Vol.5(1985)
No.1

数 学 杂 志
J.of Math.(PRC)

ORLICZ空间局部一致凸的条件

陈述涛　　　　王玉文

(哈尔滨师范大学)　　　　(哈尔滨科技大学)

凸性是Banach空间的重要几何属性。1978年M.A.Smith[1]总结了一致凸(UC)，局部一致凸(LUC)，弱局部一致凸($WLUC$)，中点局部一致凸($MLUC$)，H严格凸(HSC)，与严格凸(SC)之间的关系，其蕴含关系如下图所示

$$\begin{array}{ccccc} & & \nearrow HSC \searrow & & \\ UC \longrightarrow & LU & \longrightarrow MLU \longrightarrow & SC \\ & & \searrow WLU \nearrow & & \end{array}$$

Orlicz空间 $L_M^*(G)$ 关于两种范数的一致凸性、严格凸性已有大量文献讨论。[2]~[6]但是，尚未见到有关(图1)中其它凸性的讨论。

鉴于局部一致凸与Fréchet可微的密切关系，本文讨论Orlicz空间 $L_M^*(G)$ 关于Luxemburg范数$\|\cdot\|_{(M)}$局部一致凸的条件，得出一条出乎意料的结果：Orlicz空间关于Luxemburg范数局部一致凸等价于空间严格凸，即：$M(u)$严格凸且对较大u满足Δ_2条件。[4] 从而(图1)所列后五种凸性全部等价。

$M(u)$为N函数，如对任何实数x，y，$x\neq y$ $M\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{1}{2}(M(x)+M(y))$，则称$M(u)$严格凸。显然$M(u)$严格凸等价于其图形不含直线段。

本文未说明的记号同[7]。

引理1　N函数$M(u)$严格凸当且仅当：对任意c、$k>0$，存在$\delta'>0$，使当$|u|$，$|v|\leqslant k$，$|u-v|>c$时，有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta')\left[\frac{M(u)+M(v)}{2}\right]$$

证　充分性显然，只证必要性，如不然，存在c_0，$k_0>0$，对任意$n=1$ $2\cdots$，存在u_n，v_n，使$|u_n|$，$|v_n|\leqslant k_0$，$(n=1,2,\cdots)$，$|u_n-v_n|>c_0$

$$M\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)>\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}\right]$$

由于$\{u_n\}$，$\{v_n\}$分别有子列收敛，不妨设$u_n\to u_0$，$v_n\to v_0$ $(n\to\infty)$

*1983年10月26日收到　1984年元月9日收到修改稿

令$n\to\infty$，有$u_0\neq v_0$，

$$M\left(\frac{u_0+v_0}{2}\right)\geqslant\frac{M(u_0)+M(v_0)}{2}$$

这与$M(u)$严格凸矛盾。

引理2　设$M(u)$对较大u满足Δ_2条件，则

(1)　对任意$\varepsilon\in(0,1)$，存在$\varepsilon_1>0$，使由$\rho(u;M)\leqslant 1-\varepsilon$推得$\|u\|_{(M)}\leqslant 1-\varepsilon_1$.

(2)　对任意$\varepsilon\in(0,1)$，存在$\varepsilon_1>0$，使$\|u\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$蕴含$\rho(u;M)\geqslant\varepsilon_1$

证　本引理为[6]的引理。

引理3　若$M(u)$对较大u满足Δ_2条件，则对任意$\varepsilon\in(0,1)$，$u\in S(L_m^*)=\{u:\|u\|_{(M)}=1\}$，存在$c$，$\alpha\in(0,1)$，使对任意$v\in S(L_M^*)$，$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$有

$$\int_{G_c}M(u(x))dx\leqslant 1-\alpha$$

这里$G_c=\{|u(x)-v(x)|\leqslant c\}$.

证　因$M(u)$满足Δ_2条件，对$\varepsilon\in(0,1)$，取$\varepsilon_1\in(0,1)$，使$\|u\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$蕴含$\rho(u,M)\geqslant\varepsilon_1$. 令$\alpha=\frac{\varepsilon_1}{8}$，

由$c\to 0$，$\text{mes}\,G<\infty$，$\rho(u,M)=1$有

$$\int_G M(c)dx\longrightarrow 0\quad(c\longrightarrow 0)$$

$$\int_M M[|u(x)|-c]dx\longrightarrow 1\quad(c\longrightarrow 0)$$

故可取$c\in(0,1)$，使

$$\int_G M(c)\,dx<\alpha=\frac{\varepsilon_1}{8}\tag{1}$$

$$\int_G M[|u(x)|-c]dx>1-\alpha=1-\frac{\varepsilon_1}{2}\tag{2}$$

对$v\in S(L_M^*)$，$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$　记

$$G_c=G(|u(x)-v(x)|\leqslant c)$$

如果

$$\int_{G_c}M(u(x))\,dx>1-\frac{\varepsilon_1}{8}$$

则

$$\int_{G\setminus G_c}M(u(x))\,dx<\frac{\varepsilon_1}{8}\tag{3}$$

从而
$$\int_{G\setminus G_c}M[|u(x)|-c]dx=\int_{G/G_c(|u(x)|\leqslant c)}M[|u(x)|-c]dx+$$
$$+\int_{G/G_c(|u(x)|>c)}M[|u(x)|-c]dx$$

