ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В. И. РОМАНОВСКОГО
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

На правах рукописи

ЧИЛИН Владимир Иванович

Симметричные пространства и бэровские алгебры измеримых операторов

01.01.01. — математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент — 1993

Работа выполнена в Ташкентском государственном университете.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ЖЕЛОБЕНКО Д. П.

член-корр. АН Республики Узбекистан доктор физико-математических наук, профессор ХАДЖИЕВ Дж. Х.

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ГАНИХОДЖАЕВ Н. Н.

Ведущая организация: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина.

Защита диссертации состоится «26» ноября 1993 г в 13 часов на заседании специализированного совета Д.015.17.21 в Институте математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан по адресу: 700143, г. Ташкент, ул. Ф. Ходжаева, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан.

Автореферат разослан «21» октября 1993 г

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат. наук **ХАШИМОВ Ш. А.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория алгебр фон Неймана, основы которой были заложены в работах Ф. Дж. Мюррея и Дж. фон Неймана, стимулировала развитие некоммутативного интегрирования, что дало возможность приступить к исследованию нового класса банаховых пространств - симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Такие пространства являются некоммутативными аналогами пространств измеримых функций. Интересными и содержательными примерами симметричных пространств измеримых операторов являются некоммутативные L_p-пространства, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича, изучению свойств которых посвящено довольно много работ (В.И.Овчинников, А.В.Трунов, А.Н.Шерстнев, М.А.Муратов, А.М.Бикчентаев, Ф.А.Сукочев, А.М.Меджитов, T.Fack, H.Kosaki, F.J.Yeadon и др.). В случае фактора I_∞ класс симметричных пространств измеримых операторов совпадает с классом симметрично-нормированных идеалов компактных операторов, теория которых активно разрабатывается последние три десятилетия (И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн, J.Arazy, D.I.H.Garling, N.Tomzchak-Jaegermann, S.Kwapien, A.Pelczynski, C.McCarthy, R.Schatten и др.).

Развитие теории некоммутативного интегрирования для произвольных следов позволило продолжить соответствие между симметричными пространствами E последовательностей и симметрично-нормированными идеалами C_E компактных операторов на случай произвольных симметричных пространств E измеримых функций на полуоси $[0,\infty)$ и порожденных ими симметричных пространств $E(M,\mu)$ измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M с точным нормальным полуконечным следом μ. Изучению свойств таких пространств $E(M,\mu)$ посвящены работы P.G.Dodds'а, B.Pagter'а, Q.Xu, F.J.Yeadon'а и диссертации А.М.Бикчентаева, А.В.Крыгина, А.М.Меджитова, М.А.Муратова, Ф.А.Сукочева.

Естественно ожидать, что, как и в случае фактора I_∞, геометрические, порядковые и топологические свойства симметричных пространств $E(M,\mu)$ измеримых операторов во многом определяются соответствующими свойствами порождающих их функциональных пространств E. Такая проблематика является одним из основных направлений в исследовании симметричных пространств измеримых операторов.

Каждое симметричное пространство $E(M,\mu)$ является идеальным подпространством в $*$-алгебре $C(M)$ всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M, и поэтому свойства $E(M,\mu)$ тесно связаны с алгебраическими и топологическими свойствами $*$-алгебры $C(M)$. К настоящему времени теория алгебр $C(M)$, а также алгебр $S(M)$ локально измеримых операторов, присоединенных к M, достаточно хорошо разработана (I.E.Segal, W.F.Stinespring, S.Sankaran, A.K.Padmanabhan, F.J.Yeadon и др.).

При изучении свойств операторных алгебр M, $C(M)$ и $S(M)$ активно использовались геометрические и топологические методы, обусловленные геометрической и топологической структурой того гильбертова пространства, в котором элементы этих алгебр действуют. Однако систематическое применение таких методов скрывает порой чисто алгебраическое происхождение важных разделов теории этих алгебр (классификация проекторов, существование носителей элементов, полярное разложение и т.д.). Поэтому естественным было стремление к внутреннему (аксиоматическому) описанию класса операторных алгебр, для которых сохраняются алгебраические свойства алгебр фон Неймана, EW^*-алгебр и $*$-алгебр $C(M)$ и $S(M)$. Наибольший успех в этом направлении был достигнут в работах I.Kaplansky, который ввел класс AW^*-алгебр, наиболее удачно реализующий идею алгебраического описания непространственной теории алгебр фон Неймана (т.е. той ее части, которая не связана с действием элементов алгебры на векторы гильбертова пространства). AW^*-алгебры занимают то же место в классе C^*-алгебр, что и условно полные векторные решетки в классе всех векторных решеток, в частности, порядковые свойства AW^*-алгебр во многом определяют их алгебраическую структуру.

В случае, когда M - конечная алгебра фон Неймана, $*$-алгебры $C(M)$ и $S(M)$ совпадают и являются полными $*$-регулярными кольцами. Естественным обобщением AW^*-алгебр и полных $*$-регулярных колец явились введенные I.Kaplansky бэровские $*$-кольца. Содержательными примерами бэровских $*$-колец служат AW^*-алгебры, EW^*-алгебры (P.G.Dixon), $*$-алгебры $C(M)$ и $S(M)$, O^*-алгебры (М.Ш.Гольдштейн, Т.А.Сарымсаков), а также $*$-алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к AW^*-алгебрам (S.K.Berberian, K.Saito).

Самосопряженные части EW^*-алгебр и $*$-алгебр $C(M)$ и $S(M)$ (как для алгебр фон Неймана, так и для AW^*-алгебр) обладают частичным порядком, согласованным с алгебраическими операциями, который во многом определяет свойства EW^*-алгебр и алгебр $C(M)$ и $S(M)$. Поэтому естественной является задача о выделении в классе упорядоченных $*$-алгебр таких, которые по своим алгебраическим свойствам были бы "близки" к EW^*-алгебрам и $*$-алгебрам $C(M)$ и $S(M)$. В случае коммутативной алгебры M решение такой задачи известно (Б.З.Вулих, М.Я.Антоновский, В.Г.Болтянский, Т.А.Сарымсаков).

Цель работы. Исследование геометрических, порядковых и топологических свойств симметричных пространств измеримых операторов, а также построение теории бэровских упорядоченных инволютивных алгебр, позволяющей с единой точки зрения описывать структуру и свойства EW^*-алгебр и колец измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана и AW^*-алгебрам.

Методика исследований. При исследовании свойств симметричных пространств измеримых операторов существенно используются методы теории алгебр фон Неймана, теории некоммутативного интегрирования, порядковая структура колец измеримых операторов. При этом важную роль играет возможность отождествления симметричного пространства, порожденного коммутирующим семейством самосопряженных измеримых операторов, с симметричным пространством измеримых функций на полуоси $[0,\infty)$. Активно используется техника невозрастающих перестановок (обобщенных s-чисел) измеримых операторов и возможность представления модуля измеримого оператора x с помощью перестановки x и некоторого сохраняющего след эндоморфизма.

