苏州大学

# 硕士学位论文

（2009 届）

# 广义 Orlicz 空间的一致凸性

# Uniform Rotundity of Generalized Orlicz Spaces


研究生姓名 陈 怡

指导教师姓名 严亚强（教授）


专业名称 基础数学

研究方向 泛函分析

论文提交日期 2009 年 5 月

# 苏州大学学位论文独创性声明及使用授权声明

## 学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果．除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料．对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明．本人承担本声明的法律责任．

研究生签名：陈怡 日期：2009.5.12

## 学位论文使用授权声明

苏州大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、清华大学论文合作部、中国社科院文献信息情报中心有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文．本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致，除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容．论文的公布（包括刊登）授权苏州大学学位办办理．

研究生签名：陈怡 日期：2009.5.12

导 师 签 名：[illegible] 日期：2009.5.13

# 摘 要

Banach 空间的几何性质是空间理论的重要研究内容，而空间的一致凸性是最重要的几何性质之一. 本文的主要结果是：讨论了 $N-$ 函数的一致凸性的刻划；对一般 Banach 空间的一致凸的等价性 (16 种) 给出了证明；修正了陈述涛关于 Musielak-Orlicz 空间一致凸充要条件的有关定理；本文最主要的工作在于通过完善关于 Orlicz 范数和重排函数的一些引理，首先获得了严格凸性在赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间中的刻划，在此基础上获得了一致凸性的刻划，证明了 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的一致凸的充要条件是： (1)$\varphi \in \Delta_2$; (2)$\varphi$ 一致凸； (3)$\omega(t)$ 正则.

本文共分为四章：

第一章，$N$- 函数的一致凸性：由于 N- 函数的一致凸性与它所成的 Orlicz 函数的一致凸性关系十分密切，我们首先研究 N- 函数的一致凸性. 本文主要对较小变量的一致凸性展开研究，给出 $N$- 函数的一致凸的充要条件，证明了严格凸和一致凸之间的关系，并且给出一个一致凸的简易判别法.

第二章，关于 Banach 空间中的一致凸性的等价条件：证明了 Banach 空间一致凸的 16 个等价命题.

第三章， Musielak-Orlicz 空间的一致凸性：对于赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 空间的一致凸性，陈述涛给出了证明，但是其第二个引理的结论有误，本文将更正这个错误 (使得引理的条件变弱), 并且修正主要定理的证明.

第四章，赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的一致凸性： Kamīnska 证明了赋

Luxemburg 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件．吴从炘，任丽伟在 1999 年为 Orlicz-Lorentz 空间提供了赋 Orlicz 范数的一个基本框架，并给出了 $\gamma < \infty$ 时空间严格凸性的刻划．但在这个范数上现有关于几何理论的研究结果很少，为此本文致力于证明 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件．

**关键词**：$N-$ 函数；Orlicz 空间；Musielak-Orlicz 空间；Orlicz-Lorentz 空间；一致凸；严格凸．

作　　者：陈怡

指导老师：严亚强教授

# Abstract


The geometry of Banach space is an important content in the space theory. The uniform rotundity of spaces is one of the most important geometry properties. The mian results of the thsis are summarized as follows: The author discussed the characterization of the uniform convexity of $N-$functions and proved 16 equivalent propositions for the uniform rotundity of Banach spaces; The thesis amended Chen Shutao's theorem about the uniform rotundity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm; The most important work was that the author first got the characterization of rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm by improving some theorems of these spaces and rearrangements, and then gave the equivalence conditions of the uniform rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm. The author studied the sufficient and necessary conditions for the uniform rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm when $\gamma = \infty$: $(1)\varphi \in \Delta_2$; $(2)\varphi$ is uniformly convex; $(3)\omega(t)$ is regular.

The thesis consists of four parts :

Chapter 1, Uniform convexity of $N-$functions: The thesis first showed the uniform convexity of $N-$functions as it had close relationship with the Orlicz functions. The author mainly studied the uniform convexity near origin and gave sufficient and necessary conditions for the uniform convexity of $N-$functions. The relationship between strict convexity and uniform convexity was given. An easy critertion for the uniform convexity of $N-$functions was also introduced.

Chapter 2, Sufficient and necessary conditions for the uniform rotundity of Banach spaces : The author proved 16 equivalent propositions for the uniform rotundity of Banach space.

Chapter 3, Uniform rotundity of Musielak-Orlicz spaces: The uniform rotundity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm has been shown by Chen Shutao. But there was some mistakes in his Lemma 2. This thesis will amend the mistake (weaken the condition of Lemma 2 ) and give another proof of his theorem.

Chapter 4, Uniform convexity of Orlicz-Lorentz space with Orlicz norm: Kaminska proved equivalence conditions for the uniform rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Luxemburg norm. In 1999, Wu Congxin and Ren Liwei gave the basic frame of Orlicz-Lorentz space with Orlicz norm and the characterization of the rotundity when $\gamma < \infty$. But there were few results about this norm in geometric theory. As a result, the author devoted to showing the equivalent conditions for the uniform rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm when $\gamma = \infty$.

**Keywords:** $N-$function; Orlicz spaces; Musielak-Orlicz spaces; Orlicz-Lorentz spaces; Uniform rotunde space; Strictly convex function; Uniform convex function.

Written by Chenyi

Supervised by Prof. Yan yaqiang

# 目 录

# 引言

设 $X$ 是 Banach 空间， $S(X)$ 是它的单位球面， $B(X)$ 是单位闭球体. $X$ 为一致凸的如果：任意 $\varepsilon \in (0,2]$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $x, y \in S(X)$ 及 $\|x-y\| \geq \varepsilon$ 时，有 $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta$.

Banach 空间的一致凸性是空间理论的一个重要研究内容，因为它既蕴含其它各种凸性，也蕴含空间的自反性. 所以研究一致凸空间的刻划是人们长期以来的课题，但是，直接研究抽象 Banach 空间是一个难度很大的工作，人们转而研究了一些具体的 Banach 空间的一致凸性.

Orlicz 空间和广义 Orlicz 空间是 $L^p$ 空间的推广，作为一类具体的 Banach 空间，它的性质及其判据是一般 Banach 空间的直观材料；从理论上来说，由于生成 Orlicz 空间的函数几乎涵盖了所有的 Banach 空间类，因此 Orlicz 空间作为一类具体的 Banach 空间，给一般的 Banach 空间， Frechet 空间研究准备了巨大的模型库，使一般空间的研究得以有所启迪和借鉴；从应用上来说， Orlicz 空间也给众多非线性分析问题提供恰如其分的空间框架. 因此研究 Orlicz 空间的一致凸性是从上世纪七十年代以来一个十分重要的课题.

由于一致凸性与范数和空间的测度有关，而 Orlicz 空间主要是赋 Orlicz 和 Luxemburg 两种范数，人们主要研究了 $N-$ 函数， $\Delta_2, \nabla_2$ 条件，范数， Orlicz 序列空间和函数空间.

函数 $M(u)$: $R \to R^+$ 称为 $N$- 函数 (Orlicz 函数), 如果满足：(1) $M(u)$ 是偶的, 连续的，凸函数；(2) 对任意 $u>0$, $M(0)=0$ , $M(u)>0$ ; (3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{M(u)}{u}=+\infty$.

已经证明 $M(u)$ 为 $N$- 函数 (Orlicz 函数) 的充要条件为：存在定义在 $[0,+\infty)$ 的函数 $p(u)$, 使得 $M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$, 这里 $p(t)$ 是 $M(u)$ 的右导数，满足： (1)$p(t)$ 右连续，不减； (2)$p(t)>0$, 对任意 $t>0$; (3)$p(0)=0, \lim\limits_{t\to\infty}p(t)=+\infty$.

设 $M(u)$ 为 $N-$ 函数， $p(t)$ 是 $M(u)$ 的右导数， $q(s)$ 是 $p(t)$ 的右反函数，则称

$N-$ 函数 $N(v)=\int_0^{|v|}q(s)ds$ 为 $M(u)$ 的余函数. 我们总用 $M(u)$,$N(v)$ 表示一对互余的 $N-$ 函数, $M(u)$ 称为对较大变量 (分别地, 较小变量) 满足 $\Delta_2$ 条件: 如果存在 $u_0$ 和 $K>1$, 使得当 $u\geq u_0$ 时 (分别地, $u\leq u_0$ 时), 有 $M(2u)\leq KM(u)$. $M(u)$ 称为对一切变量满足 $\Delta_2$ 条件: 如果存在 $K>1$, 使得对一切 $u\geq 0$, 有 $M(2u)\leq KM(u)$. $M$ 满足这三种 $\Delta_2$ 条件中的任何一种都记为 $M\in\Delta_2$. 如果它的余函数 $N\in\Delta_2$, 则称 $M\in\nabla_2$.

以 $G$ 表示欧式空间中有界正测度闭集, $\rho_M(u)$ 表示 $u(t)$ 关于 $M(u)$ 的模, 即 $\rho_M(u)=\int_G M(u(t))dt$. 则 Orlicz 空间 $L_M$ 及它的子空间 $E_M$ 定义如下:

$$L_M=\{u:\exists\lambda>0,\rho_M(\lambda u)<\infty\},$$

$$E_M=\{u:\forall\lambda>0,\rho_M(\lambda u)<\infty\}.$$

对每个 $u\in L_M$, 设

$$\|u\|^\circ=\|u\|_M^\circ=\sup\{\int_G u(t)v(t)dt:\rho_N(v)\leq 1\},$$

$$\|u\|=\|u\|_M=\inf\{\lambda>0:\rho_M(\tfrac{u}{\lambda})\leq 1\},$$

易得 $L_M^\circ\triangleq(L_M,\|\cdot\|^\circ)$,$L_M\triangleq(L_M,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, 称为 Orlicz 空间, 其中称 $\|\cdot\|^\circ$ 为 Orlicz 范数, $\|\cdot\|$ 为 Luxemburg 范数. 设

$$k^*=k^*(u)=\inf\{k>0:\rho_N(p(k(|u|)))\geq 1\},$$

$$k^{**}=k^{**}(u)=\sup\{k>0:\rho_N(p(k(|u|)))\leq 1\},$$

对任意 $u\in L_M$,$u\neq 0$, 有 $k^*\leq k^{**}$, 令 $K(u)=K_M(u)=[k^*,k^{**}]\neq\emptyset$, 在 [1] 中已证得 $k\in K(u)(u\neq 0)$ 的充要条件为 $\|u\|^\circ=\frac{1}{k}[1+\rho_M(ku)]$.

1982 年 A.Kaminska[1] 研究了 Orlicz 空间的一致凸性, 证明了赋 Orlicz 和 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间一致凸的等价条件, 由此导致了关于 Orlicz 空间的大量研究 [2][3][4][5], 从而也推动了 Orlicz 空间应用的发展 [6][7][8]. 赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 空间的一致凸性最早由 H.Hudzik[9][10] 给出刻划, 吴从炘等四人书 [7] 给了更完美的形式. 1991 年, A.Kaminska[16] 研究了 Orlicz-Lorentz 空间的一致凸性, 从此 Orlicz-Lorentz 空间的几何性质的研究成果层出不穷 (见 [12][13][14][15]).

早在 90 年代初期, A.Kaminska 得到了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的严凸性和一致凸性的刻划 [16][17][18]. 而吴从炘, 任丽伟在 1999 年的论文 [19] 开辟

了另一种范数 —Orlicz 范数下的 Orlicz − Lorentz 空间的研究框架，定义了 Orlicz 范数为：

$$\|f\|^{\circ} = \sup_{\rho_{\psi}(g)\leq 1} \int_0^{\gamma} f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt,$$

并给出了 $\gamma < \infty$ 时严格凸性的等价刻划．本文了研究了当 $\gamma \leq \infty$ 时 Orlicz 范数中 $K(f)$ 的有界性定理，并给出关于重排的若干引理，由此得到 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间中严格凸性的刻划，即 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 空间严格凸等价为：(1)$\varphi$ 严格凸；(2) 函数 $\omega$ 在 $[0,\gamma)$ 上为正；(3) 若 $\gamma = \infty$, 则 $\int_0^{\infty} \omega = \infty$. 最后得到本文最重要的工作：一致凸性的刻划．我们将证明：当 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 的一致凸的充要条件是：(1)$\varphi \in \Delta_2$;(2)$\varphi$ 一致凸；(3)$\omega(t)$ 正则.

# 第一章 $N$- 函数的一致凸性

由于 N- 函数的一致凸性与它所成的 Orlicz 函数的一致凸性关系十分密切，我们首先研究 N- 函数的一致凸性.

**定义 1.1** 一个连续函数 $M: R \to R$ 称为凸 (convex) 函数是指对任意 $u, v \in R$, 总有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{M(u)+M(v)}{2}.$$

若上式总是严格不等式，且 $u \neq v$, 则称 $M$ 为严格凸 (strictly convex) 函数.

**定义 1.2** 对于一个连续函数 $M: R \to R$

(1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$ , $u_0 > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $u, v \in R$, 满足 $|u-v| \geq \varepsilon \max\{|u|, |v|\} \geq \varepsilon u_0$ , 总有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2},$$

则称 $M$ 为较大变量上的一致凸 (uniformly convex) 函数.