$$\leqslant \int_{G(|u(x)|<c)} M(c)\,dx+\int_{G/G_c} M(u(x))dx$$

$$<\frac{\varepsilon_1}{8}+\frac{\varepsilon_1}{8}$$

$$=\frac{\varepsilon_1}{4} \tag{4}$$

故由(2)，(4)式，有

$$\int_{G_c} M[|u(x)|-c]dx=\int_G M[|u(x)|-c]dx-\int_{G\setminus G_c} M[|u(x)|-c]dx$$

$$>1-\frac{\varepsilon_1}{8}-\frac{\varepsilon_1}{4}=1-\frac{3\varepsilon_1}{8} \tag{5}$$

又由$|u(x)-v(x)|\leqslant c$，$|u(x)|\geqslant c$推得

$$|v(x)|\geqslant|u(x)|-c\geqslant 0$$

从而由(5)，(1)式，有

$$\int_{G_c} M(v(x))\,dx\geqslant\int_{G_c(|u(x)|<c)} M(v(x))\,dx\geqslant\int_{G_c(|u(x)|>c)} M(|u(x)|-c)\,dx$$

$$=\int_{G_c} M(|u(x)|-c)\,dx-\int_{G_c(|u(x)|<c)} M(|u(x)|-c)\,dx$$

$$\geqslant 1-\frac{3\varepsilon_1}{8}-\int_G M(c)dx$$

$$\geqslant 1-\frac{3\varepsilon_1}{8}-\frac{\varepsilon_1}{8}$$

$$=1-\frac{\varepsilon_1}{2} \tag{6}$$

但

$$\int_{G_c} M(u(x))\,dx>1-\frac{\varepsilon_1}{8}$$

从而

$$\int_{G\setminus G_c}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}\,dx=1-\int_{G_c}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}dx$$

$$<1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8}+1-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$$

$$=\frac{5\varepsilon_1}{16} \tag{7}$$

于是由$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$，得

$$\varepsilon_1\leqslant\int_G M\left[\frac{u(x)-v(x)}{2}\right]dx$$

$$\leqslant\int_{G_c} M(c)\,dx+\int_{G\setminus G_c}\frac{M[u(x)]+M[v(x)]}{2}dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon_1}{8}+\frac{5\varepsilon_1}{16}$$

$$=\frac{7\varepsilon_1}{16}$$

这是个矛盾．故 $\int_{G_c} M(u(x))dx \leqslant 1-\alpha$

定理 Orlicz空间 $L_M^*(G)$ 关于 $\|\cdot\|_{(M)}$ 局部一致凸的充要条件为

(i) $M(u)$ 对较大 u 满足 Δ_2 条件；

(ii) $M(u)$ 严格凸。

证 必要性．若 $L_M^*(G)$ 局部一致凸，则必严格凸，从而由[4]定理7知(i)，(ii)成立。

充分性 对 $\varepsilon\in(0,1)$，$u\in S(L_M^*)$，要找 $\delta(\varepsilon,u)>0$ 使对任意 $v\in S(L_M^*)$，$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$．

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{(M)}\leqslant 1-\delta(\varepsilon,u)$$

由引理3，对 ε，u，取 c，$\alpha\in(0,1)$ （$\alpha=\frac{\varepsilon_1}{8}$，$\varepsilon_1$ 的意义见引理3）使对任意 $v\in S(L_M^*)$ $\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$

$$\int_{G_c} M(u(x))dx\leqslant 1-\alpha \tag{1}$$

这里 c，α 仅依赖于 ε 与 u．

对上面的 $u\in S(L_M^*)$，取 k 充分大，使

$$\int_{G(|u(x)|>\frac{k\alpha}{4})} M(u(x))\,dx<\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

这里 k 也只与 ε 和 u 有关。

因 $M(u)$ 严格凸，对上面的 c，$k>0$，取引理1中的 δ'，使 $|x|$，$|y|\leqslant k$，$|x-y|>c$ 时

$$M\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant(1-\delta')\left[\frac{M(x)+M(y)}{2}\right] \tag{3}$$

δ' 只与 c、k，从而只与 ε，u 有关。于是 $\frac{\delta'\varepsilon}{64}$ 只与 ε、u 有关，且 $0<\frac{\delta'\varepsilon}{64}<1$．由引理2，存在 $\delta(\varepsilon,u)>0$，使

$$\rho(w,M)\leqslant 1-\frac{\delta'\varepsilon}{64}\quad\text{蕴含}\ \|w\|_{(M)}\leqslant 1-\delta(\varepsilon,u)$$