При построении теории бэровских упорядоченных инволютивных алгебр используются методы теории бэровских $*$-колец, развитые в работах I.Kaplansky и S.K.Berberian'a, и методы теории упорядоченных $*$-алгебр, предложенные в работах М.Ш.Гольдштейна и Т.А.Сарымсакова.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Решена задача о равномерной выпуклости симметричного пространства измеримых операторов, порожденного равномерно выпуклым функциональным симметричным пространством.

2. Охарактеризована сильная сходимость в симметричных пространствах измеримых операторов на языке сильной сходимости перестановок операторов и слабой сходимости и сходимости по мере самих операторов.

3. Установлено наличие свойства Кадеца-Кли в некоммутативном

симметричном пространстве в случае, когда таковым свойством обладает порождающее его функциональное пространство.

4. Решена задача о выпуклости симметричных квазивыпуклых множеств измеримых операторов. Описаны крайние точки выпуклых вполне симметричных множеств измеримых операторов.

5. Описаны все изометрии некоммутативных пространств Лоренца.

6. Построена теория бэровских упорядоченных инволютивных алгебр, позволяющая с единой точки зрения исследовать EW^*-алгебры и кольца измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана и AW^*-алгебрам. В частности, с помощью этой теории решены задачи Диксона о связи GB^*-алгебр и EW^*-алгебр.

7. Дана абстрактная характеризация некоммутативных L_p-пространств.

<u>Теоретическая и практическая ценность.</u> Диссертация носит теоретический характер и ее результаты могут служить для дальнейшего развития теории симметричных пространств измеримых операторов и ее приложений. Построенная в работе теория бэровских упорядоченных *-алгебр может быть применена при исследовании свойств GB^*-алгебр, EW^*-алгебр, $EW^{\#}$-алгебр, алгебр измеримых и локально измеримых операторов, а также в математических моделях квантовой теории поля.

<u>Апробация работы.</u> Результаты диссертации систематически докладывались на школах по теории операторов в функциональных пространствах (Челябинск, 1986г.: Тамбов, 1987г.: Куйбышев, 1988г.: Новгород, 1989г.: Ульяновск, 1990г.: Н.Новгород, 1991г.), школе по некоммутативной теории вероятностей (Казань, 1978г.), школе по многокомпонентным системам (Ташкент, 1982г.), симпозиуме по теории колец, алгебр, модулей (Новосибирск,1982г.), школе по теории функций (Кемерово, 1983г.), на сессии общемосковского семинара по топологии (Москва, 1984г.), международном симпозиуме по теории информации (Ташкент, 1984г.), на Бакинской международной топологической конференции (Баку, 1987г.), III Сибирской школе "Алгебра и анализ" (Иркутск, 1989г.), II школе "Неассоциативная алгебра и ее приложения" (Ташкент, 1990г.), На крымской математической школе (КРОМШ-2, 1991г.), международной математической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Банаха (Львов,

1992г.), на семинаре Д.П.Желобенко и А.И.Штерна (МГУ, 1983г.), семинаре С.С.Хоружего (отдел математической физики МИАН СССР, 1985г.), семинаре А.Я.Хелемского (МГУ, 1985г.), семинаре А.Н.Шерстнева (Казанский университет, 1993г.), семинарах Т.А.Сарымсакова (Ташкентский университет, 1980-1993 гг.), семинарах Ш.А.Аюпова (Институт математики АН Республики Узбекистан, 1985-1993гг.).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 37 работах [1-37].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав общим объемом 274 страницы машинописного текста и списка литературы из 205 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Перейдем к краткому изложению основных результатов диссертации.

Глава I содержит восемь параграфов и посвящена изучению геометрических и топологических свойств симметричных пространств $E(M,\mu)$ измеримых операторов, наследуемых от функциональных симметричных пространств E.

В § 1.1. приводятся необходимые сведения из теории некоммутативного интегрирования и теории симметричных пространств.

Пусть M - полуконечная алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный полуконечный след на M, $\mathcal{P}(M)$ - решетка всех проекторов в M, $K(M,\mu)$ - $*$-алгебра всех μ-измеримых операторов, присоединенных к M. Для каждого подмножества $E \subset K(M,\mu)$ через E_h (соответственно, E_+) будем обозначать множество всех самосопряженных (соответственно, положительных самосопряженных) операторов из E. Частичный порядок в $K_h(M,\mu)$, порожденный собственным конусом $K_+(M,\mu)$, обозначается через "$\leq$".

В $*$-алгебре $K(M,\mu)$ вводится топология сходимости по мере, фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon,\delta) = \left\{ x\in K(M,\mu):\ \|xp\|_M \leq \varepsilon,\ \mu(1-p)\leq\delta \text{ для некоторого } p\in\mathcal{P}(M) \right\},$$

$\varepsilon>0$, $\delta>0$, где $\|\ \|_M$ - C^*- норма на M, 1 - единица алгебры M. Для обозначения сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x в топологии сходимости по мере используется запись $x_n \xrightarrow{\mu} x$.

Перестановкой оператора $x\in K(M,\mu)$ называется функция $\mu_t(x):(0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$, определенная равенством

$$\mu_t(x)=\inf\{\ s\geq 0:\ \mu(\{|x|>s\})\leq t\ \},$$

где $\{|x|>s\}$ - спектральный проектор для $|x|=(x^*x)^{1/2}$, соответствующий интервалу (s,∞).

В коммутативном случае, когда $M=L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $\mu(f)=\int_\Omega fd\mu$, где (Ω,Σ,μ) - локализуемое пространство с мерой, алгебра $K(M,\mu)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,μ), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры, при этом перестановка $\mu_t(f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой $\tilde f$ функции $|f|$.

Для каждого $x\in K(M,\mu)$ положим $\mu_\infty(x)=\lim_{t\to\infty}\mu_t(x)$. Множество $K_0(M,\mu)=\{\ x\in K(M,\mu):\ \mu_\infty(x)=0\ \}$ является $*$-подалгеброй в $K(M,\mu)$.

Обозначим через $(L_1(M,\mu),\|\ \|_{L_1(M,\mu)})$ банахово пространство всех μ-интегрируемых операторов из $K(M,\mu)$. Пространства $(L_1(M,\mu)\cap M,\|\ \|_\cap)$ и $(L_1(M,\mu)+M,\|\ \|_+)$, где $\|x\|_\cap=\max\{\|x\|_{L_1(M,\mu)},\|x\|_M\}$, $\|x\|_+=\int_0^1\mu_t(x)dt$, являются банаховыми, при этом $x\in L_1(M,\mu)\cap M$ (соответственно, $x\in L_1(M,\mu)+M$) в том и только в том случае, когда $\mu_t(x)\in L_1(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty)$ (соответственно, $\mu_t(x)\in L_1(0,\infty)+L_\infty(0,\infty)$), где $L_1(0,\infty)$ и $L_\infty(0,\infty)$ - соответственно пространство всех интегрируемых и ограниченных измеримых функций на $(0,\infty)$.

Для элементов $x,y\in K(M,\mu)$ запись $x\prec y$ означает, что $\int_0^s\mu_t(x)dt\leq\int_0^s\mu_t(y)dt$ для всех $s>0$. Ясно, что $x\prec y$ тогда и только тогда, когда $\mu_t(x)\prec\mu_t(y)$.