(2) 若对任意的 $\varepsilon > 0, u_0 > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $u, v \in R$, 满足 $|u| \leq u_0, |v| \leq u_0$, $|u-v| \geq \varepsilon \max\{|u|, |v|\}$, 总有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2},$$

则称 $M$ 为较小变量上的一致凸函数.

(3) 类似地定义一切变量上的一致凸性.

关于对较大变量的一致凸已有很多讨论，显示了它在 Orlicz 函数空间中十分广泛和重要的作用. 较小变量的一致凸性主要用于 Orlicz 序列空间. 本文借用已知成果，对较小变量的一致凸性展开研究.

**定理 1.3** $M$ 为对较小变量一致凸函数的充要条件为：对任意 $\varepsilon > 0$ 和任给区间 $[a,b] \subset (0,1)$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\alpha \in [a,b]$ , $u, v \in R$ 且满足 $|u| \le u_0, |v| \le u_0$ 且 $|u-v| \ge \varepsilon \max\{|u|,|v|\}$, 总有

$$M(\alpha u + (1-\alpha)v) \le (1-\delta)[\alpha M(u) + (1-\alpha)M(v)].$$

证明：充分性取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 即得.

必要性对任意 $\varepsilon > 0$, $\alpha \in [a,b] \subset (0,1)$, 取 $c > 0$ 满足 $0 \le \alpha - c < \alpha + c \le 1$. 令 $\varepsilon' = 2c\varepsilon$ , $u_0' = c\varepsilon u_0$. 且 $u, v$ 满足 $|u| \le u_0, |v| \le u_0, |u-v| \ge \varepsilon \max\{|u|,|v|\}$, 令

$$u^* = (\alpha - c)u + (1-\alpha+c)v, \quad v^* = (\alpha+c)u + (1-\alpha-c)v,$$

因为 $\alpha \pm c \in [0,1]$, $u \le u^* \le v$, $u \le v^* \le v$, 且

$$|u^* - v^*| = 2c|u-v| \ge 2c\varepsilon \max\{|u|,|v|\} \ge \varepsilon' \max\{|u^*|,|v^*|\}.$$

于是对 $u^*, v^*$ 应用定义 1.3, 存在 $\delta' > 0$ , 使得

$$\begin{aligned}
& M(\alpha u + (1-\alpha)v) \\
= \;& M\left(\frac{u^*+v^*}{2}\right) \\
\le \;& (1-\delta')\frac{M(u^*)+M(v^*)}{2} \\
= \;& \frac{1-\delta'}{2}[M((\alpha-c)u + (1-\alpha+c)v) + M((\alpha+c)u + (1-\alpha-c)v] \\
\le \;& \frac{1-\delta'}{2}[(\alpha-c)M(u) + (1-\alpha+c)M(v) + (\alpha+c)M(u) + (1-\alpha-c)M(v)] \\
= \;& (1-\delta')[\alpha M(u) + (1-\alpha)M(v)].
\end{aligned}$$

取 $\delta = \delta'$, 命题成立，证毕.

由于 $N$- 函数是偶的，我们只对变量是正的情形讨论.

**定理 1.4** 设 $M$ 是一个 $N$- 函数，则下列命题等价：

(1) 对任意 $a > 0$ 且 $a \ne 1$, 存在 $\delta(a) > 0$ 和 $u_1 > 0$, 使得对于任意 $au, u \in [0, u_1]$, 总有 $M(\frac{u+au}{2}) \le (1-\delta(a))\frac{M(u)+M(au)}{2}$ ;

(2) 对任意 $a\in(0,1)$, 存在 $\delta(a)>0$ 和 $u_0>0$, 使得对于任意 $u\in[0,u_0]$, 总有 $M(\frac{u+au}{2})\le(1-\delta(a))\frac{M(u)+M(au)}{2}$ ;

(3) $M$ 在 $[0,u_0]$ 上一致凸，即任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$ , 使得当 $|u-v|\ge\varepsilon\max\{u,v\}$, 总有 $M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v)}{2}$ ;

(4) 对于任意给定的 $\beta\in[0,u_0)$ 和 $b\ge u_0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ , 当 $\max\{u,v\}\le b$, $0\le\min\{u,v\}\le\beta$, $|u-v|\ge\varepsilon\max\{u,v\}$, 总有 $M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v)}{2}$ ;

(5) 对任意 $m\in N^*$, $m\ge2$, $\beta\in[0,u_0)$, $b\ge u_0$, $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ , 当 $\max\{u_j:1\le j\le m\}\le b$, $0\le\min\{u_j:1\le j\le m\}\le\beta$, $\max\{|u_i-u_j|:1\le i,\ j\le m\}\ge\varepsilon\max\{u_j:1\le j\le m\}$, 总有 $M(\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}u_j)\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}M(u_j)$.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2), 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 对任意 $a>0$, 若 $a\in(0,1)$, 已知.

若 $a=1$, $M(\frac{u+u}{2})=M(u)<\frac{M(u)+M(u)}{2}$, 取等号不成立.

若 $a>1$, 则 $\frac{1}{a}<1$, 当 $u\le u_0=\frac{u_1}{a}$ 时, $au\le u_1$, 从而

$$\begin{aligned}M\left(\frac{u+au}{2}\right) &= M\left(\frac{au+\frac{1}{a}(au)}{2}\right)\\ &\le (1-\delta)\frac{M(au)+M\left(\frac{1}{a}\cdot au\right)}{2}\\ &= (1-\delta)\frac{M(au)+M(u)}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) 对任意 $a\in(0,1)$, 设 $v=au$, 则 $|u-v|=(1-a)u$. 取 $\varepsilon=1-a$, 存在 $\delta>0$ 满足 $M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$, 即 $M(\frac{u+au}{2})\le(1-\delta)\frac{M(u)+M(au)}{2}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 对任意 $\varepsilon>0$, 不妨设 $u>v$ 且 $u$, $v\in[0,u_0]$, 对任意 $u$, 设 $v_u=(1-\varepsilon)u$, 则 $(1-\varepsilon)\in(0,1)$. 由 (2) 知, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $M(\frac{u+v_u}{2})\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v_u)}{2}$, 于是对任意 $v$ , 满足 $0\le v\le v_u$, 则 $u-v\ge u-v_u=\varepsilon u=\varepsilon\max\{u,v\}$ . 考虑函数 $f(v)=M(\frac{u+v}{2})/\frac{M(u)+M(v)}{2}$, 在 $[0,(1-\varepsilon)u]$ 上递增, 故 $\sup\limits_{0\le v\le(1-\varepsilon)u}f(v)=f((1-\varepsilon)u)=1-\delta(\varepsilon)$, 所以

$$M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v)}{2}.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) 对任意 $\varepsilon>0$, 根据 $u,v$ 的取值分以下两种情况考虑:

① 若 $0 \le u,\ v \le u_0$, 则由 (3) 知，存在 $\delta_1 > 0$ , 使得 $M(\frac{u+v}{2}) \le (1-\delta_1(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v)}{2}$.

② 若 $0 \le \min\{u,v\} \le \beta < u_0,\ u_0 \le \max\{u,v\} \le b$ 且 $|u-v| \ge \varepsilon \max\{u,v\}$. 因为 $M$ 在 $[\beta,u_0]$ 中一致凸，从而严格凸，故 $M$ 在 $[\beta,u_0]$ 上非线性，所以在 $[\beta,b]$ 上也非线性，从而有 $M(\frac{u+v}{2}) < \frac{M(u)+M(v)}{2}$. 由此可知，二元连续函数 $f(u,v) = M(\frac{u+v}{2})/\frac{M(u)+M(v)}{2} < 1$ 在有界闭域 (紧集) $A = \{(u,v) : |u-v| \ge \varepsilon\max\{u,v\};\ 0 \le \min\{u,v\} \le \beta,\ u_0 \le \max\{u,v\} \le b\}$ 上恒成立．于是 $f(u,v)$ 的最大值小于 1 并且存在 $\delta_2 > 0$, 使得 $f(u,v) \le 1-\delta_2$. 令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对符合条件的任意 $u,\ v$ , 总有 $M(\frac{u+v}{2}) \le (1-\delta(\varepsilon))\frac{M(u)+M(v)}{2}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) 取 $b = u_0$ 即得.

(4) $\Rightarrow$ (5) 设 $\max\{u_j : 1 \le j \le m\} \le b,\ 0 \le \min\{u_j : 1 \le j \le m\} \le \beta,\ \max\{|u_j - v_j| : 1 \le i,\ j \le m\} \ge \varepsilon\max\{u_j : 1 \le j \le m\}$ , 我们采用“向前一向后”数学归纳法．第一步，若 $m = 2^k (k \in N^*)$,

① 当 $k=1$ 时，显然成立.

② 假设当 $m = 2^k$ 时不等式成立，即

$$M\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} u_j\right) \le (1-\delta(\varepsilon))\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^k} M(u_j)}{2^k}.$$

则当 $m = 2^{k+1}$ 时,

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^{k+1}} u_j\right) &= M\left(\frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{2^k} u_j + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} u_j\right)\right) \\ &\le (1-\delta(\varepsilon))\frac{M\left(\frac{1}{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^k} u_j\right) + M\left(\frac{1}{2^k}\sum\limits_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} u_j\right)}{2} \\ &\le (1-\delta(\varepsilon))\frac{\sum\limits_{j=1}^{2^{k+1}} M(u_j)}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

这样就证明了当 $m = 2^k (k \in N^*)$ 时不等式成立，这是“向前”部分.

第二步，当不等式对某个 $m > 2$ 成立时，则它对 $m-1$ 也一定成立，这是证明中的

"向后" 部分. 由于 $\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j=\frac{1}{m}[\sum_{j=1}^{m-1}u_j+\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j]$, 则

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j\right) &= M\left(\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{m-1}u_j+\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j\right)\right) \\ &\le (1-\delta(\varepsilon))\frac{\sum_{j=1}^{m-1}M(u_j)+M\left(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j\right)}{m} \\ &\le (1-\delta(\varepsilon))\frac{\sum_{j=1}^{m-1}M(u_j)}{m}+\frac{1}{m}M\left(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j\right). \end{aligned}$$

所以

$$\frac{m-1}{m}M(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j)\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}M(u_j),$$

即

$$M(\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}u_j)\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}M(u_j).$$

综上所述得:

$$M(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}u_j)\le(1-\delta(\varepsilon))\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}M(u_j).$$

(5) $\Rightarrow$ (4) 在 (5) 中取 $m=2$ 即得, 证毕.

**定理 1.5** 若 $M$ 是严格凸函数, 那么 $M$ 在任何不含 0 的有界闭区间上一致凸.

证明: 对于任何 $\varepsilon>0$ 及不含 0 的有界闭区间 $I$, 由于 $M(u)$ 在 $I$ 上严格凸, 故函数

$$f(u,v)=M(\tfrac{u+v}{2})/\tfrac{M(u)+M(v)}{2}$$

在紧集

$$\{(u,v):|u-v|\ge\varepsilon\max\{u,v\};\ u,\ v\in I\}$$

上的最大值小于 1, 设为 $1-\delta$, 所以 $M(\frac{u+v}{2})\le(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$, 证毕.

**定理 1.6** 若 $M$ 是严格凸的 $N$- 函数, 且在 $[0,u_0]$ 上一致凸, 那么它在任何区间 $[0,u_1]$ 上也一致凸.

证明: (1) 若 $u_1 \le u_0$, 显然成立.

(2) 若 $u_1 > u_0$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 讨论以下两种情况:

① 若 $u, v < u_0$, 由于 $M$ 在 $[0, u_0]$ 上一致凸, 则存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|u-v| \ge \varepsilon \max\{u, v\}$ 时, 有 $M(\frac{u+v}{2}) \le (1-\delta_1)\frac{M(u)+M(v)}{2}$.

② 若 $\max\{u, v\} \ge u_0$, 则 $f(u,v) = M(\frac{u+v}{2})/\frac{M(u)+M(v)}{2} < 1$ 在紧集 $A = \{(u,v) : |u-v| \ge \varepsilon \max\{u,v\};\ u_0 \le \max\{u,v\} \le u_1\}$ 上恒成立. 于是 $f(u,v)$ 的最大值小于 1, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得 $f(u,v) \le 1 - \delta_2$, 即

$$M(\frac{u+v}{2}) \le (1-\delta_2)\frac{M(u)+M(v)}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则对任意 $u, v \in [0, u_1]$ , 总有 $M(\frac{u+v}{2}) \le (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$, 即 $M$ 在 $[0, u_1]$ 上也一致凸, 证毕.

对于 $N$- 函数我们给出一个一致凸的简易判别法.

**定理 1.7** 设 $M$ 是 $N$- 函数, 如果对每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 1$, 使得 $p((1+\varepsilon)t) \ge Kp(t)$ $(0 \le t \le t_0)$, 那么 $M$ 是对较小变量的一致凸函数, 对一切变量的一致凸性也有相应的结果.

