SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

Montpellier - Perpignan 1980. Exposé n° 9

STRICTE CONVEXITE DE LA NORME MODULAIRE DES ESPACES INTEGRAUX DE TYPE ORLICZ ET Δ_2-CONDITION.

par Rachida FENNICH

L'origine de ce travail est la recherche d'une caractérisation de la stricte convexité des espaces intégraux de type Orlicz L_φ et des espaces de Vitali E_φ introduits parallèlement par J. CHATELAIN [C] et A. KOZEK [K].

Dans le cadre des espaces d'Orlicz classique, cette étude a été faite successivement par K. SUNDARESAN [S], M.M. RAO [R] et B. TURETT [T_2]. Les techniques utilisées par ces auteurs étaient insuffisantes pour atteindre une caractérisation de la stricte convexité de E_φ et ne sont pas applicables dans le cas d'une fonction à paramètre.

En introduisant une notion de point d'énergie maximum, on montre au premier paragraphe que la stricte convexité de la fonction de Young φ est caractéristique de celle de l'espace E_φ. Les théorèmes de mesurabilité

Reçu le 27 Juin 1980

de [CV] s'avèrent être l'outil fondamental pour établir la nécessité de la condition.

On étend ensuite le résultat de B. TURETT qui donne une caractérisation de la stricte convexite de L_φ faisant apparaître le fait que tout point de la sphère unité doit avoir une énergie maximum. Dans le cas d'une fonction de Young sans paramètre à variable réelle et en mesure finie, M.A.KRASNOSELSKII et Ya.B.RUTIKII avaient montré l'équivalence de cette dernière condition avec la "Δ_2-condition" sur la croissance de φ .

Ceci motive l'intérêt porté à une étude en profondeur, au paragraphe 2, de la Δ_2-condition. Celle-ci s'est avérée caractéristique de la stricte convexité de L_φ et de l'ouverture de la classe d'Orlicz C_φ. Son absence au contraire entraîne l'existence d'une copie de ℓ^∞ dans L_φ.

On étend ainsi aux espaces intégraux de type Orlicz les résultats de KRASNOSELSKII-RUTICKII [K-R] et B. TURETT [T] pour lesquels la fonction de Young était sans paramètre ; leurs techniques étant inadaptées au cas à paramètre, on y pallie en utilisant les résultats de A. FOUGERES et R. VAUDENE sur l'inclusion des sections des fonctionnelles intégrales [F-V].

§ 0 : PRELIMINAIRES

Soient $(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ un espace mesuré, de mesure μ σ-finie complète, Y un espace de Banach réflexif séparable, Y' son dual fort, B_Y la tribu borélienne de Y et $\mathcal{M}(\Omega,Y)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables de Ω dans Y. On considère une fonction de Young $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, φ^* sa polaire et $\overline{\varphi}$ la fonction de Young associée à φ :

$$\overline{\varphi} : (\omega,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname*{Sup}_{|y|=t} \varphi(\omega,y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Soit I_φ la fonctionnelle intégrale associée à φ

$$I_\varphi : u \in \mathcal{M}(\Omega,Y) \longrightarrow \int_\Omega \varphi(\omega,u(\omega))\, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

On désigne par :

C_φ : la classe d'Orlicz associée à φ, c'est le domaine de la fonctionnelle intégrale I_φ.

L_φ : l'espace d'Orlicz associé à φ, c'est l'espace vectoriel engendré par C_φ.

E_φ : l'espace vectoriel sous-jacent à C_φ

$\|.\|_Y$: la norme modulaire définie sur L_φ, c'est la jauge du convexe $I_\varphi^{\leqslant}(1) = \{u : I_\varphi(u) \leqslant 1\}$.

L_φ et E_φ sont des espaces de Banach munis de la norme $\|.\|_\varphi$.

On note par S_φ la sphère unité de L_φ.