Линейное подпространство F в $K(M,\mu)$ с банаховой нормой $\|\ \|_F$ называется симметричным пространством (с.п.) на (M,μ), если из того, что $x\in F$, $y\in K(M,\mu)$ и $\mu_t(y)\leq\mu_t(x)$ для всех $t>0$. следует, что $y\in F$ и $\|y\|_F\leq\|x\|_F$. Норма $\|\ \|_F$ на F называется вполне симметричной, если из того, что $x,y\in F$, $y\prec x$, следует $\|y\|_F\leq\|x\|_F$.

Следующая конструкция позволяет строить различные классы с.п. на (M,μ), используя обычные с.п. функций на $[0,\alpha)$, $\alpha=\mu(1)$.

Пусть $(E,\|\ \|_E)$ - функциональное с.п. на $[0,\alpha)$ с вполне симметричной нормой. Через $E(M,\mu)$ обозначим множество всех $x\in K(M,\mu)$, для которых $\mu_t(x)\in E$, и положим $\|x\|_{E(M,\mu)}=\|\mu_t(x)\|_E$. Тогда $(E(M,\mu),\|\ \|_{E(M,\mu)})$ - с.п. на (M,μ) с вполне симметричной нормой, причем имеют место непрерывные вложения

$(L_1(M,\mu)\cap M, \|\ \|_\cap) \subset (E(M,\mu), \|\ \|_{E(M,\mu)}) \subset (L_1(M,\mu)+M, \|\ \|_+)$.

В § 1.2. устанавливается ряд новых свойств перестановок μ-измеримых операторов. Отметим некоторые из них.

Теорема 1. Пусть $x,y\in K(M,\mu)$, тогда
1) если $x=x^*$, $y\geq 0$, $-y\leq x\leq y$, то $x\prec y$; в частности $|x+y|\prec|x|+|y|$ для любых $x,y\in K_h(M,\mu)$;
2) если $x=x^*$, $y\geq 0$, то $\mu_t(y)\leq\mu_t(y+ix)$ для всех $t>0$;
3) если $x,y\in K_+(M,\mu)$, $y\neq 0$, $x\geq\mu_\infty(x)\mathbf{1}$, то $\mu_t(x)<\mu_t(x+y)$ для некоторого $t>0$.

Укажем также на следующий полезный факт, позволяющий представлять оператор $x\in K_0(M,\mu)$, $x\geq 0$, с помощью его перестановки и сохраняющего след $*$-гомоморфизма.

Теорема 2. Пусть M - непрерывная алгебра фон Неймана, $0\leq x\in K_0(M,\mu)$, $p=\{x>0\}$. Тогда существует $*$-гомоморфизм V из $*$-алгебры $K(L_\infty(0,\mu(p)),m)$ в $*$-алгебру $K(M,\mu)$ такой, что $V(\mu_t(x))=x$ и $\mu_t(V(f))=\bar{f}$ для всех $f\in K(L_\infty(0,\mu(p)),m)$, где m - мера Лебега на $(0,\mu(p))$.

В § 1.3. выделяется и изучается класс правильных с.п. С.п. $(F,\|\ \|_F)$ на (M,μ) называется правильным, если его норма порядково непрерывна, т.е. из $\{x_n\}\subset F_+$, $x_n\downarrow 0$, следует $\|x_n\|_F\to 0$. Каждое сепарабельное функциональное с.п. E на $[0,\alpha)$, $\alpha=\mu(\mathbf{1})$, имеет вполне симметричную порядково непрерывную норму, и поэтому определено с.п. $E(M,\mu)$ на (M,μ), которое будет правильным.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для сильной сходимости последовательностей из правильного с.п. (доказательству этой теоремы посвящены §§ 1.3., 1.6., 1.7.).

Теорема 3. Пусть E - сепарабельное функциональное с.п. на $[0,\mu(\mathbf{1}))$, x_n, $x\in E(M,\mu)$. Следующие условия эквивалентны:
1) $\|x_n-x\|_{E(M,\mu)}\longrightarrow 0$;
2) $x_n\xrightarrow{\mu}x$ и $\lim\limits_{n\to 0}\sup\limits_{m\geq 1}\|x_m p_n\|_{E(M,\mu)}=0$ для любой убывающей к нулю последовательности $\{p_n\}\subset\mathcal{P}(M)$;
3) $x_n\xrightarrow{\mu}x$ и $\|\mu_t(x_n)-\mu_t(x)\|_E\longrightarrow 0$.
4) $\|\mu_t(x_n)-\mu_t(x)\|_E\longrightarrow 0$ и $x_n\longrightarrow x$ в слабой топологии $\sigma(E(M,\mu),E(M,\mu)^*)$;
5) $\|\mu_t(x_n)-\mu_t(x)\|_E\longrightarrow 0$ и $\mu(x_n p)\longrightarrow\mu(xp)$ для всех $p\in\mathcal{P}(M)$ с $\mu(p)<\infty$.

В случае, когда M есть $*$-алгебра $B(\ell_2)$ всех ограниченных линейных операторов в ℓ_2 и $\mu=tr$, эквивалентность условий 1), 4) и 5) из теоремы 3 получена в работе J.Arazy (On the geometry of the unit ball of unitary matrix spaces. Integ. Equat. Oper. Theory. - 1981. - V.4/2. - P.151-171).

§ 1.4. посвящен решению задачи о равномерной выпуклости с.п. $E(M,\mu)$ в случае, когда порождающее его функциональное пространство E равномерно выпукло. Напомним, что банахово пространство $(X,\|\ \|_X)$ называется равномерно выпуклым, если из условий x_n, $y_n\in X$, $\|x_n\|_X\le 1$, $\|y_n\|_X\le 1$, $\|x_n+y_n\|_X\to 2$ следует $\|x_n-y_n\|_X\to 0$.

В работе J.Arazy (Integ. Equat. Oper. Theory. - 1981. - V.4/2. - P.151-171) показано, что если E - равномерно выпуклое с.п. последовательностей, то на C_E существует норма $\|\ \|'$, эквивалентная норме $\|\ \|_{C_E}$, такая, что $(C_E,\|\ \|')$ - равномерно выпуклый симметрично-нормированный идеал. В этой же работе сформулирована нерешенная проблема о равномерной выпуклости самого идеала $(C_E,\|\ \|_{C_E})$. Эту задачу естественно рассматривать и в более общей ситуации: следует ли из равномерной выпуклости функционального с.п. E на $[0,\alpha)$ равномерная выпуклость с.п. $E(M,\mu)$. Следующая теорема дает положительное решение этой задачи.

Теорема 4. Пусть M - алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный полуконечный след на M, E - равномерно выпуклое функциональное с.п. на $[0,\mu(1))$. Тогда $(E(M,\mu),\|\ \|_{E(M,\mu)})$ - равномерно выпуклое с.п. на (M,μ).

