Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ и С. Г. КРЕИН

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ФУНКЦИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 X 1950)

1. Пусть $H(\tau)$ есть эрмитова матрица, порождающая линейное преобразование n-мерного пространства $\mathfrak{H}_n$, элементы которой дифференцируемы по параметру τ. Обозначим через $\lambda_i(\tau)$ $(i=1,\ldots,n)$ ее собственные числа и через $E_i(\tau)$ — операторы ортогонального проектирования пространства $\mathfrak{H}_n$ на направления собственных векторов $e_i(\tau)$, соответствующих собственным числам $\lambda_i(\tau)$.

Как известно,

$$H(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\tau)\,E_i(\tau).$$

Если $f(\lambda)$ есть дифференцируемая функция вещественного переменного λ, то для вычисления производной по параметру τ от матрицы $f(H(\tau))$ естественно было бы пользоваться формулой

$$\frac{df(H(\tau))}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i(\tau))\,E_i(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\tau}\{f(\lambda_i(\tau))\,E_i(\tau)\}. \tag{1}$$

Однако отдельные слагаемые первой суммы в (1) могут быть не дифференцируемы в тех точках τ, где меняется кратность соответствующего собственного числа, а потому формула (1) не всегда применима.

Мы установим формулу, дающую возможность эффективно вычислить производную $df(H(\tau))/d\tau$ во всех случаях.

Теорема 1. *Если $f(\lambda)$ имеет непрерывную производную $df/d\lambda$ в окрестности точек $\lambda_i(\tau_0)$ $(i=1,\ldots,n)$, то справедлива формула*

$$\frac{df(H(\tau_0))}{d\tau}=\sum_k\sum_i\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_k)}{\lambda_i-\lambda_k}\,E_i(\tau_0)\,\frac{dH(\tau_0)}{d\tau}\,E_k(\tau_0). \tag{2}$$

Формула (2) непосредственно проверяется для случая, когда $f(\lambda)$ — полином, а затем теорема доказывается при помощи предельного перехода.

Формула (2) имеет преимущество перед формулой (1) даже и в том случае, когда последняя имеет смысл. Для вычисления производной в точке τ_0 по формуле (1) нужно знать функции $\lambda_i(\tau)$ и $E_i(\tau)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ в окрестности этой точки, в то время как в формуле (2) фигурируют только значения этих функций в точке τ_0.

Если матрицы, стоящие слева и справа в (2), применить к вектору $x = \sum_{i=1}^{n} c_i(\tau) e_i(\tau)$, то мы получим формулу

$$\frac{df(H(\tau_0))}{d\tau} x = \sum_k \sum_i c_i(\tau) \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \left(\frac{dH}{d\tau} e_i, e_k\right) e_k(\tau_0). \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) остаются справедливыми для случая, когда $H(\tau)$ есть эрмитов оператор с дискретным спектром в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $dH/d\tau$ обладает конечной H-нормой [1].

2. В случае, когда $H(\tau)$ есть ограниченный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, естественным обобщением формулы (2) является формула

$$\frac{df(H(\tau_0))}{d\tau} = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda(\tau_0) \frac{dH(\tau_0)}{d\tau} dE_\mu(\tau_0), \qquad (4)$$

где $E_\lambda(\tau)$ — спектральная функция оператора $H(\tau)$. Двойной интеграл (4) желательно понимать как повторный. Если первое интегрирование провести по λ, то останется интеграл типа

$$\int F(\mu)\, dE_\mu, \qquad (5)$$

где $F(\mu)$ — уже операторная функция переменного μ. Под этим интегралом мы понимаем абстрактный интеграл Стильтьеса, определяемый как предел соответствующих интегральных сумм [2].

Теорема существования. *Если $F(\mu)$ является неопределенным интегралом в смысле Бохнера* [3], *т. е.*

$$F(\mu) = \int G(\mu)\, d\mu \quad \left(\int \| G(\mu) \| \, d\mu < \infty\right),$$

то интеграл (5) *существует.*

Для интеграла (5) имеет место оценка

$$\left\| \int_a^b F(\mu)\, dE_\mu \right\| \leqslant \max_{a \leqslant \mu \leqslant b} \| F(\mu) \| + \int_a^b \| G(\mu) \| \, d\mu,$$

с помощью которой устанавливается следующий результат.