证明: 对于给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 取 $K > 1$, 使得

$$p((1+\varepsilon)t) \ge Kp(t)\ (0 \le t \le t_0).$$

任取 $u, v$ 满足 $|u-v| \ge \varepsilon \max\{|u|, |v|\}$ ,不失一般性, 设 $u - v \ge \varepsilon u > \varepsilon v > 0$, 记

$$\varphi(t) = M(u) + M(t) - 2M(\tfrac{u+t}{2})\ (0 \le t \le t_0),$$

由于几乎处处有

$$\varphi'(t) = M'(t) - M'(\tfrac{u+t}{2}) \le 0\ (0 \le t \le u),$$

故 $\varphi(t)$ 在 $[0, u]$ 上非增, 因而

$$\begin{aligned} \varphi(v) &\ge M(u) + M((1-\varepsilon)u) - 2M((1-\frac{\varepsilon}{2})u) \\ &= \int_{(1-\varepsilon/2)u}^{u} p(t)dt - \int_{(1-\varepsilon)u}^{(1-\varepsilon/2)u} p(t)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(1-\varepsilon/2)u}^{u}[p(t)-p(t-\frac{\varepsilon}{2}u)]dt \\
&\geq \int_{(1-\varepsilon/2)u}^{u}[p(t)-p(t-\frac{\varepsilon}{2})t)]dt \\
&\geq \int_{(1-\varepsilon/2)u}^{u}(1-\frac{1}{K})p(t)dt \\
&\geq (1-\frac{1}{K})[M(u)-(1-\frac{\varepsilon}{2})M(u)] \\
&> \frac{\varepsilon}{4}(1-\frac{1}{K})[M(u)+M(v)].
\end{aligned}
$$

移项得

$$M(\tfrac{u+v}{2}) \leq \tfrac{1}{2}[1-\tfrac{\varepsilon}{4}(1-\tfrac{1}{K})](M(u)+M(v)),$$

即 $M(u)$ 为一致凸，证毕.

# 第二章　关于 Banach 空间中的一致凸性的等价条件

关于 Banach 空间的一致凸性有许多其它定义法，所以归纳和证明其等价性是一个很有意义的问题. Megginson[20] 证明了如下完美的序列型的等价命题：

**命题 2.1** 设 $X$ 是 Banach 空间，则下列条件等价：

(1) $X$ 为一致凸的，即任意 $\varepsilon \in (0,2]$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $x, y \in S(X)$ 和 $\|x-y\| \geq \varepsilon$ 时，有 $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta$;

(2) 对任何 $\{x_n\}$,$\{y_n\} \subset S(X)$, $\|x_n+y_n\| \to 2$ 可推出 $\|x_n-y_n\| \to 0$;

(3) 对任何 $\{x_n\}$,$\{y_n\} \subset B(X)$, $\|x_n+y_n\| \to 2$ 可推出 $\|x_n-y_n\| \to 0$;

(4) 对任何 $\{x_n\}$,$\{y_n\} \subset X$, $\|x_n\| \to 1$,$\|y_n\| \to 1$ 及 $\|x_n+y_n\| \to 2$ 可推出 $\|x_n-y_n\| \to 0$.

为证一组等价定理，我们先给出二条引理.

**引理 2.2** 设 $X$ 为大于 1 维的赋范空间，若 $x, y \in B(X)$, 则存在 $x_1, y_1 \in S(X)$, 满足 $x_1 - y_1 = x - y$, 且 $\|x_1+y_1\| \geq \|x+y\|$ .

证明：设 $x, y \in B(X)$，但 $x, y \notin S(X)$，因为

$$\max\{\|x+t(x+y)\|, \|y+t(x+y)\|\}$$

是 $t$ 的连续函数，存在 $t_0 > 0$ 使它的值等于 1, 不妨设

$$x_0 = x + t_0(x+y) \in S(X)\ ,\ y_0 = y + t_0(x+y) \in B(X)\ ,$$

则 $x_0 - y_0 = x - y, \|x_0+y_0\| \geq \|x+y\|$，所以 $\|x_0+y_0\| = \|x+y\|$. [20] 证明了“若 $x_0 \in S(X)$, $y_0 \in B(X)$, 则存在 $x_1, y_1 \in S(X)$, 使得 $x_1 - y_1 = x_0 - y_0$ 且 $\|x_1+y_1\| \geq \|x_0+y_0\|$ ”，从而得证.

**引理 2.3** 设 $X$ 为大于一维的赋范空间，若 $x_0, y_0 \in S(X)$，$\|x_0-y_0\| = \alpha$, 则对任何 $\varepsilon \in [0,\alpha]$，存在 $x_1, y_1 \in S(X)$，使得 $\|x_1-y_1\| = \varepsilon$，且 $\|x_1+y_1\| \geq \|x_0+y_0\|$.

证明：当 $\varepsilon=0$ 时结论显然成立，当 $\varepsilon=\alpha$ 时由引理 2.2 知结论成立.

设 $0<\varepsilon<\alpha$，取 $x_2=x_0+\frac{\varepsilon}{\alpha}(y_0-x_0)$,$y_2=y_0+\frac{\varepsilon}{\alpha}(x_0-y_0)$，由 $\|x_2-x_0\|=\varepsilon$, $\|y_2-y_0\|=\varepsilon$ 得 $\|x_2\|\le\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha}\|x_0\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}\|y_0\|=1$,$\|y_2\|\le\frac{\alpha-\varepsilon}{\alpha}\|y_0\|+\frac{\varepsilon}{\alpha}\|x_0\|=1$，故 $x_2,y_2\in B(X)$.

设 $x_3=\frac{x_2+x_0}{2}$，$y_3=\frac{y_2+y_0}{2}$，则 $x_3+y_3=x_0+y_0$. 不妨设 $\|x_3\|\ge\|y_3\|$, $\|x_3\|\ge\frac{x_0+y_0}{2}$, 由引理 2.2, 存在 $x_1,y_1\in S(X)$, 使得 $x_1-y_1=x_2-x_0$, $\|x_1+y_1\|\ge\|x_2+x_0\|=2\|x_3\|\ge\|x_0+y_0\|$, 证毕.

**定理 2.4** 令 $X$ 是一个 Banach 空间，下列每个说法都是一致凸的等价命题：

(5) 任意 $\varepsilon\in(0,2)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in S(X)$ 和 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le1-\delta$;

(6) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in S(X)$ 和 $\|x-y\|=\varepsilon$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le1-\delta$;

(7) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in B(X)$ 和 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le1-\delta$;

(8) 任意 $\varepsilon\in(0,2)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in B(X)$ 和 $\|x-y\|>\varepsilon$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le1-\delta$;

(9) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in B(X)$ 和 $\|x-y\|=\varepsilon$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le1-\delta$;

(10) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|\ge\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le(1-\delta)\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(11) 任意 $\varepsilon\in(0,2)$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|>\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le(1-\delta)\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(12) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|=\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|\frac{x+y}{2}\|\le(1-\delta)\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(13) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|\ge\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|x+y\|\le(1-\delta)(\|x\|+\|y\|)$ 或者 $|\|x\|-\|y\||\ge\delta\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(14) 任意 $\varepsilon\in(0,2)$, 存在 $\delta>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|>\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|x+y\|\le(1-\delta)(\|x\|+\|y\|)$ 或者 $|\|x\|-\|y\||\ge\delta\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(15) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|x-y\|=\varepsilon\max\{\|x\|,\|y\|\}$ 时，$\|x+y\|\le(1-\delta)(\|x\|+\|y\|)$ 或者 $|\|x\|-\|y\||\ge\delta\max\{\|x\|,\|y\|\}$;

(16) 任意 $\varepsilon\in(0,2]$, 存在 $\delta>0$，当 $x,y\in X$ 和 $\|y\|\ge\varepsilon\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$ 时，

$\|x\| \le (1-\delta)(\|x+y\|+\|x-y\|)$.

证明：　(1) $\Rightarrow$ (5), 显然成立.

(5) $\Rightarrow$ (1), 任意 $\varepsilon \in (0,2]$ , 设 $x, y \in S(X)$ 且 $\|x-y\| \ge \varepsilon$ , 由 (5) , 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $x, y \in S(X)$ 和 $\|x-y\| > \frac{\varepsilon}{2}$ 时, 有 $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta$, 从而因 $\|x-y\| \ge \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$, 故 $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta$.

(1) $\Rightarrow$ (6) , 显然成立.

(6) $\Rightarrow$ (1) , 任意 $\varepsilon \in (0,2]$ , 设 $x, y \in S(X)$ 且 $\|x-y\| \ge \varepsilon$ , 由引理 2.3, 存在 $x_1, y_1 \in S(X)$, 使得 $\|x_1-y_1\| = \varepsilon$ , 且 $\|x_1+y_1\| \ge \|x+y\|$, 由 (6), 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $x, y \in S(X)$ 和 $\|x-y\| = \varepsilon$ 时, 有 $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta$, 从而 $\|\frac{x+y}{2}\| \le \|\frac{x_1+y_1}{2}\| \le 1-\delta$ .

(7) $\Rightarrow$ (1) , 显然成立.

(1) $\Rightarrow$ (7) , 任意 $\varepsilon \in (0,2]$ , 设 $x, y \in B(X)$ 且 $\|x-y\| \ge \varepsilon$ , 由引理 2.2, 存在 $x_1, y_1 \in S(X)$, 使得 $x_1-y_1 = x-y$ , 且 $\|x_1+y_1\| \ge \|x+y\|$, 由 (1), 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $x_1, y_1 \in S(X)$ 和 $\|x_1-y_1\| \ge \varepsilon$ 时, 有 $\|\frac{x_1+y_1}{2}\| \le 1-\delta$, 从而 $x, y \in B(X)$ 及 $\|x-y\| \ge \varepsilon$ 时, 有 $\|\frac{x+y}{2}\| \le \|\frac{x_1+y_1}{2}\| \le 1-\delta$ .

容易证明 (7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (5) , (7) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$ (6), (7) $\Rightarrow$ (10) $\Rightarrow$ (1), (9) $\Rightarrow$ (11) $\Rightarrow$ (5), (9) $\Rightarrow$ (12) $\Rightarrow$ (6) .

下面证明 (3) $\Rightarrow$ (13) , 若不成立, 则存在 $\varepsilon > 0$ , $x_n, y_n \in X$ 使得

$$\|x_n - y_n\| \ge \varepsilon \max\{\|x_n\|, \|y_n\|\},$$

$$\|x_n + y_n\| > (1-1/n)(\|x_n\|+\|y_n\|),$$

且

$$|\|x_n\| - \|y_n\|| < \frac{1}{n}\max\{\|x_n\|, \|y_n\|\}.$$

记 $\max\{\|x_n\|, \|y_n\|\} = \alpha_n$ , 则 $\alpha_n > 0$ , 于是 $\frac{x_n}{\alpha_n}, \frac{y_n}{\alpha_n} \in B(X)$, $\|\frac{x_n}{\alpha_n} - \frac{y_n}{\alpha_n}\| \ge \varepsilon > 0$, 且容易计算 (不妨设 $\|x_n\| = \alpha_n$)

$$\begin{aligned}
\|\frac{x_n}{\alpha_n} + \frac{y_n}{\alpha_n}\| &= \frac{\|x_n+y_n\|}{\alpha_n} \\
&> \frac{(1-\frac{1}{n})(\|x_n\|+\|y_n\|)}{\alpha_n} \\
&> \frac{(1-\frac{1}{n})(2\alpha_n - \frac{1}{n}\alpha_n)}{\alpha_n} \\
&\to 2.
\end{aligned}$$

这与 (3) 相悖.

(13) $\Rightarrow$ (16), 在 (16) 中令 $x = x + y$, $y = x - y$ 即得.

易证 (13) $\Rightarrow$ (1) 和 (13) $\Rightarrow$ (14) $\Rightarrow$ (5), (13) $\Rightarrow$ (15) $\Rightarrow$ (6), 证毕.

# 第三章　Musielak-Orlicz 空间的一致凸性

赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 空间的一致凸性最早由 H.Hudzik[9][10] 给出刻划，吴从炘等四人书 [21] 给了更完美的形式，但没有对主要部分进行证明，陈述涛 [22] 重新给出了证明．然而其第二个引理的结论有误，本文将更正这个错误 (使引理的条件变弱), 并且修正主要定理的证明．

**定义 3.1** 设 $(T,\Sigma,\mu)$ 是一个无原子测度空间， $M(t,u)$ 为定义在 $T\times R$ 上的函数，$M: T\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足：

(*) 任意 $t\in T$ , $M(t,0)=0$ ; $\lim\limits_{u\to\infty}M(t,u)=+\infty$ , 且对某个 $u'>0$ 有 $M(t,u')<\infty$;

(**) 任意 $t\in T$ , $M(t,u)$ 是 $u\in[0,+\infty)$ 上的凸函数;

(* * *) 任意 $u\in[0,+\infty)$ , $M(t,u)$ 是 $t\in T$ 上的可测函数.

对于一个 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ , 记 $X_T$ 为 $T$ 到 $X$ 的所有强 $\mu-$ 可测函数的集合，对每个 $x\in X_T$, 定义 $x$ 的模为 $\rho_M(x)=\int_T M(t,\|x(t)\|)dt$, 于是 Musielak-Orlicz 空间就是

$$L^M=\{x:\exists\lambda>0,\rho_M(\lambda x)<\infty\},$$

其 Luxemburg 范数为

$$\|x\|_M=\inf\{\lambda>0:\rho_M(\tfrac{x}{\lambda})\le 1\},$$

它是一个 Banach 空间.