В § 1.5. изучаются свойства (H) и (Hm) в функциональных с.п. на $[0,\alpha)$. Пусть $(E,\|\ \|_E)$ - нормированное пространство, E^* - сопряженное к E и $\Gamma\subset E^*$ - линеал, тотальный на E. Символами $x_n\xrightarrow{\Gamma}x$ и $x_n\xrightarrow{E}x$ будем обозначать сходимость x_n к x в топологии $\sigma(E,\Gamma)$ и по норме $\|\ \|_E$ соответственно. Говорят, что $(E,\|\ \|_E)$ обладает свойством (H) относительно Γ, если из x_n, $x\in E$, $x_n\xrightarrow{\Gamma}x$ и $\|x_n\|_E\longrightarrow\|x\|_E$ следует, что $x_n\xrightarrow{E}x$. Свойство (H) является одним из слабейших среди тех геометрических свойств, которые характеризуют степень округлости единичной сферы. Для функциональных с.п. E на $[0,\alpha)$ наряду со свойством (H) будем рассматривать также следующие свойства:

(H_∞): совпадает со свойством (H) относительно $L_1\cap L_\infty$;

(Hm): $x_n\xrightarrow{m}x$, $\|x_n\|_E\longrightarrow\|x\|_E \Rightarrow x_n\xrightarrow{E}x$;

(SK): $x\prec y$, $\tilde{x}\ne\tilde{y} \Rightarrow \|x\|_E<\|y\|_E$.

Запись $(E,\|\ \|_E)\in(H)$ означает, что норма $\|\ \|_E$ обладает свойством (H) (то же верно и для других перечисленных выше свойств нормы).

Теорема 5. Для сепарабельного с.п. $(E,\| \|_E)$ на $([0,\alpha),m)$ следующие условия эквивалентны:

1) $(E,\| \|_E)\in(H_\infty)$;

2) $(E,\| \|_E)\in(SK)$ и $(E,\| \|_E)\in(Hm)$.

Эта теорема существенно используется в § 1.8. при изучении свойства (H) в с.п. $E(M,\mu)$, где дается положительное решение задачи о наличии свойств (H) и (H_∞) в $E(M,\mu)$ в случае, когда таковыми свойствами обладает пространство E.

Теорема 6. Пусть M - алгебра фон Неймана, μ - точный нормальный полуконечный след на M, $(E,\| \|_E)$ - функциональное с.п. на $[0,\mu(1))$, обладающее свойством (H) (соответственно, (H_∞)). Тогда с.п. $(E(M,\mu),\| \|_{E(M,\mu)})$ на (M,μ) также обладает свойством (H) (соответственно, (H_∞)).

Для идеалов C_E компактных операторов, действующих в ℓ_2, утверждение теоремы 6 получено Б.Саймоном (Simon B. Convergence in trace ideals. Proc. Amer. Math. Soc. - 1981. - V.83. - P.39-43).

Глава II состоит из четырех параграфов и посвящена изучению геометрических свойств выпуклых симметричных и вполне симметричных множеств измеримых операторов, а также описанию изометрий некоммутативных прострвнств Лоренца.

В § 2.1. устанавливается выпуклость любого симметричного квазивыпуклого множества измеримых операторов, замкнутого в той или иной топологии. Подмножество $W\subset K(M,\mu)$ называется симметричным (вполне симметричным), если из $x\in W$, $y\in K(M,\mu)$, $\mu_t(x)=\mu_t(y)$ (соответственно, $y\prec x$) следует $y\in W$. Подмножество $W\subset K(M,\mu)$ называется квазивыпуклым, если для любых x, $y\in W_h$, $xy=yx$, $\lambda\in[0,1]$ следует, что $\lambda x+(1-\lambda)y\in W$. Очевидно, что любое выпуклое подмножество в $K(M,\mu)$ является квазивыпуклым. Естественно возникает вопрос о том, всякое ли квазивыпуклое множество в $K(M,\mu)$ будет выпуклым. Для симметричных множеств этот вопрос удается решить для широкого класса алгебр. В случае алгебры n x n-матриц положительное решение предложено фон Нейманом (von Neumann J. Some matrix inequalities and metrization of matrix space. Известия ин-та мат, и мех. Томского ун-та. - 1937.- Т.1. - Вып. 3. - С.285-300). Следующая теорема решает эту задачу для непрерывных алгебр фон Неймана.

Теорема 7. Пусть M - непрерывная алгебра фон Неймана, $\alpha=\mu(1)<\infty$ и $(E,\| \|_E)$ - функциональное с.п. на $[0,\alpha)$ с порядково непрерывной нормой, либо E обладает свойством Харди-Литтлвуда (т.е. функция $t^{-1}\int_0^t \tilde{f}(\tau)d\tau$ лежит в E для любого $f\in E$). Тогда всякое квазивыпуклое замкнутое симметричное подмножество $W\subset E(M,\mu)$ является выпуклым.

§ 2.2. является вспомогательным и связан с изучением оператора блочного проектирования для произвольных алгебр фон Неймана. Для алгебры $B(\ell_2)$ свойства такого оператора рассматривались в монографии: Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

В § 2.3. дается описание множества exW крайних точек выпуклого вполне симметричного подмножества $W\subset L_1(M,\mu)+M$ с помощью крайних точек множества $\tilde{W}=\{ \tilde{f}\in L_1(0,\alpha)+L_\infty(0,\alpha):\ \tilde{f}=\mu_t(x)$ для некоторого $x\in W$ $\}$, где $\alpha=\mu(\mathbf{1})$.

Теорема 8. Пусть M – непрерывная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный полуконечный след на M, W – непустое выпуклое вполне симметричное подмножество в $L_1(M,\mu)+M$. Тогда $x\in exW$ в том и только в том случае, когда $\mu_t(x)\in ex\tilde{W}$ и выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mu_\infty(x)=0$;

(ii) $z(\mathbf{1}-r(x))z(\mathbf{1}-l(x))=0$ и $|x|\geq\mu_\infty(x)r(x)$;

где $r(x)$, $l(x)$ правый и левый носители x, $z(\mathbf{1}-r(x))$ – центральный носитель проектора $\mathbf{1}-r(x)$.

Частные случаи этой теоремы получены Браверманом М.Ш. (1974, $M=L_\infty(0,1)$), Крыгиным А.В. (1990, $M=L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$, μ – σ-конечная непрерывная мера), Hiai F., Nakamura Y. (1987, $W=\{y\in L_1(M,\mu)+M:\ y\geq0,\ y\prec x\}$, где $x\in L_1(M,\mu)+M$, $x\geq0$, $\mu_\infty(x)=0$).

Последний параграф второй главы посвящен полному описанию всех изометрий некоммутативных пространств Лоренца. Пусть $\psi(t)$ – возрастающая непрерывная вогнутая функция на $[0,\alpha)$, $\alpha=\mu(\mathbf{1})$, $\psi(0)=0$. Множество

$$\Lambda_\psi(M,\mu)=\{\ x\in K(M,\mu):\ \int_0^\alpha \mu_t(x)d\psi(t)<\infty\ \}$$

с нормой $\|x\|_{\Lambda_\psi}=\int_0^\alpha\mu_t(x)d\psi(t)$ является с.п. на (M,μ) и называется пространством Лоренца на (M,μ).

