамосопряженных операторов, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4 (11), (1959) 141—149; 4. М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сб., 34 (76), (1954), 145—198; 5. М. С. Бродский и М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13, вып. 1 (79), (1958), 3—85; 6. М. С. Бродский, Об интегральном представлении ограниченных несамосопряженных операторов с вещественным спектром, ДАН СССР, 126, № 6 (1959), 1166—1169; 7. М. С. Бродский, Об интегральном представлении диссипативных вполне непрерывных операторов, Научн. зап. кафедр математики, физики и естествознания Одесск. пед. инст., 24, вып. 1 (1959), 3—7; 8. М. С. Бродский, О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, УМН, 16, вып. 1 (97), (1961), 135—141; 9. В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов, ДАН СССР, 139, № 3 (1961), 548—552; 10. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, К теории треугольного представления несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 137, № 5 (1961), 1034—1038; 11. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенном в нуле, ДАН СССР, 128, № 2 (1959), 227—230; 12. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, ДАН СССР, 139, № 4 (1961), 779—780; 13. В. И. Мацаев, О вольтерровых операторах, получаемых возмущением самосопряженных, ДАН СССР, 139, № 4 (1961), 810—814; 14. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О влиянии некоторых трансформаций ядер интегральных уравнений на спектры этих уравнений, Укр. матем. журнал, т. 13, № 3 (1961), 12—38;

15. М. С. Бродский, О мультипликативном представлении некоторых аналитических оператор-функций. ДАН СССР, 138, № 4 (1961), 751—754; 16. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, № 1 (1951), 11—14; 17. В. Б. Лидский, Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром, Труды Моск. матем. общ., 8 (1959), 83—120; 18. В. Б. Лидский, О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора, Матем. сб., 57, 2 (1962); 19. В. Б. Лидский, О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. общ., 11 (1962); 20. М. Г. Крейн, О признаках полноты системы корневых векторов диссипативного оператора, УМН, 14, вып. 3 (87), (1959), 145—152; 21. М. Г. Крейн, К теории линейных несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 130, № 2 (1960), 254—256; 22. Б. Я. Левин, О вполне непрерывных несамосопряженных операторах, Сб. трудов Харьк. инст. инж. ж.-д. транспорта им. С. М. Кирова, вып. 35 (1959), 5—23; 23. J. Wermer, The existence of invariant subspaces, Duke Math. Journal, 19, № 4 (1952), 615—622; 24. F. Wolf, Operators in a Banach space which admit a generalised spectral decomposition, Nederl. Akad. Wetensch., Indag. Math., 19 (1957), 302—311; 25. E. Bishop, A duality theorem for an arbitrary operator, Pacific J. Math., (1959), 379—397; 26. Ю. И. Любич и В. И. Мацаев, К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве, ДАН СССР, 131, № 1, (1960), 21—23; 27. М. С. Бродский, О треугольном представлении некоторых операторов с вполне непрерывной мнимой частью, ДАН СССР, 133, № 6 (1960), 1271—1274; 28. М. С. Бродский, О жордановых клетках бесконечномерных операторов, ДАН СССР, 111, № 5 (1956), 926—929; 29. М. С. Бродский, Об одной задаче И. М. Гельфанда, УМН, 12, вып. 2 (74), (1957), 129—132; 30. М. С. Бродский, Критерий одноклеточности вольтерровых операторов, ДАН СССР, 138, № 3 (1961), 512—514; 31. Л. А. Сахнович, О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду и обратных задачах, ИАН СССР, сер. матем., 21 (1957), 235—262; 32. М. В. Келдыш и В. Б. Лидский, Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. I (1963), 101—120; 33. М. Г. Крейн, Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. I (1963), 133—134; 34. R. Schatten. A theory of cross-spaces. University Press, Princeton (1950); 35. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, М. (1961); 36. Л. А. Сахнович, Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)\, K(x-t)\, dt$, ИАН СССР, сер. матем., 22, № 2 (1958), 299—308; 37. Л. А. Сахнович, Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи, ДАН СССР, 115, № 4 (1957), 666—669; 38. М. С. Бродский, Характеристические матрицы-функции линейных операторов, Матем. сб., 39 (81) : 2 (1956), 179—200.