函数 $M(t,u)$ 满足 $\Delta$ 条件：存在 $K\ge 1$ 和 $T$ 上的非负可测函数 $\delta(t)$, 使得 $\int_T M(t,\delta(t))dt<\infty$, 且对几乎所有的 $t\in T$, 只要 $u\ge\delta(t)$, 就有 $M(t,2u)\le KM(t,u)$. 在下文中我们还定义集合 $e(t)=\sup\{u\ge 0:M(t,u)=0\}$.

**引理 3.2** 对每个 $\varepsilon,c\in(0,1)$ 和 $t\in T$ , 令

$$E_t=\{(u,v):u,v\ge 0,|u-v|\ge\varepsilon\max(u,v),M(t,\tfrac{u+v}{2})>(1-c)\tfrac{M(t,u)+M(t,v)}{2}\},$$

令 $P_{\varepsilon,c}=\sup\{u-v:(u,v)\in E_t\}$. 若可测函数列 $\{u_k^c(t),v_k^c(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

(1) $|u_k^c(t)-v_k^c(t)| \nearrow P_{\varepsilon,c(t)}$ , $t\in T$

(2)$u_k^c(t)\neq v_k^c(t)$, 则我们有:

$$|u_k^c(t)-v_k^c(t)|>\varepsilon\max\{u_k^c(t),v_k^c(t)\}$$

和

$$M(t,\tfrac{u_k^c(t)+v_k^c(t)}{2})>(1-c)\tfrac{M(t,u_k^c(t))+M(t,v_k^c(t))}{2}.$$

证明: 在 $[0,+\infty)$ 上选一对稠密集 $\{r_k'\}$, $\{r_k''\}$, 任意 $k\in N$ , 令条件 (*) 为

$$|r_k'-r_k''|>\varepsilon\max\{r_k',r_k''\}, M(t,\tfrac{r_k'+r_k''}{2})>(1-c)\tfrac{M(t,r_k')+M(t,r_k'')}{2},$$

并且令

$$(r_k'(t),r_k''(t))=\begin{cases}(r_k',r_k''), & (*)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

再令 $(u_1^c(t),v_1^c(t))=(r_1'(t),r_2''(t))$,

$$(u_{k+1}^c(t),v_{k+1}^c(t))=\begin{cases}(r_{k+1}'(t),r_{k+1}''(t)), & |r_{k+1}'(t)-r_{k+1}''(t)|>|r_k'(t)-r_k''(t)|\\ (u_k^c(t),v_k^c(t)), & \text{其它}\end{cases}$$

则 $|u_k^c(t)-v_k^c(t)|\leq P_{\varepsilon,c}(t)$ , $t\in T$ , 只要验证 $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k^c(t)-v_k^c(t)|\geq P_{\varepsilon,c}(t)$, 这是因为, 对于给定的 $t\in T$ , 若 $P_{\varepsilon,c}(t)=0$, 则对一切 $k\in N$ , $|u_k^c(t)-v_k^c(t)|=0$; 若 $P_{\varepsilon,c}(t)\neq 0$ , 那么存在 $(u_k,v_k)$ , 使得 $|u_k-v_k|\nearrow P_{\varepsilon,c}(t)$ 且 $|u_k-v_k|>\varepsilon\max\{u_k,v_k\}$ , $M(t,\frac{u_k+v_k}{2})>(1-c)\frac{M(t,u_k)+M(t,v_k)}{2}$ . 对于每个 $k\in N$ , 由于 $M(t,\cdot)$ 在 $[0,E(t))$ 上连续以及 $\{r_k'\}$ , $\{r_k''\}$ 稠密, 存在充分接近 $(u_k,v_k)$ 的点 $(r_{k_i}',r_{k_i}'')\in\{(r_k',r_k'')\}$ 使得

$$|r_{k_i}'-r_{k_i}''|\geq|u_k-v_k|, |r_{k_i}'-r_{k_i}''|>\varepsilon\max\{r_{k_i}',r_{k_i}''\}$$

且

$$M(t,\tfrac{r_{k_i}'+r_{k_i}''}{2})>(1-c)\tfrac{M(t,r_{k_i}')+M(t,r_{k_i}'')}{2}.$$

于是由 $\{u_k^c(t),v_k^c(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 的定义, 当 $n>k_i$ 时有

$$|u_k^c(t)-v_k^c(t)|\geq|r_{k_i}'-r_{k_i}''|\geq|u_k-v_k|,$$

因而

$$\lim_{k\to\infty}|u_k^c(t)-v_k^c(t)|\geq P_{\varepsilon,c}(t).$$

**注:** 结论 " $|u_k^c(t)-v_k^c(t)|>\varepsilon\max\{u_k^c(t),v_k^c(t)\}$ " 在原文中是

" $M(t,\frac{|u_k^c(t)-v_k^c(t)|}{2})>\frac{1}{2}\max\{M(t,\varepsilon u_k^c(t)),M(t,\varepsilon v_k^c(t))\}$ ",

后者蕴含前者, 但不能从本引理条件证出. 这个引理主要用于下述主要定理中 (I)⇒(II)

的 $\lim_{c\to 0}\int_T M(t,P_{\varepsilon,c}(t))dt=0$ , 并且保证 (III) 中的一致凸条件是明晰的.

**定理 3.3** 下列结论等价:

(I) $L^M$ 是一致凸的;

(II) $M\in\Delta$ , $X$ 一致凸, $e(t)=0$ 在 $T$ 上几乎处处成立; 并且对每个 $\varepsilon\in(0,1)$ , $\lim_{c\to 0}\int_T M(t,P_{\varepsilon,c}(t))dt=0$;

(III) $M\in\Delta$ , $X$ 一致凸, $e(t)=0$ 在 $T$ 上几乎处处成立; 并且对每个 $\varepsilon\in(0,1)$ , 存在 $\delta>0$ 和 $f(t)\geq 0$ , $\int_T M(t,f(t))dt\leq\varepsilon$ , 使得对几乎所有的 $t\in T$ 和所有 $x,y\geq 0$, 只要 $|x-y|\geq\varepsilon\max\{x,y\}$ , $|x-y|\geq f(t)$ , 就有 $M(t,\frac{x+y}{2})\leq\frac{1-\delta}{2}[M(t,x)+M(t,y)]$ .

由于引理结论比原文弱了, $(I)\Rightarrow(II)$ 中的 $\lim_{c\to 0}\int_T M(t,P_{\varepsilon,c}(t))dt=0$ 需要重新证明.

证明: 由 $|u_k^c(t)-v_k^c(t)|\nearrow P_{\varepsilon,c}(t)$ , $t\in T$ 及 Levy 定理知

$$\lim_{k\to\infty}\int_T M(t,|u_k^c(t)-v_k^c(t)|)dt=\int_T M(t,P_{\varepsilon,c}(t))dt.$$

如果 $\lim_{c\to 0}\int_T M(t,P_{\varepsilon,c}(t))=0$ 不真, 则有 $\delta>0$ 和 $c_n\searrow 0$ 使得

$$\rho_M(|u_n-v_n|)>\delta\ (n\in N),$$

这里 $u_n=u_{k_n}^{c_n},v_n=v_{k_n}^{c_n}$ 满足引理 3.2 的条件. 再由按模收敛与按范数收敛的等价性, 存在 $h\in(0,\delta)$ , 使得 $\rho_M(u)\leq h$ 时, $\|u\|_M\leq\varepsilon$ . 选取 $e_n\subset\{t\in T:u_n(t)\neq v_n(t)\}$ 使得 $\int_{e_n}M(t,|u_n(t)-v_n(t)|)dt=h$ , 注意到

$$M(t,|u_n(t)-v_n(t)|)>\max\{M(t,\varepsilon u_n(t)),M(t,\varepsilon v_n(t))\},$$

从 $\int_{e_n}M(t,\varepsilon u_n(t))dt\leq\int_{e_n}M(t,|u_n(t)-v_n(t)|)dt=h$, 就有

$$\|\varepsilon u_n x\chi_{e_n}\|_M\leq\varepsilon \text{ 或即 } \|u_n x\chi_{e_n}\|_M\leq 1,$$

这里 $x\in S(X)$ , 同理 $\|v_n x\chi_{e_n}\|_M\leq 1$ . 令

$$T_1=\{t\in e_n:M(t,u_n(t))\geq M(t,v_n(t))\},T_2=e_n/T_1,$$

则

$$\int_{T_1}[M(t,u_n(t))-M(t,v_n(t))]\,dt=\alpha_1\geq 0,$$

$$\int_{T_2}[M(t,v_n(t))-M(t,u_n(t))]\,dt=\alpha_2\geq 0,$$

从第一个不等式可找到 $E_1 \subset T_1$ 使得 $\int_{E_1}[M(t,u_n(t)) - M(t,v_n(t))]dt = \frac{\alpha_1}{2}$, 或即

$$\int_{E_1} M(t,u_n(t))dt + \int_{T_1/E_1} M(t,v_n(t))dt = \int_{T_1/E_1} M(t,u_n(t))dt + \int_{E_1} M(t,v_n(t))dt.$$

同理存在 $E_2 \subset T_2$ 使得

$$\int_{E_2} M(t,v_n(t))dt + \int_{T_2/E_2} M(t,u_n(t))dt = \int_{T_2/E_2} M(t,v_n(t))dt + \int_{E_2} M(t,u_n(t))dt.$$

定义

$$(x_n'(t), y_n'(t)) = \begin{cases} (u_n(t), v_n(t))x, & t \in E_1 \cup (T_2/E_2) \\ (v_n(t), u_n(t))x, & t \in E_2 \cup (T_1/E_1) \\ (0,0), & \text{其它} \end{cases},$$

则从上述等式相加并注意到 $\|u_n x\chi_{e_n}\|_M \le 1, \|v_n x\chi_{e_n}\|_M \le 1$ 得到 $\int_{e_n} M(t,u_n(t))dt \le 1, \int_{e_n} M(t,v_n(t))dt \le 1$ ，这样就有 $0 < \rho_M(x_n') = \rho_M(y_n') = \beta \le 1$ ，因为 $\mu(T/e_n) > 0$, 可以找到 $\sigma > 0$ 和 $F_n \subset T/e_n$ 使得 $\int_{F_n} M(t,\sigma)dt = 1 - \beta$. 现在令

$$(x_n(t), y_n(t)) = \begin{cases} (x_n'(t), y_n'(t)), & t \in T/T_n \\ (\sigma x, \sigma x), & t \in F_n \end{cases}.$$

则容易计算出 $\rho_M(x_n) = \rho_M(y_n) = 1$, 所以 $x_n, y_n \in S(L^M)$. 另一方面，当 $\|x_n - y_n\|_M \le 1$ 时，有

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\|_M &\ge \rho_M(x_n - y_n) \\ &= \int_{e_n} M(t, |u_n(t) - v_n(t)|)dt \\ &= h > 0 \ . \end{aligned}$$

所以 $\|x_n - y_n\|_M \ge \min\{1, h\}$ . 然而

$$\begin{aligned} \|\frac{x_n+y_n}{2}\|_M &\ge \rho_M(\frac{x_n+y_n}{2}) \\ &= \int_{e_n} M(t, \frac{u_n(t)+v_n(t)}{2})dt + \int_{F_n} M(t,\sigma)dt \\ &\ge (1-c_n)\int_{e_n} \frac{M(t,u_n(t)) + M(t,v_n(t))}{2} + \int_{F_n} M(t,\sigma)dt \\ &\ge (1-c_n)\frac{\rho_M(x_n)+\rho_M(y_n)}{2} \\ &= 1 - c_n \to 1 \ , \end{aligned}$$

这与 (I) 矛盾，证毕.

# 第四章 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 空间的一致凸性

一个函数 $\omega:[0,\gamma)\to R_+(\gamma\le\infty)$ 表示一个非增可积函数，我们称之为权函数. 令 $W(x)=\int_0^x\omega$, 则权函数称为正则的是指：若对任意 $x\in[0,\frac{\gamma}{2})$, 及某个常数 $K>1$, 有 $W(2x)\ge KW(x)$ 成立. 令 $\mathfrak{M}$ 表示所有 $f:(0,\gamma)\to R$ 组成的集合，且 $f$ 对于 Lebesgue 测度 $\mu$ 是可测的. 对于 $f\in\mathfrak{M}$, 我们定义它的分布函数

$$d_f(\theta)=\mu\{s\in(0,\gamma),|f(s)|>\theta\},\qquad \theta\ge 0$$

及 $|f|$ 的非增等可测重排

$$f^*(t)=\inf\{\theta>0:d_f(\theta)\le t\}\qquad t\in(0,\gamma).$$

出于传统习惯的考虑，本章中的 Orlicz 函数用 $\varphi$ 表示，它的余函数用 $\psi$ 来表示，即

$$\psi(u)=\sup_{v>0}\{uv-\varphi(v),\ \ u\in R_+\}.$$

对于 $f\in\mathfrak{M}$, 令

$$\rho_\varphi(f)=\int_0^\gamma\varphi(f^*(t))\omega(t)dt=\int_0^\gamma\varphi^*(|f(t)|)\omega(t)dt,$$

则 Orlicz-Lorentz 空间定义如下：

$$\Lambda_{\varphi,\omega}=\{f\in\mathfrak{M}:\text{存在 }\lambda>0,\text{ 使得 }\rho_\varphi(\lambda f)<\infty\}.$$

令

$$\|f\|=\inf\{\lambda>0:\rho_\varphi(\tfrac{f}{\lambda})\le 1\},$$

$$\|f\|^\circ=\sup_{\rho_\psi(g)\le 1}\int_0^\gamma f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt,$$

这里 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|^\circ$ 分别称为 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数. 我们简记空间为 $\Lambda_{\varphi,\omega}=(\Lambda_{\varphi,\omega},\|\cdot\|)$, $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}=(\Lambda_{\varphi,\omega},\|\cdot\|^\circ)$ , 已经证明它们都是 Banach 空间.