Теорема 9. Пусть M, N – алгебры фон Неймана с точными нормальными конечными следами μ и ν соответственно, $\alpha=\mu(\mathbf{1})=\nu(\mathbf{1})=1$, ψ – возрастающая, непрерывная строго вогнутая функция на $[0,1]$, $\psi(0)=0$, и U – линейная изометрия из $\Lambda_\psi(M,\mu)$ на $\Lambda_\psi(N,\nu)$. Тогда существует единственный унитарный оператор $u\in N$ и йорданов изоморфизм J из M на N такие, что $\mu(x)=\varphi(J(x))$ и $U(x)=uJ(x)$ для всех $x\in M$.

Для некоммутативных L_p-пространств аналогичный результат получил F.J.Yeadon (Isometries of non-commutative L_p-spaces. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1981. - V.90. - P.41-50).

Третья глава состоит из девяти параграфов и посвящена построению теории беровских упорядоченных *-алгебр (BO^*-алгебр), позволяющей с единой точки зрения описывать алгебраические, порядковые и топологические свойства EW^*-алгебр, O^*-алгебр, *-алгебр $K(M,\mu)$, $C(M)$ и $S(M)$.

В § 3.1. приводятся необходимые сведения из теории беровских *-алгебр, AW^*-алгебр и *-алгебр измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана и AW^*-алгебрам.

В § 3.2. вводится основное для третьей главы понятие BO^*-алгебры. Пусть E - беровская *-алгебра над полем комплексных чисел. Обозначим через K множество всех элементов x из E, представимых в виде $x=\sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i$, $a_i\in E$, $i=1,\ldots,n$, n - натуральное число. Говорят, что E удовлетворяет аксиоме положительного квадратного корня, если

(PSR) для каждого $x\in K$ существует такое $y\in K\cap\{x\}''$, что $y^2=x$, где $\{x\}''$ - бикоммутант элемента x.

Если E удовлетворяет аксиоме (PSR), то K - собственный конус в $E_h=\{x\in E:\ x=x^*\}$, который определяет в E_h частичный порядок: $x\le y \Leftrightarrow (y-x)\in K$. Говорят, что E удовлетворяет аксиоме Рисса-Фишера, если

(RF) для любой последовательности $\{x_n\}\subset E_h$ такой, что $0\le x_n\le \varepsilon_n \mathbf{1}$, где $\{\varepsilon_n\}$ - некоторая суммируемая последовательность неотрицательных чисел, $\mathbf{1}$ - единица в E, существует $\sup\limits_{n\ge 1} \sum_{i=1}^{n} x_i$ в E_h.

Беровскую *-алгебру E, удовлетворяющую аксиомам (PSR) и (RF), будем называть BO^*-алгеброй. Примерами BO^*-алгебр служат W^*-алгебры, AW^*-алгебры, EW^*-алгебры, O^*-алгебры, *-алгебры $C(M)$ и $S(M)$ измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к W^*- и AW^*-алгебрам.

Элемент $x=a+ib$ из BO^*-алгебры E, $a,\ b\in E_h$, называется ограниченным, если $-\lambda\mathbf{1}\le a,b\le\lambda\mathbf{1}$ для некоторого числа $\lambda>0$.

Теорема 10. Множество M всех ограниченных элементов из BO^*-алгебры является $*$-подалгеброй в E, и на M существует норма, относительно которой M - AW^*-алгебра.

В § 3.3. устанавливается, что у коммутативной BO^*-алгебры E ее самосопряженная часть E_h является условно полной векторной решеткой с фрейденталевской единицей $\mathbf{1}$, что позволяет получить следующий вариант спектральной теоремы для BO^*-алгебр:

Теорема 11. Для каждого самосопряженного элемента x из BO^*-алгебры E существует единственное семейство проекторов $\{e_\lambda\}$, λ - действительное число, со свойствами: 1) $e_\lambda \le e_\mu$ при $\lambda \le \mu$; 2) $\inf e_\lambda = 0$, $\sup e_\lambda = \mathbf{1}$; 3) $e_\lambda = \sup\limits_{\mu<\lambda} e_\mu$, такое, что $\{e_\lambda\} \subset \{x\}''$ и $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ (под интегралом понимается r-предел интегральных сумм с регулятором $\mathbf{1}$).

В § 3.4. устанавливается полярное разложение для произвольных элементов BO^*-алгебры и получен вариант неравенства треугольника для исходного частичного порядка в BO^*-алгебре.

Теорема 12. Любой элемент x из BO^*-алгебры E единственным образом представляется в виде $x=uy$, где $y \ge 0$, u - частичная изометрия из E, $u^*u = r(y)$ - правый носитель y, при этом $y = (x^*x)^{1/2} = |x|$, $u^*u = r(x)$.

BO^*-алгебра E называется монотонно полной (секвенциально монотонно полной), если для любой возрастающей ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\} \subset E_h$ (последовательности $\{x_n\} \subset E_h$) существует точная верхняя грань $x = \sup x_\alpha$ ($x = \sup x_n$) в E_h.

Монотонно полными BO^*-алгебрами являются W^*-алгебры, EW^*-алгебры, O^*-алгебры и $*$-алгебры $C(M)$ и $S(M)$ в случае, когда M - алгебра фон Неймана.

Теорема 13. Для любых элементов x, y из секвенциально монотонно полной BO^*-алгебры E существуют такие частичные изометрии $u, v \in E$, что $|x+y| \le u|x|u^* + v|y|v^*$.

Для алгебр фон Неймана аналогичное неравенство получили Akemann C.A., Andersen T., Pedersen G.K. (Triangle inequalities in an operator algebra. Linear and multilinear algebra. - 1982. - V.11. - No 2. - P.167-178).

В § 3.5. вводится понятие максимального расширения для BO^*-алгебр и показывается, что такое расширение существует для конечных BO^*-алгебр.

BO^*-подалгебра F в BO^*-алгебре E называется заполненной, если $1\in F$ и из неравенств $0\le y\le x$, $x\in F$, $y\in E$, следует $y\in F$. AW^*-алгебра M ограниченных элементов в E является наименьшей заполненной BO^*-подалгеброй в E. Всякая заполненная BO^*-подалгебра F в E содержит M, и поэтому множество ограниченных элементов в F совпадает с M. BO^*-алгебра G называется расширением BO^*-алгебры E, если E $*$-изоморфна заполненной BO^*-подалгебре в G. Расширение G для E называется максимальным, если каждое расширение для G $*$-изоморфно G. Для коммутативной BO^*-алгебры E всегда существует максимальное расширение, которое $*$-изоморфно комплексификации кольца $C_\infty(Q)$ всех действительных непрерывных функций на экстремальном вполне несвязном стоуновском компакте Q (соответствующем булевой алгебре проекторов в E), принимающих значения $\pm\infty$ на нигде неплотных подмножествах из Q.

Теорема 14. Пусть E - BO^*-алгебра, у которой AW^*-алгебра ограниченных элементов имеет конечный тип. Тогда для E существует единственное с точностью до $*$-изоморфизма максимальное расширение, которое $*$-изоморфно $C(M)$.