Теорема 2. *Если $f(\lambda)$ имеет абсолютно непрерывную производную $df/d\lambda$ в некоторой окрестности спектра оператора $H(\tau_0)$, то формула* (4) *справедлива.*

Замечание. Легко видеть, что если функция $f(\lambda, \tau)$ зависит от τ и существуют непрерывные по обеим переменным в окрестности спектра оператора $H(\tau)$ при $|\tau - \tau_0| < \delta$ частные производные $\partial f(\lambda, \tau)/\partial\lambda$ и $\partial f(\lambda, \tau)/\partial\tau$, причем $\partial f(\lambda, \tau)/\partial\lambda$ абсолютно непрерывна по λ, то

$$\frac{df(H(\tau_0), \tau_0)}{d\tau} = \iint \frac{f(\lambda, \tau_0) - f(\mu, \tau_0)}{\lambda - \mu} dE_\lambda(\tau_0) \frac{dH(\tau_0)}{d\tau} dE_\mu(\tau_0) + \int \frac{\partial f(\lambda, \tau_0)}{\partial\tau} dE_\lambda(\tau_0). \qquad (6)$$

3. Для вычисления высших производных от оператора $f(H(\tau))$ приходится дифференцировать по параметру τ интегралы типа

$$D(\tau) = \int F(\mu, \tau)\, dE_\mu(\tau). \qquad (7)$$

Формула (6) остается справедливой и для таких операторов, если заменить в ней функцию $f(\mu, \tau)$ оператором $F(\mu, \tau)$, при условии, что $\partial F(\mu, \tau)/\partial\mu$ и $\partial F(\mu, \tau)/\partial\tau$ представимы по μ неопределенными интегралами Бохнера и непрерывны по τ.

Пользуясь этим, можно, например, написать формулу для второй производной:

$$\frac{d^2 f(H(\tau))}{d\tau^2} = 2! \iiint \Delta^{(2)}_{\lambda, \mu, \nu} f\, dE_\lambda(\tau) \frac{dH}{d\tau} dE_\mu(\tau) \frac{dH}{d\tau} dE_\nu(\tau) +$$
$$+ \iint \Delta^{(1)}_{\lambda, \mu} f\, dE_\lambda(\tau) \frac{d^2H}{d\tau^2} dE_\mu(\tau),$$

где $\Delta^{(i)}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1}} f$ есть i-я разделенная разность функции $f(\lambda)$ в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1}$ [4].

Вообще, если оператор $H(\tau)$ имеет в окрестности точки τ_0 непрерывную производную по τ порядка k, а $F(\mu, \tau)$ есть оператор, у которого все частные производные порядка k в окрестности спектра оператора $H(\tau)$ при $|\tau - \tau_0| < \delta$ непрерывны по τ и представимы неопределенными интегралами Бохнера по μ, то операторный интеграл (7) имеет в окрестности точки τ_0 непрерывную производную $d^k D(\tau)/d\tau^k$, которая может быть вычислена путем последовательного применения формулы (6).

З а м е ч а н и е. Аналогично предыдущему можно определить интегралы типа

$$\int dE_\mu(\tau) F(\mu, \tau), \quad \int F_1(\mu, \tau)\, dE_\mu(\tau) F_2(\mu, \tau).$$

Производные от таких интегралов вычисляются по формулам, подобным приведенным выше, причем порядок расположения F_1, dE_μ, F_2 сохраняется.

4. Приведенные выше формулы, повидимому, удобны для формального разложения по параметру ε операторов вида

$$f(H_0 + \varepsilon H_1),$$

где $f(\lambda)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция, а H_0 и H_1 — эрмитовы операторы.

Например, включая члены порядка ε^2, будем иметь

$$f(H_0 + \varepsilon H_1) = f(H_0) + \varepsilon \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda H_1 dE_\mu +$$
$$+ \varepsilon^2 \iiint \frac{\dfrac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} - \dfrac{f(\nu) - f(\mu)}{\nu - \mu}}{\lambda - \nu} dE_\lambda H_1 dE_\mu H_1 dE_\nu + \cdots, \tag{8}$$

где E_λ — спектральная функция оператора H_0.