参考陈述涛 [22] 的相应定理及其证明不难验证下面的命题 4.1 中的各条结果对于 $\gamma\le\infty$ 均成立.

**命题 4.1**([19][22][23]) 以下结论成立：

(1) $\|f\|^\circ=\inf_{k>0}\frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kf))$;

(2) 对于任意 $f\in\Lambda_{\varphi,\omega}$, 有 $\|f\|\le\|f\|^{\circ}\le 2\|f\|$;

(3) 若 $\|f\|^{\circ}\le 1$, 则有 $\rho_{\varphi}(f)\le\|f\|^{\circ}$;

(4) 设 $p$ 是 $\varphi$ 的右导数，若存在 $k>1$ 满足 $\rho_{\psi}(p(k|f|))=1$, 则有

$$\|f\|^{\circ}=\int_0^{\gamma}f^*(t)p(kf^*(t))\omega(t)=\tfrac{1}{k}(1+\rho_{\varphi}(kf));$$

(5) 对任意 $f\in\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$, $k\in K(f)=[k^*,k^{**}]$ 的充要条件为

$$\|f\|^{\circ}=\tfrac{1}{k}(1+\rho_{\varphi}(kf)),$$

其中

$$k^*=k^*(u)=\inf\{k>0:\rho_{\psi}(p(k(|u|)))\ge 1\},k^{**}=k^{**}(u)=\sup\{k>0:\rho_{\psi}(p(k(|u|)))\le 1\};$$

(6) $\inf\{k:k\in K(x),\|x\|^{\circ}=1\}>1$ 当且仅当 $\varphi\in\Delta_2$;

(7) 设 $W(t)=\int_0^t\omega(s)ds$, 对于 $t<\infty$, 有

$$\|\chi_{(0,t)}\|^{\circ}_{\Lambda_{\varphi,\omega}}=\psi^{-1}(\tfrac{1}{W(t)})\cdot W(t).$$

一个函数 $\sigma:(0,\gamma)\to(0,\gamma)$ 称为保测变换：若对于每一个可测集 $E\subset(0,\gamma)$, $\sigma^{-1}(E)$ 是可测的，且 $\mu(\sigma^{-1}(E))=\mu(E)$. 关于 $\varphi\in\Delta_2$, 总是指，在 $\gamma<\infty$ 时对应较大变量满足 $\Delta_2$ 条件，而 $\gamma=\infty$ 时对应一致变量满足 $\Delta_2$ 条件.

Kaminska 给出了 $\gamma\le\infty$ 时赋 Luxemburg 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件，本文将给出赋 Orlicz 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件，我们先介绍几个引理.

**引理 4.2** 设 $Q=\bigcup\{K(f):a\le\|f\|^{\circ}\le b\}$, 其中 $b\ge a>0$, 则

(i) 当 $\gamma<\infty$ 时，集合 $Q$ 有上界的充要条件为 $\varphi\in\nabla_2$(对较大变量)；

(ii) 当 $\gamma=\infty$ 时，若 $\varphi\in\Delta_2$, 集合 $Q$ 有上界的充要条件为 $\varphi\in\nabla_2$(对一切变量).

证明： (i) 当 $\gamma<\infty$ 时，充分性

假设 $\varphi\in\nabla_2$, 取 $u_0$, 满足 $2\int_0^{\gamma}\varphi(u_0)w=1$, 由 $\nabla_2$ 条件，存在 $\delta>0$, 满足

$$\varphi(2u)\ge(2+\delta)\varphi(u)\ (u\ge u_0).$$

设 $\beta=1+\frac{\delta}{2}>1$ , 上述不等式变为

$$\varphi(2u)\ge 2\beta\varphi(u)\ (u\ge u_0).$$

对于给定的 $b \geq a > 0$，可以断言 $\frac{1}{a}2^{2+\log_\beta \frac{8b}{a}}$ 是集合 $Q$ 的上界. 事实上，对于 $a \leq \|f\|^{\circ} \leq b$，因为

$$a \leq \|f\|^{\circ} \leq \tfrac{a}{2}[1+\rho_\varphi(\tfrac{2}{a}f)],$$

这就说明 $\rho_\varphi(2a^{-1}f) \geq 1$. 所以有

$$\rho_\varphi(\tfrac{2}{a}f\chi_H) \geq \rho_\varphi(\tfrac{2}{a}f) - \int\varphi(u_0)w \geq \tfrac{1}{2},$$

这里 $H = \{t \in [0,\infty) : 2a^{-1}|f(t)| \geq u_0\}$.

对于任意 $k \in K(f)$，若 $k > \frac{4}{a}$，则存在一个整数 $i \geq 1$，使得 $2^i < 2^{-1}ak \leq 2^{i+1}$，由前面的断言可知只要证明 $\beta^i \leq \frac{8b}{a}$. 因为

$$\varphi(2^i u) \geq 2^i\beta^i\varphi(u)(u \geq u_0),$$

因此有

$$\begin{aligned}
b &\geq \|f\|^{\circ} = k^{-1}[1+\rho_\varphi(kf)] \\
&\geq \int k^{-1}\varphi^*(2^{-1}ak2a^{-1}f(t)\chi_H)\omega(t)dt \\
&\geq \int k^{-1}\beta^i 2^i\varphi^*(2a^{-1}f(t)\chi_H)\omega(t)dt \\
&\geq k^{-1}\beta^i 2^{i-1} \\
&\geq 8^{-1}a\beta^i,
\end{aligned}$$

所以 $\beta^i \leq \frac{8b}{a}$.

必要性

假设 $\varphi \notin \nabla_2$，则存在 $l_n \nearrow \infty$，$u_n \nearrow \infty$，使得 $l_1 > 2^2$，$2\int\varphi(u_n)\omega \geq 1$ 且

$$\varphi(l_n u_n) < (1+\tfrac{1}{n})l_n\varphi(u_n) \quad (n \in N).$$

对于每个 $n \in N$，选取 $T_n \in \Sigma$，使得 $\int\varphi^*(u_n\chi_{T_n})\omega = \frac{1}{2}$，且定义 $f_n(t) = u_n\chi_{T_n}(t)$，则

$$\begin{aligned}
2^{-1} &= \rho_\varphi(f_n) \\
&\leq \|f_n\|^{\circ} \\
&\leq l_n^{-1}[1+\rho_\varphi(l_n f_n)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= l_n^{-1}+l_n^{-1}\int\varphi^*(l_nu_n\chi_{T_n})\omega\\
&< l_n^{-1}+l_n^{-1}(1+n^{-1})l_n\int\varphi^*(u_n\chi_{T_n})\omega\\
&= l_n^{-1}+2^{-1}(1+n^{-1})\to 2^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

若 $k_n\in K(f_n)$，则因为 $\|f_n\|^\circ<1(n\geq 2)$，有 $k_n>1$，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{l_n}+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) &> \|f_n\|^\circ\\
&= \frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\int\varphi^*(k_nu_n\chi_{T_n})\omega\\
&> \frac{1}{k_n}+\int\varphi^*(u_n\chi_{T_n})\omega\\
&= \frac{1}{k_n}+\frac{1}{2}\ (n\geq 2)\ .
\end{aligned}
$$

设 $n\to\infty$，则有 $k_n\to\infty$，矛盾.

(ii) 当 $\gamma=\infty$ 时，必要性仿 (i).

充分性：已知 $\varphi\in\Delta_2$，则对于任意 $\lambda>0$，有 $\rho_\varphi(\lambda f)<\infty$，所以存在 $\gamma_1>0$ 及 (i) 中的 $a,b$，使得 $\int_{\gamma_1}^\infty\varphi^*(\frac{2}{a}f(t))\omega(t)dt<\frac{1}{4}$. 取 $u_0>0$，满足 $\int_0^{\gamma_1}\varphi(u(t))\omega(t)dt\leq\frac{1}{4}$，令 $H=\{t\in\sigma^{-1}[0,\gamma_1]:2a^{-1}|f(t)|\geq u_0\}$. 所以有

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \rho_\varphi(\frac{2}{a}f)\\
&\leq \int_0^{\gamma_1}\varphi^*(\frac{2}{a}f(t))\omega(t)dt+\int_{\gamma_1}^\infty\varphi^*(\frac{2}{a}f(t))\omega(t)dt\\
&\leq \int_0^{\gamma_1}\varphi^*(\frac{2}{a}f(t))\omega(t)dt+\varphi(u_0)\int_0^{\gamma_1}\omega(t)dt+\frac{1}{4}\\
&< \rho_\varphi(\frac{2}{a}f\chi_H)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

这样就得到 $\rho_\varphi(\frac{2}{a}f\chi_H)\geq\frac{1}{2}$，下面的证明同 (i).

**引理 4.3** 设 $\omega(t)$ 正则，即存在 $K>1$，满足对于所有的 $x\geq 0$，$W(2x)\geq KW(x)$，这里 $W(x)=\int_0^x\omega$. 则对于所有 $x>0$ 及所有的自然数 $n$，有

$$\int_{2^nx}^{(2^n+1)x}\omega\geq 2(\frac{K-1}{2})^{n+1}\int_0^x\omega.$$

证明：由条件得 $W(2^{n+1}x)\geq KW(2^nx)$，即

$$W(2^{n+1}x) - W(2^n x) \geq (K-1)W(2^n x) \geq (K-1)^{n+1}W(x),$$

则由 $\omega$ 的单调性得到

$$\begin{aligned} 2^n \int_{2^n x}^{(2^n+1)x} \omega &\geq \int_{2^n x}^{2^{n+1}x} \omega \\ &= W(2^{n+1}x) - W(2^n x) \\ &\geq (K-1)^{n+1}W(x). \end{aligned}$$

这样就得到

$$\int_{2^n x}^{(2^n+1)x} \omega \geq 2(\frac{K-1}{2})^{n+1} \int_0^x \omega.$$

**引理 4.4** 设 $W(x) = \int_0^x \omega$ 满足引理 4.3 的假设条件, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得对于每个简单非增函数 $h$ 满足 $\int h\omega \leq 1$, 且对于任意集合 $A$ 满足 $\int (h\chi_A)^* \omega \geq \varepsilon$, 则有 $\int_A h\omega \geq \varepsilon_1$.

证明: 取定 $\varepsilon > 0$ 及 $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{[a_{i-1}, a_i]}$, 这里 $0 = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$ 且 $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \alpha_n$. 设集合 $A$ 满足 $\int (h\chi_A)^* \omega \geq \varepsilon$.

定义

$$A_i = A \cap [a_{i-1}, a_i], \quad B_i = A \cap [0, a_i]$$

且

$$N_1 = \{i = 1, \cdots, n : a_i > 2^p \mu B_i\},$$
$$N_2 = \{i = 1, \cdots, n : a_i \leq 2^p \mu B_i\},$$

这里 $p$ 是满足 $k^p > \frac{2}{\varepsilon}$ 的自然数. 设 $\alpha_{n+1} = 0$, 就有

$$\begin{aligned} \int_A h\omega &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{A_i} \omega \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \int_{A_1 \cup \cdots \cup A_i} \omega \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \int_{B_i} \omega \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\int (h\chi_A)^*\omega &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{\mu B_{i-1}}^{\mu B_i}\omega \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}1 &\geq \int h\omega \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\alpha_i}\omega \\ &\geq \sum_{N_1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\alpha_i}\omega \\ &\geq \sum_{N_1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{2^p\mu B_i}\omega \\ &\geq k^p\sum_{N_1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega.\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是有由假设，因为

$$\begin{aligned}W(2^p\mu B_i) &= \int_0^{2^p\mu B_i}\omega \\ &\geq k^pW(\mu B_i) \\ &= k^p\int_0^{\mu B_i}\omega,\end{aligned}$$

所以

$$\textstyle\sum_{N_1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega\leq\frac{1}{k^p}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\textstyle\int(h\chi_A)^*\omega=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega\geq\varepsilon,$$

所以

$$\textstyle\sum_{N_2}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega>\frac{\varepsilon}{2}.$$

若 $i\in N_2$，则 $B_i\subset[0,\alpha_i]\subset[0,2^p\mu B_i]$ 并且由前面的引理得，

$$\textstyle\int_{B_i}\omega\geq 2(\frac{k-1}{2})^{p+1}\int_0^{\mu B_i}\omega,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_A h\omega &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_{B_i}\omega\\ &\geq \sum_{N_2}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_{B_i}\omega\\ &= 2(\frac{k-1}{2})^{p+1}\sum_{N_2}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\int_0^{\mu B_i}\omega\\ &> (\frac{k-1}{2})^{p+1}\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $p$ 仅依赖于 $k$ 和 $\varepsilon$，所以设 $\varepsilon_1=(\frac{k-1}{2})^{p+1}\varepsilon$ 即可完成引理的证明.