BO^*-алгебра E называется расширенной, если для любой последовательности $\{x_n\}\subset E$, $x_n x_m=0$, $n\ne m$, $x_n\ge 0$, найдется такой $x\ge 0$, что $xr(x_n)=x_n$ для всех $n=1,2,\dots$

Теорема 15. Пусть E - BO^*-алгебра, M - AW^*-алгебра ограниченных элементов в E. Тогда E - расширенная BO^*-алгебра тогда и только тогда, когда M имеет конечный тип и E $*$-изоморфна $C(M)$.

В § 3.6. получен вариант теоремы 14 для произвольных BO^*-алгебр. Будем говорит , что центр Z BO^*-алгебры E разложим, если существует набор попарно ортогональных центральных проекторов $\{z_i\}_{i\in I}$ такой, что $\sup\limits_{i\in I} z_i=1$ и булева алгебра проекторов в $z_i Z$ регулярна для всех $i\in I$ (напомним, что булева алгебра X регулярна, если X имеет счетный тип и в X выполнен принцип диагонали). Центр любой алгебры фон Неймана является разложимым.

Теорема 16. Для любой BO^*-алгебры E с разложимым центром существует максимальное расширение; оно единственно и $*$-изоморфно $S(M)$, где M - AW^*-алгебра ограниченных элементов в E.

§ 3.7. посвящен выяснению связей между классом BO^*-алгебр и классами O^*-алгебр, GB^*-алгебр и EW^*-алгебр.

Теорема 17. BO^*-алгебра E является O^*-алгеброй в том и только в том случае, когда AW^*-алгебра M ограниченных элементов из E монотонно полна.

Результаты § 3.6. позволяют решить две старые задачи, связанные с теорией EW^*-алгебр и GB^*-алгебр. Класс $*$-алгебр неограниченных операторов, названных EW^*-алгебрами (расширенными W^*-алгебрами), был введен и изучен в работах P.G.Dixon'а (1970-1972 гг.). В частности, ему удалось установить связь этого класса $*$-алгебр с классом GB^*-алгебр (обобщенных B^*-алгебр) - топологических $*$-алгебр, введенных G.R.Allan'ом (1967 г.), а именно, он показал, что любая EW^*-алгебра неограниченных операторов, действующая в сепарабельном гильбертовом пространстве, является GB^*-алгеброй, причем доказательство этого факта существенно использовало технику разложения алгебры фон Неймана, действующей в сепарабельном гильбертовом пространстве, в прямой интеграл факторов. Естественно возникает вопрос о сохранении доказанной связи между EW^*- и GB^*-алгебрами и в случае несепарабельных гильбертовых пространств; при этом использование вышеуказанного разложения алгебры фон Неймана для установления такой связи уже невозможно.

Теорема 18. Любая EW^*-алгебра E является BO^*-алгеброй, у которой AW^*-алгебра M ограниченных элементов есть W^*-алгебра; в частности, E - заполненная $*$-подалгебра в $S(M)$ и E - GB^*-алгебра относительно топологии сходимости по мере.

Следующая теорема дает положительное решение вопроса P.G.Dixon'а о том, всякая ли GB^*-алгебра, у которой ограниченная часть есть W^*-алгебра, $*$-изоморфна EW^*-алгебре.

Теорема 19. Пусть A - $*$-алгебра над полем комплексных чисел. Следующие условия эквивалентны:

1) A - GB^*-алгебра относительно некоторой топологии, причем ограниченная часть A есть W^*-алгебра;

2) A $*$-изоморфна некоторой EW^*-алгебре.

В § 3.8. изучается класс BO^*-алгебр, на которых можно ввести топологию, аналогичную по своим свойствам топологии сходимости локально по мере.

Пусть E - произвольная BO^*-алгебра, M - AW^*-алгебра ограниченных элементов в E. Будем говорить, что подмножество V из E (p)-вложено в подмножество $U\subset E$, если $V\subset U$ и $(\sup e_\alpha)\in U$ для каждой возрастающей сети проекторов $\{e_\alpha\}\subset V$. Подмножество $V\subset E$ назовем нормальным, если $axb\in V$ для всех $x\in V$, a, $b\in M$, $\|a\|_M\leq 1$, $\|b\|_M\leq 1$. Пусть t - T_1-отделимая топология на E, относительно которой E - топологическое векторное пространство. Пару (E,t) будем называть топологической BO^*-алгеброй, а топологию t - R-топологией, если выполнены следующие условия:

1) инволюция $x \mapsto x^*$ непрерывна;

2) для любой окрестности нуля U существует нормальная окрестность нуля V, (p)-вложенная в U;

3) если сеть проекторов $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ сходится к нулю в топологии t ($e_\alpha \xrightarrow{t} 0$), то $x_\alpha e_\alpha \xrightarrow{t} 0$ для любой сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \in E$;

4) если сеть проекторов $\{e_\alpha\}$ монотонно убывает к нулю, причем e_α конечны при всех α или e_α - центральные при всех α, то $e_\alpha \xrightarrow{t} 0$.

Теорема 20. а) Если t_1 и t_2 - R-топологии на BO^*-алгебре, то $t_1 = t_2$.

б) R-топология на BO^*-алгебре E локально выпукла (нормируема) тогда и только тогда, когда E *-изоморфна заполненной BO^*-подалгебре в BO^*-алгебре $\prod\limits_{i\in J} M_i$ (соответственно, E *-изоморфна $\prod\limits_{i=1}^{n} M_i$), где M_i - AW^*-факторы типа I либо типа III, J - некоторое множество индексов (n - некоторое натуральное число).

В последнем параграфе третьей главы даются необходимые и достаточные условия существования R-топологии в BO^*-алгебре E и описывается пополнение E относительно равномерности, порожденной R-топологией.

Пусть ∇ - булева алгебра всех центральных проекторов в топологической BO^*-алгебре (E,t). Тогда R-топология t индуцирует на ∇ топологию, относительно которой ∇ является топологической булевой алгеброй в смысле работ М.Я.Антоновского, В.Г.Болтянского и Т.А.Сарымсакова. Оказывается, что это свойство является и достаточным для существования R-топологии в BO^*-алгебре.

Теорема 21. Если булева алгебра центральных проекторов в BO^*-алгебре E является топологической, то в E существует R-топология.

В частности, если M - алгебра фон Неймана, то в S(M) существует R-топология и она совпадает с топологией сходимости локально по мере.

С помощью теоремы 21 показывается, что топологическая BO^*-алгебра (E,t) является топологическим кольцом и множество $E_+ = \{x \in E: x \geq 0\}$ замкнуто в (E,t).

Теорема 22. Пусть (E,t) - топологическая BO^*-алгебра, M - AW^*-алгебра ограниченных элементов в E. Тогда пополнение (E,t) относительно равномерности, порожденной R-топологией t, $*$-изоморфно $S(M)$; в частности, (E,t) – полное равномерное пространство в том и только в том случае, когда $E=S(M)$.

Четвертая глава диссертации содержит три параграфа и посвящена абстрактной характеризации некоммутативных L_p-пространств и пространств Орлича. Для решения этой задачи в § 4.1. вводится понятие банахова упорядоченного $*$-алгеброида, являющегося, в некотором смысле, некоммутативным аналогом банаховой решетки.