Если оператор H_0 имеет дискретный спектр, а $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — полная система его собственных векторов, то по формуле (8) можно вычислить

$$(f(H_0 + \varepsilon H_1)\varphi_i, \varphi_j) = (f(H_0)\varphi_i, \varphi_j) + \varepsilon \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} (H_1\varphi_i, \varphi_j) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{\lambda_j - \lambda_i} \sum_k \left\{ \frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_k)}{\lambda_j - \lambda_k} - \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_k)}{\lambda_i - \lambda_k} \right\} (H_1\varphi_i, \varphi_k)\overline{(H_1\varphi_j, \varphi_k)} + \cdots \tag{9}$$

5. Результаты п. 3 можно применить для установления дифференцируемости по параметру решений некоторых векторных и оператор-

ных уравнений, встречающихся при асимптотическом интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений.

Пусть $H(\tau)$ есть эрмитов оператор, непрерывный по τ при $a \leqslant \tau \leqslant b$. Полным спектром Π этого оператора мы будем называть множество точек (λ_0, τ_0) плоскости (λ, τ), для которых λ_0 есть точка спектра оператора $H(\tau_0)$ $(a \leqslant \tau_0 \leqslant b)$. Π есть замкнутое ограниченное множество плоскости (λ, τ). Пусть $\tilde{\Pi}$ есть некоторая замкнутая изолированная часть полного спектра. Совокупность $\tilde{\Lambda}(\tau_0)$ первых координат точек множества $\tilde{\Pi}$ с фиксированной второй координатой τ_0 есть замкнутая изолированная часть спектра $\Lambda(\tau_0)$ оператора $H(\tau_0)$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$ инвариантное подпространство оператора $H(\tau)$, соответствующее этой части его спектра.

Теорема 3. *Рассмотрим уравнение*

$$H(\tau)\, x(\tau) = g(\tau) \quad (a \leqslant \tau \leqslant b), \tag{10}$$

где $x(\tau)$, $g(\tau)$ — векторы из $\mathfrak{H}$, а $H(\tau)$ — ограниченный эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, спектр которого при некоторых значениях $\tau \in [a, b]$ может содержать точку $\lambda = 0$. Пусть $\tilde{\Pi}$ есть некоторая изолированная часть полного спектра оператора $H(\tau)$,, содержащая все точки полного спектра вида $(0, \tau)$, и $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$ — инвариантное подпространство оператора $H(\tau)$, соответствующее $\tilde{\Pi}$.

Тогда, если при каждом $\tau \in [a, b]$ вектор $g(\tau)$ ортогонален $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$ и если $g(\tau)$, $H(\tau)$ имеют на сегменте $[a, b]$ непрерывные производные по τ порядка k, то решение

$$x(\tau) = \int\limits_{\Lambda(\tau) - \tilde{\Lambda}(\tau)} \frac{dE_\lambda(\tau)}{\lambda}\, g(\tau)$$

уравнения (10) также обладает на сегменте $[a, b]$ непрерывной производной по τ порядка k.

Теорема 4. *Рассмотрим операторное уравнение*

$$H(\tau)\, X(\tau) - X(\tau)\, H(\tau) = F(\tau) \quad (a \leqslant \tau \leqslant b), \tag{11}$$

где $F(\tau)$ есть оператор, который при каждом значении τ переводит инвариантное подпространство $\tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$ оператора $H(\tau)$, соответствующее некоторой изолированной части $\tilde{\Pi}$ его полного спектра, в ортогональное дополнение $\mathfrak{H} \ominus \tilde{\mathfrak{H}}(\tau)$, а на последнем равен нулю.

Уравнение (11) имеет решение

$$X(\tau) = \int\limits_{\Lambda(\tau) - \tilde{\Lambda}(\tau)} \int\limits_{\tilde{\Lambda}(\tau)} \frac{dE_\lambda(\tau)\, F(\tau)\, dE_\mu(\tau)}{\lambda - \mu}, \tag{12}$$

причем, если операторы $H(\tau)$ и $F(\tau)$ имеют на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную порядка k, то и решение (12) обладает этим свойством.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
15 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **5**, 1947. [2] М. К. Гаврин, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. наук, в. 1959 (1950). [3] S. Bochner, Fund. Math., **20**, 262 (1933). [4] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, ч. 1, 1936, стр. 11.