**引理 4.5** (见 [17]) 假设对于任意 $t\in A$, 其中 $\mu A>0$, 有 $|f(t)|<|g(t)|$, 且对于几乎处处的 $t\in[0,\gamma)$ 有 $|f(t)|\leq|g(t)|$. 则对于每个 $\theta>0, d_f(\theta)<\infty$, 有 $f^*(t)<g^*(t)$, 其中 $t\in B$, 且这里 $B\subset[0,\gamma)$ 具有正测度.

**引理 4.6** (见定理 1.3) $\varphi$ 为对一切变量一致凸的充要条件为对于任意 $\varepsilon>0$，$[a,b]\subset(0,1)$，存在 $\delta>0$ 满足

$$\varphi(\alpha u+(1-\alpha)v)\leq(1-\delta)[\alpha\varphi(u)+(1-\alpha)\varphi(v)],$$

其中 $\alpha\in[a,b]$ 且对于所有的 $u,v\in R$ 满足 $|u-v|\geq\varepsilon\max\{|u|,|v|\}$.

**引理 4.7** (见 [11]) 设 $f$ 和 $g$ 在 $(X,\mu)$ 上具有正测度，则 $\int_X|f(x)g(x)|d\mu(x)\leq\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt$.

**引理 4.8** 设 $k_n\geq a>0$，$\|f_n\|^\circ\leq M$ 并且 $\rho_\psi(p(k_nf_n))\to1$ 则

$$\lim_{n\to\infty}(\|f_n\|^\circ-\int_0^\gamma f_n^*p(k_nf_n^*)\omega)=0.$$

证明：对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N$, 当 $n>N$ 时，有 $\rho_\psi(\frac{1}{1+\varepsilon}p(k_nf_n))\leq\frac{1}{1+\varepsilon}\rho_\psi(p(k_nf_n))\leq1$ 及 $1\leq\rho_\psi(p(k_nf_n))+a\varepsilon$, 因此 $\|f_n\|^\circ\geq\int_0^\gamma f_n^*\frac{1}{1+\varepsilon}p(k_nf_n^*)\omega$, 即

$$\int_0^\gamma f_n^*p(k_nf_n^*)\omega\leq(1+\varepsilon)\|f_n\|^\circ\leq\|f_n\|^\circ+M\varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned} -M\varepsilon &\le \|f_n\|^\circ - \int_0^\gamma f_n^* p(k_n f_n^*)\omega \\ &\le \frac{1}{k_n}(1+\rho_\varphi(k_n f_n)) - \int_0^\gamma f_n^* p(k_n f_n^*)\omega \\ &\le \frac{1}{k_n}(\rho_\psi(p(k_n f_n)) + \rho_\varphi(p(k_n f_n)) + a\varepsilon) - \int_0^\gamma f_n^* p(k_n f_n^*)\omega \\ &= \frac{a\varepsilon}{k_n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

证毕.

**定理 4.9** $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}$ 空间严凸等价为以下条件满足:

(i) $\varphi$ 严格凸;

(ii) 函数 $\omega$ 在 $[0,\gamma)$ 上为正;

(iii) 若 $\gamma=\infty$, 则 $\int_0^\infty \omega=\infty$ .

证明: 充分性

设 $f,g\in\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}$ 满足 $\|f\|^\circ=\|g\|^\circ=1$ , $f\neq g$. 因为 $\varphi$ 严格凸, 则对任意 $\alpha>0,\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, 有

$$\varphi(|\alpha f(t)+\beta g(t)|)<\alpha\varphi(|f(t)|)+\beta\varphi(|g(t)|),$$

定义 $x=\varphi(|\alpha f+\beta g|)$, 则由 (iii), 当 $\gamma=\infty$ 时, $\inf\limits_{t\geq 0}x^*(t)=0$ . 则对于每个 $\theta>0$, $d_x(\theta)<\infty$ , 因此运用引理 4.5, 对于 $t\in B$,

$$x^*(t)<[\alpha\varphi(|f(t)|+\beta\phi(|g(t)|))]^*,$$

其中 $\mu B>0$, $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta=1$. 所以由 (ii) 得

$$\begin{aligned} 2 &= \|f\|^\circ+\|g\|^\circ \\ &= \frac{1}{k_1}(1+\rho_\varphi(k_1 f))+\frac{1}{k_2}(1+\rho_\varphi(k_2 g)) \\ &= \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left(1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\rho_\varphi(k_1 f)+\frac{k_1}{k_1+k_2}\rho_\varphi(k_2 g)\right) \\ &> \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left(1+\rho_\varphi(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(f^*+g^*))\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left(1+\rho_{\varphi}(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(f+g)^*)\right)\\
&\geq \|f+g\|^{\circ}.
\end{aligned}
$$

必要性

假设 (iii) 不满足，即 $\int_0^{\infty}\omega<\infty$ . 记 $W(\infty)=\int_0^{\infty}\omega$ , 并设

$$
f=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(\infty)})W(\infty)}\chi_{(0,\infty)},
$$

$$
g=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(\infty)})W(\infty)}\chi_{(1,\infty)}.
$$

因为 $\|\chi_{(0,\infty)}\|^{\circ}=\psi^{-1}(\frac{1}{W(\infty)})W(\infty)$ , 所以 $f\neq g$, $f^*=g^*=f$, $\|f\|^{\circ}=\|g\|^{\circ}=1$ 且 $(\frac{f+g}{2})^*=f^*=f$, 这样就得到 $\|\frac{f+g}{2}\|^{\circ}=1$, 矛盾.

若 (ii) 不成立，则由条件 (iii) 及 $\omega$ 的单调性，存在 $\gamma_0\in(0,\gamma)$, 对于 $t\in(\gamma_0,\gamma)$ 及有限的 $\gamma$, 满足 $\omega(t)=0$. 取 $\lambda>0$ 使得 $\int_0^{\gamma_0}\varphi(\lambda)\omega=1$, $f=\lambda$ 且 $g=\lambda\chi_{[0,\gamma_0]}+\frac{1}{2}\lambda\chi_{[\gamma_0,\gamma]}$, 则有 $f\neq g$, $\|f\|^{\circ}=\|g\|^{\circ}=\|\frac{f+g}{2}\|^{\circ}=\lambda\|\chi_{(0,\gamma_0)}\|^{\circ}=1$, 这与 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 的严格凸性矛盾.

若 (i) 不成立，则存在 $v_0>u_0$ 使得 $p(u)$ 在 $[u_0,v_0]$ 上为常数记为 $A$ . 设 $a>v_0$, $r_1>0$ 满足

$$
\psi(p(a))\int_0^{r_1}\omega(t)dt>1,
$$

$$
\psi(A)\int_0^{r_1}\omega(t)dt<1.
$$

记

$$
F(t)=\psi(p(a))\int_0^{t}\omega(t)dt+\psi(A)\int_t^{r_1}\omega(t)dt,
$$

则当 $t\to r_1$ 时，有

$$
F(t)\to\psi(p(a))\int_0^{r_1}\omega(t)dt>1,
$$

当 $t\to 0$ 时，有

$$
F(t)\to\psi(A)\int_0^{r_1}\omega(t)dt<1.
$$

所以，存在 $r_0$ , 当 $0<r_0<r_1$ 时满足

$$
\psi(p(a))\int_0^{r_0}\omega(t)dt+\psi(A)\int_{r_0}^{r_1}\omega(t)dt=1\ .
$$

假设 $\gamma_0<s<\gamma_1$, 则

$$
\psi(p(a))\int_0^{r_0}\omega(t)dt+\psi(A)(\int_{r_0}^{s}\omega(t)dt+\int_s^{r_1}\omega(t)dt)=1,
$$

又设 $\varepsilon,\beta>0$, 使得 $v_0-\varepsilon>u_0+\beta$ 且

$$\int_{r_0}^{s}(v_0-\varepsilon)\omega(t)dt+\int_{s}^{r_1}(u_0+\beta)\omega(t)dt=\int_{r_0}^{s}v_0\omega(t)dt+\int_{s}^{r_1}u_0\omega(t)dt.$$

令

$$k=ap(a)\int_0^{r_0}\omega(t)dt+\int_{r_0}^{s}Av_0\omega(t)dt+\int_{s}^{r_1}u_0\omega(t)dt,$$

$$f=\frac{1}{k}\left(a\chi_{[0,r_0]}+v_0\chi_{[r_0,s]}+u_0\chi_{[s,r_1]}\right),$$

$$g=\frac{1}{k}\left(a\chi_{[0,r_0]}+(v_0-\varepsilon)\chi_{[r_0,s]}+(u_0+\beta)\chi_{[s,r_1]}\right).$$

则 $f\neq g$, $f^*=f$, $g^*=g$, 且有

$$\frac{f+g}{2}=\frac{1}{k}a\chi_{[0,r_0]}+\frac{1}{k}\frac{v_0+v_0-\varepsilon}{2}\chi_{[r_0,s]}+\frac{1}{k}\frac{u_0+u_0+\beta}{2}\chi_{[s,r_1]},$$

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^*=\frac{f+g}{2}.$$

所以，得到

$$\rho_\psi(p(k|f|))=\psi(p(a))\int_0^{r_0}\omega(t)dt+\psi(A)\int_{r_0}^{s}\omega(t)dt+\psi(A)\int_{s}^{r_1}\omega(t)dt=1$$

及

$$\|f\|^{\circ}=\frac{1}{k}\left(\int_0^{r_0}ap(a)\omega(t)dt+\int_{r_0}^{s}v_0A\omega(t)dt+\int_{s}^{r_1}u_0A\omega(t)dt\right)=1.$$

同理， $\|g\|^{\circ}=1$ 并且 $\|\frac{f+g}{2}\|^{\circ}=1$, 这与 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 的严凸性相矛盾.

以下讨论一致凸的特征.

**定理 4.10** 设 $\gamma=\infty$ , 则 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 一致凸的充要条件为

(1) 对一切变量 $\varphi\in\Delta_2$;

(2) 对一切变量 $\varphi$ 一致凸;

(3) $\omega(t)$ 正则，即存在 $K>1$, 使得 $\frac{W(2x)}{W(x)}\geq K$, 其中 $W(x)=\int_0^x\omega$.

证明：充分性

由 (3) 得到 $\int_0^\infty\omega=\infty$, 事实上, 因为 $W(2x)\geq KW(x)$, 其中 $K>1$, 则 $\int_0^{2x}\omega\geq K\int_0^x\omega$. 令 $x\to\infty$, 所以 $\int_0^\infty\omega$ 不可能为有限数.

由 (2), 因为 $\varphi$ 为一致凸，故 $\varphi\in\nabla_2$. 假设 $x_n,y_n\in S(\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega})$ 满足 $\|x_n+y_n\|^{\circ}\to 2$ . 令 $k_n\in K(x_n)$, $h_n\in K(y_n)$, 则由引理 4.2 及命题 4.1(6) 得

$$1<d=\sup_n\{k_n,h_n\}<+\infty.$$

记

$$a=\inf_n\{\tfrac{k_n}{k_n+h_n},\tfrac{h_n}{k_n+h_n}\},\ b=\sup_n\{\tfrac{k_n}{k_n+h_n},\tfrac{h_n}{k_n+h_n}\},$$

得 $[a,b]\subset(0,1)$ . 因为 (2)$\varphi$ 一致凸，由引理 4.6, 存在 $\delta>0$ 使得对于任意 $\varepsilon>0$, $\lambda\in[a,b]$ 及所有 $u,v\in R$ 满足 $|u-v|\geq\varepsilon\max\{|u|,|v|\}$ 时，有

$$\varphi(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq(1-\delta)[\lambda\varphi(u)+(1-\lambda)\varphi(v)].$$

令 $\sigma_n$ 是保测变换满足

$$(x_n+y_n)^*=x_n(\sigma_n(t))+y_n(\sigma_n(t))\ .$$

设

$$T_n=\left\{t\in[0,\gamma):|k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t))|\geq\tfrac{\varepsilon}{4}\max(|k_nx_n(\sigma_n(t))|,|h_ny_n(\sigma_n(t))|)\right\},$$