Пусть E – векторное пространство над полем комплексных чисел, $*:E\to E$ – инволюция в E, $E_h=\{x\in E:\ x^*=x\}$, K – воспроизводящий собственный конус в E_h, определяющий в E частичный порядок: $x\le y \iff (y-x)\in K$. Элемент e из K назовем слабой единицей, если для любого ненулевого $y\in K$ существует такое $x\ne 0$, что $0\le x\le y$, $x\le e$. Обозначим через M подпространство всех ограниченных элементов из E относительно слабой единицы e, т.е. $M=\{a+ib\in E:\ a,\ b\in E_h,\ -\lambda e\le a,b\le\lambda e$ для некоторого числа $\lambda>0\}$. Будем говорить, что E допускает частичное умножение, согласованное с порядком (коротко: (E,e) – упорядоченный $*$-алгеброид), если на M можно определить операцию умножения так, чтобы M стало $*$-алгеброй с единицей e относительно инволюции, индуцированной из E, и частичный порядок, индуцированный на M_h обладал следующими свойствами:

а) $a^*xa\ge 0$ для любых $a\in M$, $x\in K\cap M$;

б) из $-e\le x\le e$ вытекает $x^2\le e$.

Пусть (E,e) – упорядоченный $*$-алгеброид, $\|\ \|$ – норма на E. Конус K называется монотонно замкнутым, если предел любой монотонной, сходящейся по норме последовательности из K принадлежит K. Пару $(E,\|\ \|)$ назовем банаховым упорядоченным $*$-алгеброидом, если конус K монотонно замкнут и банахова норма $\|\ \|$ обладает следующими свойствами:

1) $\|x^*\|=\|x\|$ для всех $x\in E$;

2) $\|x\|\le\|y\|$, если $0\le x\le y$;

3) $\|ax\|\le\|x\|$, если $a,\ x\in M$, $a^*a\le e$, где M – $*$-алгебра ограниченных относительно e элементов из E.

Любое банахово идеальное, в частности, симметричное подпространство в алгебре измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M, содержащее единицу M, является банаховым упорядоченным $*$-алгеброидом.

Теорема 23. На $*$-алгебре M ограниченных элементов банахова упорядоченного $*$-алгеброида существует норма, относительно которой M - C^*-алгебра.

Будем говорить, что банаховы упорядоченные *-алгеброиды (E,e) и (F,f) изометрически и порядково *-изоморфны, если существует такая сюръективная изометрия $\Phi: E \longrightarrow F$, что $\Phi(e)=f$, $\Phi(x^*)=\Phi(x)^*$ и $\Phi(x)\geq 0 \iff x\geq 0$.

Основным результатом § 4.2. является следующая абстрактная характеризация некоммутативных L_p-пространств.

Теорема 24. Пусть $((E,e),\|\ \|_E)$ - банахов упорядоченный *-алгеброид, норма которого обладает свойством p-аддитивности, $p\geq 1$: $\|x+y\|_E^p=\|x\|_E^p+\|y\|_E^p$ для любых x, $y\in M$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $xy=0$, где M - C^*-алгебра ограниченных относительно e элементов из E. Тогда M - конечная W^*-алгебра и на M существует точный нормальный конечный след μ такой, что $((E,e),\|\ \|_E)$ изометрически и порядково *-изоморфно $L_p(M,\mu)$.

В случае, когда M - коммутативная алгебра, утверждение теоремы 24 совпадает с известной характеризацией функциональных L_p-пространств в классе банаховых решеток.

В последнем § 4.3., используя понятие модуляра Орлича на упорядоченном *-алгеброиде, выделяется класс банаховых упорядоченных *-алгеброидов, которые изометрически и порядково *-изоморфны некоммутативным пространствам Орлича.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН Республики Узбекистан профессору Т.А.Сарымсакову за постоянное внимание к настоящей работе, а также участникам его семинара и семинара члена-корреспондента АН Республики Узбекистан профессора Ш.А.Аюпова за полезные обсуждения результатов работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Чилин В.И. Топологические O^*-алгебры, I // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. - 1979. - No 3. - С. 27-34.
2. Чилин В.И. Топологические O^*-алгебры, II // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. - 1979. - No 4. - С. 33-41.
3. Чилин В.И. Топологические O^*-алгебры // Функц.анализ и его прилож. -1980. - Т. 14. Вып. 1.- С. 87-88.
4. Чилин В.И. Алгебраическое описание некоммутативных вероятностных пространств // Докл. АН УзССР. - 1980. - No 7. - С. 5-8.
5. Чилин В.И. Беровские упорядоченные *-алгебры типа I // Докл. АН УзССР. - 1980. - No 8. - С. 7-10.
6. Чилин В.И. Беровские упорядоченные *-алгебры // Докл. АН СССР.

- 1981. - Т. 258, No 5. - С. 1065-1069.

7. Чилин В.И. Спектральная теорема для алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к AW^*-алгебре // В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Ташкент: Изд-во ТашГУ. 1982. С. 83-92.

8. Чилин В.И. Монотонная полнота полуконечных AW^*-алгебр. // Изв. ВУЗов. Математика. - 1982. - No 8.- С. 71-72.

9. Чилин В.И. Полуконечные бэровские упорядоченные * -алгебры // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. - 1983. - No 4. - С. 30-36.

10. Чилин В.И. Порядковая характеризация некоммутативных L_p-пространств // Сб. "Всесоюзная школа по теории функций." Тезисы сообщений. Кемерово. - 1983. - С. 128.

11. Чилин В.И. Полные *-регулярные алгебры с аксиомами (PSR) и (RF) // Сб. "XVII всесоюзная алгебраическая конференция". Тезисы сообщений. Минск. - 1983. - Ч. 2. - С. 262-263.

12. Чилин В.И. Порядковые свойства некоммутативных L_p-пространств // Сб. "VI международный симп. по теории информации". Тезисы сообщений. Ташкент. - 1984. - Ч. III. - С. 225-227.

13. Чилин В.И. Бэровские упорядоченные *-алгебры типа III // В кн.: Математический анализ и дифференциальные уравнения. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1984. С. 76-79.

14. Чилин В.И. Упорядоченные *-алгеброиды // Докл. АН СССР. - 1985. - Т.281.- No 5. - С. 1063-1067.

15. Чилин В.И. Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. - Москва. - 1985. - Т. 27. - С. 99-128.

16. Чилин В.И. Топологические бэровские упорядоченные *-алгебры. II // В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1985. С. 74-85.

17. Чилин В.И. Порядковая характеризация некоммутативных L_p-пространств // В кн.: Теория функций и ее приложения. Кемерово: Изд-во Кемеровского ун-та, 1985. С. 19-23.

18. Чилин В.И. Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов // В кн.: Математический анализ и алгебра. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1986. С. 77-81.

19. Чилин В.И. Абстрактная характеризация некоммутативных пространств Орлича // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. - 1986. - No 5. - С. 33-39.