对 $v\in S(L_M^*)$，$\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant\varepsilon$

记 $G_1=\{x\in G;\ |u(x)-v(x)|\leqslant c\}$

$G_2=\{x\in G;\ |u(x)-v(x)|>c,\ |u(x)|\leqslant\frac{k\alpha}{4},\ |v(x)|\leqslant k\}$

$$G_3=\{x\in G;\ |u(x)-v(x)|>c,\ |u(x)|\leqslant\frac{ka}{4},\ |v(x)|>k\}$$

$$G_4=\{x\in G;\ |u(x)-v(x)|>c,\ |u(x)|>\frac{ka}{4}\}$$

则G_1，G_2，G_3，G_4两两不交，而且

$$G=\bigcup_{i=1}^{4}G_i$$

由(3)式，有

$$\int_G M\left[\frac{u(x)+v(x)}{2}\right]dx\leqslant\int_{G\setminus G_2}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}dx$$

$$+(1-\delta')\int_{G_2}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}dx$$

$$=1-\delta'\int_{G_2}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}dx \tag{4}$$

由于

$$1=\int_G M(u(x))\,dx=\left\{\int_{G_1}+\int_{G_2\cup G_3}+\int_{G_4}\right\}M(u(x))\,dx \tag{5}$$

故由(2)式，有

$$\int_{G_4}M(u(x))\,dx\leqslant\int_{G(|u(x)|>\frac{ka}{4})}M(u(x))\,dx<\frac{a}{2} \tag{6}$$

由引理3，

$$\int_{G_1}M(u(x))\,dx=\int_{G_c}M(u(x))dx\leqslant 1-a \tag{7}$$

故由(5)，(6)，(7)，我们有

$$1<1-\frac{a}{2}+\int_{G_2\cup G_3}M(u(x))\,dx$$

于是

$$\int_{G_2\cup G_3}M(u(x))\,dx>\frac{a}{2} \tag{8}$$

下面证

$$\int_{G_2}M(u(x))\,dx\geqslant\frac{a}{4}=\frac{\varepsilon_1}{32} \tag{9}$$

如不然，由(8)式，有

$$\int_{G_3}M(u(x))\,dx>\frac{a}{4}$$

但当$x\in G_3$时，$|v(x)|>k\geqslant\frac{4}{a}|u(x)|$，故

$$1\geqslant\int_{G_3}M(v(x))\,dx\geqslant\int_{G_3}M\left(\frac{4}{a}|u(x)|\right)dx$$

$$>\frac{4}{a}\int_{G_3}M(u(x))dx>1$$

这是个矛盾．$\left(\frac{4}{\alpha}>1\right)$．故(9)式成立．

由(4)式，有

$$\int_G M\left(\frac{u(x)+v(x)}{2}\right)dx \leqslant 1-\delta'\int_{G_2}\frac{M(u(x))+M(v(x))}{2}dx$$

$$\leqslant 1-\frac{\delta'}{2}\int_{G_2}M(u(x))\,dx$$

$$\leqslant 1-\frac{\delta' e}{64}$$

因此
$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{(M)}\leqslant 1-\delta(\varepsilon,u)$$

即 $L_M^*(G)$ 关于 $\|\cdot\|_{(M)}$ 局部一致凸．

推论 Orlicz空间 $L_M^*(G)$ 关于 Luxemburg 范数 $\|\cdot\|_{(M)}$，$LUC \Longleftrightarrow WLUC \Longleftrightarrow MLUC \Longleftrightarrow HSC \Longleftrightarrow SC$．

证明，由本文定理与[4]定理7立得。

参 考 文 献

〔1〕 M. A. Smith, Math. Ann 233 (1978), 155–161.
〔2〕 H. W. Milnes, Pacific. J. Math. 7 (1957), 1451–1483.
〔3〕 M. M. Rao, Indag. Math. 27(1965) 671–690.
〔4〕 吴从炘，赵善中，陈俊澳，哈工大学报，3(1978)，1–12.
〔5〕 W. A. J. Luxemburg, Banach Function Spaces, Doctoral thesis, Delft, 1955.
〔6〕 A. kaminska, Proc. Amer. 85(1) (1982), 27–30.
〔7〕 吴从炘，王廷辅，奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科学技术出版社，1983.

THE CONDITION OF LOCALLY UNIFORMLY CONVEX IN ORLICZ SPACES

Chen Shutao(陈述涛)

(Harbin Teacher's University)

Wang Yuwen(王玉文)

(Harbin University of Science and Technology)

Abstract

In this paper, we discuss the locally uniformly convexity in orlicz spaces $L_M^*(G)$ with respect to luxemburg norm $\|\cdot\|_{(M)}$ and obtain following result

Theorem. Orlicz space $L_M^*(G)$ with respect to luxemburg norm $\|\cdot\|_{(M)}$ is lcally uniformly convex iff $M(u)$ satisfies Δ_2-condition for largt u and $M(n)$ is strict convex.