则由 (3) 及引理 4.4 得

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi\left((k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t)))\chi_{T_n^c}\right)\\
=\ &\textstyle\int_0^\infty\left(\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t)-h_ny_n(\sigma_n(t))\chi_{T_n^c}\right)^*\omega(t)dt\\
\leq\ &\tfrac{\varepsilon}{4}\textstyle\int_0^\infty\left(\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t))\chi_{T_n^c}+\varphi(h_ny_n(\sigma_n(t))\chi_{T_n^c}\right)^*\omega(t)dt\\
\leq\ &\tfrac{\varepsilon}{4}(\rho_\varphi(k_nx_n)+\rho_\varphi(k_ny_n))\\
=\ &\varepsilon(k_n+h_n-2)\\
\leq\ &\varepsilon(2d-2)\qquad(*).
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
2-\|x_n+y_n\|^\circ &= \|x_n\|^\circ+\|y_n\|^\circ-\|x_n+y_n\|^\circ\\
&\geq \frac{1}{k_n}[1+\rho_\varphi(k_nx_n)]+\frac{1}{h_n}[1+\rho_\varphi(h_ny_n)]\\
&- \frac{k_n+h_n}{k_nh_n}[1+\rho_\varphi(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n+y_n))]\\
&= \frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_0^\infty\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_nx_n(t))^*+\frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_ny_n(t))^*\right.\\
&- \left.\varphi(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(t)+y_n(t)))^*\right]\omega(t)dt\\
&\geq \frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_0^\infty\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t)))+\frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_ny_n(\sigma_n(t)))\right.\\
&- \left.\varphi(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(\sigma_n(t))+y_n(\sigma_n(t)))\right]\omega(t)dt,
\end{aligned}$$

而在 $T_n$ 上

$$\varphi\left(\tfrac{k_nh_n}{k_n+h_n}(x_n(\sigma_n(t))+y_n(\sigma_n(t))\right)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi\left(\tfrac{h_n}{k_n+h_n}k_nx_n(\sigma_n(t)) + \tfrac{k_n}{k_n+h_n}h_ny_n(\sigma_n(t))\right) \\ &\le (1-\delta)\left[\tfrac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t))) + \tfrac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_ny_n(\sigma_n(t)))\right]. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} 2-\|x_n+y_n\|^{\circ} &\ge \delta\cdot\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_{T_n}\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t)))\right. \\ &+ \left.\frac{k_n}{k_n+h_n}\varphi(h_ny_n(\sigma_n(t)))\right]\omega(t)dt \\ &= \delta\int_{T_n}\left[\frac{1}{k_n}\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t))) + \frac{1}{h_n}\varphi(h_ny_n(\sigma_n(t)))\right]\omega(t)dt \\ &\ge \frac{2\delta}{d}\int_{T_n}\frac{\varphi(k_nx_n(\sigma_n(t)))+\varphi(-h_ny_n(\sigma_n(t)))}{2}\omega(t)dt \\ &\ge \frac{2\delta}{d}\int_{T_n}\varphi(\frac{k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t))}{2})\omega(t)dt. \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 有

$$\int_{T_n}\varphi(\tfrac{k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t))}{2})\omega(t)dt\to 0,$$

所以,

$$\int(\varphi(\tfrac{k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t))}{2})\chi_{T_n})^*\omega(t)dt\to 0\ .$$

由 (*), 就有

$$\rho_\varphi(\tfrac{k_nx_n(\sigma_n(t))-h_ny_n(\sigma_n(t))}{2}) = \rho_\varphi(\tfrac{k_nx_n-h_ny_n}{2})\to 0,$$

因为 (1) $\varphi\in\Delta_2$, 得到

$$\|k_nx_n-h_ny_n\|^{\circ}\to 0,$$

所以,

$$\begin{aligned} |k_n-h_n| &= |k_n\|x_n\|^{\circ}-h_n\|y_n\|^{\circ}| \\ &= |\|k_nx_n\|^{\circ}-\|h_ny_n\|^{\circ}| \\ &\le \|k_nx_n-h_ny_n\|^{\circ}\to 0, \end{aligned}$$

即 $k_n\to h_n$ . 我们就得到 $\|x_n-y_n\|^{\circ}\to 0$, 得证.

必要性

(1) 因为 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 一致凸, 得 $\varphi$ 自反, 因此 $\varphi\in\Delta_2$(见 [13]).

(2) 由定理 1.7 知, 若 $\varphi$ 不是一致凸, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $t_n\ge 0$, 满足 $p((1+\varepsilon_0)t_n)<$

$(1+\frac{1}{n})p(t_n)$. 令 $u_n=(1+\varepsilon_0)t_n$, 则 $p(u_n)<(1+\frac{1}{n})p(au_n)$, 其中 $a=\frac{1}{1+\varepsilon_0}\in(0,1)$. 设 $\{u_n\}$ 有一子列仍记为 $\{u_n\}$, 满足 $u_n\to u>0$, 则存在 $N_1\in N$, 当 $n>N_1$ 时, 使得 $u_n>u-\varepsilon_1$, 其中 $\varepsilon_1$ 满足 $au+\varepsilon_1<u-\varepsilon_1$, 所以 $p(u-\varepsilon_1)\le p(u_n)<(1+\frac{1}{n})p(au_n)<(1+\frac{1}{n})p(au+\varepsilon_1)$, 当 $n\to\infty$ 时, $p(u-\varepsilon_1)\le p(au+\varepsilon_1)$, 所以 $p(u-\varepsilon_1)=p(au+\varepsilon_1)$, 这就说明 $p(t)$ 在 $[au+\varepsilon_1,u-\varepsilon_1]$ 上为常数，也就说明 $\varphi$ 在 $[au+\varepsilon_1,u-\varepsilon_1]$ 上不是严格凸，因为一致凸可以推出严格凸，得出矛盾.

所以下面可以假设 $u_n\to 0$, 或者 $u_n\to\infty$. 当 $u_n\to 0$ 时，取数列 $\{u_n\}$, 假设 $au_n>u_{n+1}$; 当 $u_n\to\infty$ 时，取数列 $\{u_n\}$, 假设 $au_{n+1}>u_n$. 下面的证明仅证 $u_n\to 0$ 时的情况，另一种情况类似可证.

取定正实数 $u,v$, 并且定义满足下面两个式子的变量 $b,c$, $0\le b\le c$. 设

$$g(b,c)=\psi(p(u))\int_0^b\omega+\psi(p(av))\int_b^c\omega,$$

$$h(b,c)=\psi(p(au))\int_0^b\omega+\psi(p(v))\int_b^c\omega,$$

$$f(b,c)=g(b,c)-h(b,c).$$

下面可以证明存在 $c_0>0$, $b_0\in(0,c_0)$, 使得 $g(b_0,c_0)=1$, $f(b_0,c_0)=0$, 即 $g(b_0,c_0)=h(b_0,c_0)$. 事实上，因为 $f(0,c)<0$, $f(c,c)>0$, 所以存在 $b_c\in(0,c)$, 使得 $f(b_c,c)=0$. 定义函数 $b(c)=b_c$, 对于 $c\ge 0$, $b(c)$ 是一个连续递增的函数. 因为 $g(b,c)\ge\min\{\varphi(u),\varphi(av)\}\int_0^c\omega$, 且由 (3) 得 $\int_0^\infty\omega=\infty$, 因此当 $c\to\infty$ 时，$g(b(c),c)\to\infty$. 所以存在 $c_0>0$, 满足 $g(b(c_0),c_0)=1$. 设 $b_0=b(c_0)$, 即可得证.

以下分别用 $u_{2n-1},u_n$ 代替 $u,v$, 则存在 $y_n$, $x_n\in(0,y_n)$, 满足

$$\psi(p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega+\psi(p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega=1,$$

$$\psi(p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega+\psi(p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega=1.$$

记

$$k_n^f=u_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega+au_{2_n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega,$$

$$k_n^g=au_{2n-1}p(au_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega+u_{2_n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega.$$

定义

$$f_n=\frac{1}{k_n^f}[u_{2n-1}\chi_{[0,x_n]}+au_{2n}\chi_{[x_n,y_n]}],$$

$$g_n = \frac{1}{k_n^g}[au_{2n-1}\chi_{[0,x_n]} + u_{2n}\chi_{[x_n,y_n]}].$$

则有

$$\rho_\psi(p(k_n^f f_n)) = \psi(p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega + \psi(p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega = 1,$$

$$\rho_\psi(p(k_n^g g_n)) = \psi(p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega + \psi(p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega = 1.$$

所以有 $k_n^f \in K(f_n), k_n^g \in K(g_n)$ ，且

$$\|f_n\|^\circ = \int_0^\infty f_n^* p(k_n^f f_n^*)\omega = \frac{1}{k_n^f}\left[u_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega + au_{2n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] = 1,$$

$$\|g_n\|^\circ = \int_0^\infty g_n^* p(k_n^g g_n^*)\omega = \frac{1}{k_n^g}\left[au_{2n-1}p(au_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega + u_{2n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] = 1.$$

假设 $u_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega \to k_1$, $au_{2n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega \to k_2$(不然，因为它们有限，可取其子列). 因为 $\frac{p(u_n)}{p(au_n)} \to 1$, 所以 $k_n^f \to k_1 + k_2$ , $k_n^g \to ak_1 + \frac{1}{a}k_2$. 因为 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 一致凸，有 $\varphi$ 自反，得 $\varphi \in \nabla_2$, 由引理 4.2 知 $k_1, k_2$ 有界，这样可有下面两种情况：

I. $0 < k_1 < \infty, 0 < k_2 < \infty$.

设 $L = \max\left\{\frac{2(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}{(\frac{1}{a}-a)k_2}, \frac{2(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}{(1-a^2)k_1}, 3\right\}$.

由 $\varphi \in \Delta_2$, 则存在 $K > 1$, 满足 $\varphi(Lu) \le K\varphi(u)$ $(u > 0)$, 因为 $3\|f_n\| > \|f_n\|^\circ = 1$ , 故 $\|f_n\| > \frac{1}{3}$ 或 $\|3f_n\| > 1$ , 就有 $\rho_\varphi(3f_n) > 1$ . 因为 $k_n^f \in K(f_n)$ , 所以 $k_n^f - 1 = \rho_\varphi(k_n^f f_n) \ge 0$, 得到 $k_n^f \ge 1$. 而

$$\begin{aligned}
k_n^f &\le k_n^f \rho_\varphi(3f_n) \\
&\le \rho_\varphi(3k_n^f f_n) \\
&= \varphi(3u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega + \varphi(3au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega \\
&\le K\left[\varphi(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega + \varphi(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] \\
&= K\rho_\varphi(k_n^f f_n) \\
&= K(k_n^f - 1).
\end{aligned}$$

这样就得到 $k_n^f > \frac{K}{K-1}$ , 同理可得 $k_n^g > \frac{K}{K-1}$. 可以选择恰当的子列 (因 $\{u_n\}$ 单调递减) 使得

$$\frac{(\frac{1}{a}-a)k_2}{(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}u_{2n-1} > \frac{(1-a^2)k_1}{(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}u_{2n}.$$

取充分大的 $n$，得到

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(K^2(f_n-g_n)) &= \varphi\left(K^2(\frac{1}{k_n^f}-\frac{a}{k_n^g})u_{2n-1}\right)\int_0^{x_n}\omega+\varphi\left(K^2(\frac{a}{k_n^f}-\frac{1}{k_n^g})u_{2n}\right)\int_{x_n}^{y_n}\omega\\
&\geq K^2\left(\varphi(\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{a}-a)k_2}{(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega\right.\\
&+ \left.\varphi(\frac{1}{2}\frac{(1-a^2)k_1}{(k_1+k_2)(ak_1+\frac{1}{a}k_2)}u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right)\\
&\geq K^2\left(\varphi(\frac{1}{L}u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega+\varphi(\frac{1}{L}au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right)\\
&\geq K\left(\varphi(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega+\varphi(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right)\\
&= K(k_n^f-1)\\
&\geq K(\frac{K}{K-1}-1)=\frac{K}{K-1}>1,
\end{aligned}$$

因此 $\|f_n-g_n\|^\circ\geq\|f_n-g_n\|\geq\frac{1}{K^2}$.

II. $k_1=0, 0<k_2<\infty$ 或者 $0<k_1<\infty, k_2=0$.

只要考虑 $0<k_1<\infty, k_2=0$, 即 $au_{2n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\to 0$, 这说明 $\psi(p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\to 0$. 由 $p(u_n)<(1+\frac{1}{n})p(au_n)$, 就有 $u_{2n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\to 0$, 这说明 $\psi(p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\to 0$. 因此

$$\psi(p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega\to 1,\ \psi(p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega\to 1,$$

即 $\frac{\psi(p(u_{2n-1}))}{\psi(p(au_{2n-1}))}\to 1$. 取 $\{u_n\}$ 的子列仍记为 $\{u_n\}$，满足 $\frac{\psi(p(u_{2n}))}{\psi(p(au_{2n}))}\to 1$．同时取 $x_n,y_n$ 使得 $\psi(p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega\nearrow\frac{1}{2}$，$\psi(p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\nearrow\frac{1}{2}$, 因此得到

$$\psi(p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega+\psi(p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\nearrow 1,$$

$$\psi(p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega+\psi(p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\nearrow 1.$$

定义 $f_n, g_n, k_n^f, k_n^g$ 如情形 1 中，因此就有 $\rho_\psi(p(k_n^f f_n))\nearrow 1$, $\rho_\psi(p(k_n^g g_n))\nearrow 1$，得到 $k_n^g\geq\psi(p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega+\psi(p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\nearrow 1$ 并且 $\rho_\varphi(k_n^g g_n)\leq k_n^g$, 故 $\|g_n\|^\circ\leq\frac{1}{k_n^g}[1+\rho_\varphi(k_n^g g_n)]\leq 2$. 由引理 4.8 得 $\|g_n\|^\circ\to 1$, 同理 $\|f_n\|^\circ\to 1$. 对于新的序列 $\{u_n\}$，定义 $k_1,k_2$ 如情形 1 中，则 $\frac{1}{2}\leq k_1,k_2<\infty$. 同情形 1, 我们可以证得 $\|f_n-g_n\|^\circ\geq\frac{1}{K^2}$.