20. Чилин В.И. Топологические AW^*-алгебры. Сб. "Бакинская между-

народная топологическая конференция". Тезисы сообщений. - Баку. - 1987. - Ч. II. - С. 333.

21. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Описание замкнутых выпуклых симметричных подмножеств в некоммутативных L_p-пространствах // Сб. "XI всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах". Тезисы докладов. - Челябинск. - 1986. - Ч. 1. - С. 95.

22. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Описание замкнутых выпуклых симметричных множеств измеримых операторов // Изв. ВУЗов. Математика. - 1987. - No 10. - С. 31-37.

23. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Неравенство треугольника для измеримых операторов относительно порядка Харди-Литтлвуда // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат.наук. - 1988. - No 4. - С. 44-50.

24. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. (Н)-свойство в некоммутативных симметричных пространствах // Сб. "XIV всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах". Тезисы сообщений. - Новгород. - 1989. - Ч. III. - С. 54.

25. Закиров Б.С., Чилин В.И. Любая EW^*-алгебра есть GB^*-алгебра // Докл. АН УзССР. - 1989. - No 11. - С.9-10.

26. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Критерий сходимости в правильных некоммутативных симметричных пространствах // Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук. - 1990.- No 4. - С. 34-39.

27. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Симметричные пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана // Докл.АН СССР. - 1990. - Т. 313, No 4. - С. 811-815.

28. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Сходимость по мере в правильных некоммутативных симметричных пространствах // Изв. ВУЗов. Математика. - 1990. - No 9. - С. 63-70.

29. Закиров Б.С., Чилин В.И. Абстрактная характеризация EW^*-алгебр // Функц. анализ и его прилож. - 1991. - Т. 25, Вып 1. - С. 76-78.

30. Закиров Б.С., Чилин В.И. Описание GB^*-алгебр, ограниченная часть которых есть W^*-алгебра // Узбекский матем. журнал. - 1991. - No 2. - С. 24-29.

31. Закиров Б.С., Чилин В.И. GB^*-алгебры, ограниченная часть которых есть W^*-алгебра // Сб."XVI всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах." Тезисы сообщений. - Н. Новгород. - 1991. - С. 76.

32. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Равномерная выпуклость и локальная равномерная выпуклость симметричных пространств изме-

римых операторов // Докл. АН СССР. - 1991. - Т. 317, No 3. - С. 555-558.
33. Chilin V.I. Topological Baer ordered *-algebras // Proc. Conf. Topology and Measure, III. - Greifswald.- 1982. - Part 1. - P. 33-47.
34. Chilin V.I., Medzhitov A.M., Sukochev F.A. Isometries of non-commutative Lorentz spaces // Math. Z. - 1989. - V. 200. - P. 527-545.
35. Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A. Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integral Equations and Operator Theory. - 1992. - V. 15. - P. 186-226.
36. Chilin V.I., Sukochev F.A. The Kadec-Klee property in symmetric spaces of measurable operators // International Math. Conference. Theses of reports. - L'vov. - 1992. - P. 7.
37. Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F. A. Local uniform and uniform convexity of non-commutative symmetric spaces of measurable operators // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. - 1992. - V. 111. - P. 355-368.

СИММЕТРИК ФАЗОЛАР ВА ЎЛЧОВЛИ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ БЭР АЛГЕБРАЛАРИ

Чилин В.И.

Диссертация ўлчовли операторларни симметрик фазоларнинг геометрик, тартиб ва топологик хоссаларини ўрганишга, хамда Бэр инволютив тартибланган алгебралар назариясини қуриш асосида EW^*-алгебраларни, фон Нейман алгебраларига туташган ўлчовли ва локал ўлчовли операторлар ҳалқаларини ва AW^*-алгебраларини тузилиши ва хоссаларини ягона нуктаи назадан ўрганишга бағишланган.

$(0,\infty)$ ярим ўқда ўлчовли функцияларнинг симметрик фазолари E нинг кўпгина топологик ва геометрик хоссалари, масалан, текис қавариқлик, кучли яқинлашиш билан ўрин алмаштиришдаги яқинлашиши орасидаги боғланиши, Кадец-Кли хоссалари ва ҳ.к. хоссалар E фазо ёрдамида қурилган нокоммутатив симметрик фазолар учун ҳам ўринли бўлиши (ворислик қилиши) исботланган.

Ўлчовли операторлардан иборат қавариқ тўла симметрик тўпламларининг четки нуқталари ўрганилган ва нокоммутатив Лоренц фазолари изометрияларининг умумий кўриниши келтирилган.

Бэрнинг тартибланган $*$-алгебраси (BO^*-алгебралар) тушунчаси киритилиб, улар муфассал ўрганилган. BO^*-алгебранинг чегараланган элементлари тўплами M нинг AW^*-алгебра ташкил этиши ва E нинг AW^*-алгебра M га туташган барча локал ўлчовли операторларнинг $*$-алгебрасини тўлдирилган $*$-қисм-алгебрасига $*$-изоморфлиги исботланган. Диссертациядаги BO^*-алгебралар назариясига асосланиб, хусусан, GB^*-алгебралар билан EW^*-алгебралар орасидаги боғланиш ҳақидаги муаммо ечилган.

Банах $*$-алгеброиди тушунчаси киритилган ва ўрганилган. Бу тушунча асосида нокоммутатив L_p ва Орлич фазоларининг абстракт характеризацияси (аксиоматик аниқловчи хоссалари) келтирилган.

SYMMETRIC SPACES AND BAER ALGEBRAS OF MEASURABLE OPERATORS

Chilin V.I.

The dissertation is devoted to investigation of geometrical, order and topological properties of symmetric spaces of measurable operators and also to construction of the theory of Baer ordered involution algebras, which makes it possible, from the unit viewpoint, to describe structure and properties of EW^*-algebras, rings of measurable and locally measurable operators affiliated with von Neumann algebras and AW^*-algebras.

It is established that many topological and geometrical properties of symmetric spaces E of measurable functions on the semi-axis $(0,\infty)$, for example, such as uniform convexity, the Kadec-Klee property, connection between strong convergence and convergence of rearrangements etc. are inherited by noncommutative symmetric spaces generated by E.

The extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators are described and the general form of isometries of noncommutative Lorentz spaces is established.

The class of Baer ordered *-algebras (BO^*-algebras) is extracted and investigated. It is proved that the set M of bounded elements of a BO^*-algebra E forms an AW^*-algebra and E is *-isomorphic to a solid *-subalgebra of the *-algebra of all locally measurable operators affiliated with AW^*-algebra M. In particular, with the help of the constructed theory of BO^*-algebras the problems are solved on connection between GB^*-algebras and EW^*-algebras.

The notion of Banach *-algebroid is introduced that made it possible to give the abstract characterization of noncommutative L_p-spaces and Orlicz spaces.

Подписано к печати 5.07.93 Заказ № 510
Тираж 100 экз. Объем 1,25 п. л. Формат бумаги 60×84 1/16.

Отпечатано на ротапринте в типографии ТашГУ им. В. И. Ленина.
Адрес: 700095, г. Ташкент, ГСП, Вузгородок, ТашГУ.