在两种情形的任一种中记 $k_n=\frac{k_n^f k_n^g}{k_n^f+k_n^g}$, 有

$$\begin{aligned} k_n(f_n+g_n) &= \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}k_n^f f_n+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}k_n^g g_n \\ &= (\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1})\chi_{[0,x_n]} \\ &+ (\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n})\chi_{[x_n,y_n]}. \end{aligned}$$

记

$$v_n^f=p(k_n^f f_n)=p(u_{2n-1})\chi_{[0,x_n]}+p(au_{2n})\chi_{[x_n,y_n]},$$

$$v_n^g=p(k_n^g g_n)=p(au_{2n-1})\chi_{[0,x_n]}+p(u_{2n})\chi_{[x_n,y_n]},$$

则

$$\begin{aligned} \|k_n(f_n+g_n)\|^{\circ} &\geq \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}k_n(f_n+g_n)^* v_n^f\omega+\int_0^{\infty}k_n(f_n+g_n)^* v_n^g\omega\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(u_{2n-1})+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(u_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega\right. \\ &+ (\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(au_{2n})+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(au_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega \\ &+ (\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(au_{2n-1})+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(au_{2n-1}))\int_0^{x_n}\omega \\ &+ \left.(\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(u_{2n})+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(u_{2n}))\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2k_n+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega\right. \\ &+ \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega \\ &+ \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(au_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega \\ &+ \left.\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\left[2k_n+\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}au_{2n-1}p(au_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega\right. \\ &+ \frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}u_{2n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}\frac{1}{1+\frac{1}{2n-1}}u_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega \\
&+ \left.\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}au_{2n}p(au_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2k_n+k_n-\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}u_{2n}p(u_{2n})\int_{x_n}^{y_n}\omega\right. \\
&+ \left.k_n-\frac{1}{1+\frac{1}{2n-1}}\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}u_{2n-1}p(u_{2n-1})\int_0^{x_n}\omega\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4k_n-\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\frac{k_n^f}{k_n^f+k_n^g}k_n^g-\frac{1}{1+\frac{1}{2n-1}}\frac{k_n^g}{k_n^f+k_n^g}k_n^f\right] \\
&\geq \frac{1}{2}(4-\frac{1}{n})k_n.
\end{aligned}
$$

所以 $\|f_n+g_n\|^{\circ}\geq 2-\frac{1}{2n}\to 2$, 又因为 $\|f_n+g_n\|^{\circ}\leq\|f_n\|^{\circ}+\|g_n\|^{\circ}\to 2$, 故 $\|f_n+g_n\|^{\circ}\to 2$. 最后由命题 2.1(4)(若在情形 1 中则直接由命题 2.1(2)) 说明 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 非一致凸，得到矛盾.

(3) 令 $W(t)=\int_0^t\omega$, $\|\chi_{(0,t)}\|^{\circ}=\psi^{-1}(\frac{1}{W(t)})W(t)$, 若 (3) 不满足，即存在 $\{x_n\}$，使得 $\frac{W(2x_n)}{W(x_n)}\to 1$，令 $f_n=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(x_n)})W(x_n)}\chi_{[0,x_n]}$, $g_n=\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(2x_n)})W(2x_n)}\chi_{[0,2x_n]}$, 得 $\|f_n\|^{\circ}=\|g_n\|^{\circ}=1$, $|f_n-g_n|\geq g_n\chi_{[x_n,2x_n]}$, 所以由命题 4.1(7)

$$
\begin{aligned}
\|f_n-g_n\|^{\circ} &\geq \|g_n\chi_{[x_n,2x_n]}\|^{\circ} \\
&= \|\frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(2x_n)})W(2x_n)}\chi_{[x_n,2x_n]}\|^{\circ} \\
&= \frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(2x_n)})W(2x_n)}\psi^{-1}(\frac{1}{W(x_n)})W(x_n) \\
&\to 1.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\|\frac{f_n+g_n}{2}\|^{\circ} &\geq \|g_n\chi_{[0,x_n]}\|^{\circ} \\
&= \frac{1}{\psi^{-1}(\frac{1}{W(2x_n)})W(2x_n)}\psi^{-1}(\frac{1}{W(x_n)})W(x_n) \\
&\to 1,
\end{aligned}
$$

这说明 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 非一致凸，矛盾.

类似地，我们可以证明：

**定理 4.11** 设 $\gamma<\infty$, 则 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 一致凸的充要条件为

(1) 对于较大的变量有 $\varphi\in\Delta_2$;

(2) $\varphi$ 对于较大的变量是一致凸的;

(3) $\omega$ 对于较小的变量是正则的，即存在 $x_0$ 及 $K>1$, 当 $x\le x_0$ 时，有 $\frac{W(2x)}{W(x)}\ge K>1$, 其中 $W(x)=\int_0^x\omega$.

# 参 考 文 献


[1] A.Kaminska, On uniform convexity of Orlicz spaces, Indag Math.A85(1982), 27-36.

[2] S.T.Chen, H.Hudzik and H.Sun, Complemented copies of $l^1$ in Orlicz spaces, Math Nachr.159(1992), 299-309.

[3] S.T.Chen and H.Sun, On weak topology of Orlicz spaces, Collect.Math.44(1993), 71-79.

[4] S.T.Chen, Some rotundities of Orlicz spaces with Orlicz norm, Bull.Polish Acad.Sci.Math. 34(1986), 585-596.

[5] T.Ando, Linear functionals on Orlicz spaces, Nieuw.Arch.Wisk.8(3)(1960), 1-16.

[6] R.G.Darst,D.A.Legg and D.W.Townsend, Prediction on Orlicz spaces, Manuscripta Math. 35(1981), 91-103.

[7] Y.Duan and S.T.Chen, On best approximation operators in Orlicz spaces, J.Math.Anal. Appl.178(1993), 1-8.

[8] T.Landes and L.Rogge, Best approximation in $L_\varphi$-spaces, Z.Wahrsch.Verw.Gebiete.51 (1980), 215-237.

[9] H.Hudzik, Uniform convexity of Muxielak-Orlicz spaces with Luxemburg' norm, Comment Math.23(1983),21-23.

[10] H.Hudzik, A criterion of uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm.Bull, Polish Acad.Sci.Math.32(1984),303-313.

[11] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, and G.Polya, Inequalities, 2nd ed,Cambridge University press, Cambridge,UK, 1952.

[12] A.Kaminska,P.Lin and H.Sun, Uniformly normal structure of Orlicz-Lorentz spaces, Lect. Notes in Pure and App.Math.175(1995), 229-238.

[13] P.Lin and H.Sun, Some geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces, Arch.Math.64(1995), 500-511.

[14] H.Hudzik,A.Kaminska and M.Mastylo, On geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces, Canad.Math.Bull.40(3)(1997), 316-329.

[15] A.Kaminska and Y.Raynaud, Isomorphiclp-Sublsoaces in Orlicz-Lorentz sequence spaces, Proc. Amer.Math.Soci.134(8)(2006), 2317-2327.

[16] A.Kaminska, Uniform convexity of generalized Lorentz spaces, Arch Math.56(1991), 181-188.

[17] A.Kaminska, Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces, Math Nachr.147(1990), 29-38.

[18] A.Kaminska, Extreme points in Orlicz-Lorentz spaces, Arch Math.55(1990), 173-180.

[19] 吴从炘，任丽伟，赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的严格凸性，数学杂志. 19(2)(1999), 235-240.

[20] E.Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, New York: Springer-Verlag, 1998.

[21] 吴从炘，王廷辅，陈述涛等，Orlicz 空间几何理论，哈尔滨工业大学出版社，1986.

[22] S.T.Chen, Geometry of Orlicz spaces,Dissertationes Mathematicae, Pozprawy Matematyczne, Warszawa, 1996.

[23] Jincai Wang,Yi Chen, Rotundity and Unifom Rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm, Houston J.Math, to appear.

[24] M.M.Rao., Z.D.Ren., Applications of Orlicz spaces, New York:Marcel Dekker, 2001.

[25] M.A.Krasnoselskii., Y.B.Rutickii., Convex Functions and Orlicz spaces, Groningen Noordhoff, 1961.

# 发 表 论 文

本人在攻读学位期间发表的论文：

[1] 严亚强，陈怡，Banach 空间中的一致凸性的等价条件，苏州大学学报，25(2)(2009), 5-8.

[2] X.Yin, C.Qian and Y.Chen, On the uniformly convexity of N-functions, Scientia Series A: Mathematical Sciences, 17 (2009), 13-18.

[3] Jincai Wang,Yi Chen, Rotundity and Unifom Rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with Orlicz norm, Houston J.Math, to appear.

# 致 谢

本学位论文是在导师严亚强教授的悉心指导下完成的. 三年来, 他给我热情的关怀和鼓励, 他的严谨治学和敬业精神使我深受感染. 从论文的选题到成文, 严老师都倾注了大量心血. 同时, 还要对王金才老师表示衷心的感谢, 三年来他和严老师一起陪伴我, 帮我解答各种疑难问题, 并给予人生道路中数不清的指导和帮助, 成为我生活中不可或缺的良师益友. 他对本文的最终成文也起到了关键的作用. 感谢两位老师三年来对我的指导和教诲, 没有他们的关心, 支持和鼓励, 就不会有我的这篇论文.

感谢苏州大学数学科学学院所有领导和老师的爱护和帮助, 让我顺利完成学业.

# 苏州大学

# 硕士学位论文摘要

（2009 届）

## 广义 Orlicz 空间的一致凸性

## Uniform Rotundity of Generalized Orlicz Spaces

| | |
|---|---|
| 研究生姓名 | 陈 怡 |
| 指导教师姓名 | 严亚强（教授） |
| 专业名称 | 基础数学 |
| 研究方向 | 泛函分析 |
| 论文提交日期 | 2009 年 5 月 |

# 广义 Orlicz 空间的一致凸性

## 详细摘要

Banach 空间的几何性质是空间理论的重要研究内容，而空间的一致凸性是最重要的几何性质之一．本文的主要结果是：讨论了 $N-$ 函数的一致凸性的刻划；对一般 Banach 空间的一致凸的等价性 (16 种) 给出了证明；修正了陈述涛关于 Musielak-Orlicz 空间一致凸充要条件的有关定理；本文最主要的工作在于通过完善关于 Orlicz 范数和重排函数的一些引理，首先获得了严格凸性在赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间中的刻划，在此基础上获得了一致凸性的刻划，证明了 $\gamma=\infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的一致凸的充要条件是： $(1)\varphi\in\Delta_2$; $(2)\varphi$ 一致凸； $(3)\omega(t)$ 正则．

本文共分为四章：

第一章，$N$- 函数的一致凸性：由于 N- 函数的一致凸性与它所成的 Orlicz 函数的一致凸性关系十分密切，我们首先研究 N- 函数的一致凸性．本文主要对较小变量的一致凸性展开研究，给出 $N$- 函数的一致凸的充要条件，证明了严格凸和一致凸之间的关系，并且给出一个一致凸的简易判别法．

第二章，关于 Banach 空间中的一致凸性的等价条件：证明了 Banach 空间一致凸的 16 个等价命题．

第三章， Musielak-Orlicz 空间的一致凸性：对于赋 Luxemburg 范数的 Musielak-Orlicz 空间的一致凸性，陈述涛给出了证明，但是其第二个引理的结论有误，本文将更正这个错误 (使得引理的条件变弱), 并且修正主要定理的证明．

第四章，赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间的一致凸性： Kaminska 证明了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件．而吴从炘，任丽伟在 1999 年为 Orlicz-Lorentz 空间提供了赋 Orlicz 范数的一个基本框架，并给出了 $\gamma < \infty$ 时空间严格凸性的刻划．但在这个范数上现有关于几何理论的研究结果很少，为此本文致力于证明 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz — Lorentz 空间一致凸性的等价条件．本文了研究了当 $\gamma \leq \infty$ 时 Orlicz 范数中 $K(f)$ 的有界性定理，并给出关于重排的若干引理，由此得到 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数的 Orlicz-Lorentz 空间中严格凸性的刻划，即 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 空间严格凸等价为： (1)$\varphi$ 严格凸； (2) 函数 $\omega$ 在 $[0,\gamma)$ 上为正； (3) 若 $\gamma = \infty$, 则 $\int_0^{\infty}\omega = \infty$. 最后得到本文最重要的工作：一致凸性的刻划．我们将证明：当 $\gamma = \infty$ 时赋 Orlicz 范数 Orlicz-Lorentz 空间 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}$ 的一致凸的充要条件是： (1)$\varphi \in \Delta_2$;(2)$\varphi$ 一致凸； (3)$\omega(t)$ 正则.

**关键词**：$N-$ 函数； Orlicz 空间； Musielak-Orlicz 空间； Orlicz-Lorentz 空间；一致凸；严格凸.

作　　者：陈怡

指导老师：严亚强教授