On renvoie à [C] et [G] pour toutes les définitions usuelles; rappelons cependant un résultat de décomposabilité des espaces E_φ et L_φ de Giner [G] :

0.1 : DEFINITION :

Un sous-espace vectoriel L de $\mathcal{M}(\Omega, Y)$ est dit "*stable par troncature*" si pour tout $u \in L$ et tout $A \in \mathfrak{S}$, $u\chi_A \in L$. Si de plus il existe une suite $(G_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de μ-recouvrement de Ω, σ-finie telle que $\cup_p L^\infty(G_p, \mu) \subset L$, L est dit "*décomposable*" ; et $(G_p)_p$ est appelé "*suite de décomposabilité*" de L.

0.2 : THEOREME : [G ; 1.1.4 et 2.3.3]

Soit $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction de Young ; l'espace L_φ est décomposable si et seulement si φ est continue en zéro.
Si de plus la mesure μ est continue, une condition nécessaire et suffisante pour que E_φ soit décomposable est que la fonction $\overline{\varphi}$ soit μ-p.p. à valeurs finies (si $Y = \mathbb{R}^n$, ceci équivaut à φ μ-p.p. à valeurs finies [C-F]).

Si $(G_p)_p$ est une suite de décomposabilité de E_φ on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \overline{\varphi}(\omega, p\,\chi_{G_p}(\omega))\, d\mu = \int_{G_p} \overline{\varphi}(\omega, p)\, d\mu < +\infty$$

§ 1 : STRICTE CONVEXITE DES ESPACES D'ORLICZ E_φ, L_φ

On montre, dans ce paragraphe, comment la propriété de stricte convexité de la fonction de Young φ caractérise la structure géométrique des boules unités des espaces d'Orlicz E_φ et L_φ. On retrouve comme cas particulier les résultats de M.M. RAO [R] et B. TURETT [T_1][T_2].

1.1 : DEFINITION :

On dira qu'une fonction $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est "*strictement convexe*" si pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, $\varphi(\omega,.)$ est strictement convexe sur son domaine effectif.

1.2 : DEFINITION :

Un espace de Banach $(X, \|.\|)$ est dit "*strictement convexe*" si pour tout x et y dans X, x différent de y et $\|x\| = \|y\| = 1$ on a :

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| < 1 \qquad \text{pour} \quad 0 < \alpha < 1$$

On s'intéresse aux points de S_φ la sphère unité de L_φ. La boule-unité fermée de L_φ *coïncide* par construction avec le convexe $I_\varphi^{\leqslant}(1)$.

1.3 : DEFINITION :

On appellera "*point d'énergie maximum*" tout point u de la sphère unité S_φ qui vérifie $I_\varphi(u) = 1$.

On donne maintenant un lemme sur l'existence de ces points qui interviendra dans la suite de cet exposé.

1.4 : LEMME :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young, tout point de* S_φ *qui appartient à l'intérieur* $\overset{\circ}{C}_\varphi$ *de* C_φ *est un point d'énergie maximum.*

Démonstration :

I_φ , étant une fonction convexe s.c.i. est continue sur $\overset{\circ}{C}_\varphi$ qui est non vide. Soit $u \in \overset{\circ}{C}_\varphi \cap S_\varphi$, on choisit deux suites de nombres réels $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ qui sont telles que :

$$\forall n, \quad 0 < \alpha_n < 1 \quad \text{et} \quad \alpha_n \text{ croit vers } 1$$

$$\forall n, \quad \beta_n > 1 \quad \text{et} \quad \beta_n \text{ décroit vers } 1$$

On sait que la norme modulaire, $\|.\|_\varphi$, majore la fonctionnelle I_φ sur le convexe $I_\varphi^{\leqslant}(1)$ et la minore à l'extérieur (Voir[C]). Il en résulte :

$$\forall n \quad I_\varphi(\alpha_n u) \leqslant \|\alpha_n u\|_\varphi < 1$$

$$\text{et} \quad \forall n \quad I_\varphi(\beta_n u) \geqslant \|\beta_n u\|_\varphi > 1$$

Puisque I_φ est continue en u, on déduit que $I_\varphi(u) = 1$.

★

1.5 : COROLLAIRE :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young, tout point de la sphère unité de l'espace sous-jacent* E_φ *est un point d'énergie maximum.*

1.6 : Remarque :

La sphère unité de E_φ est $\neq \emptyset$ si et seulement si $E_\varphi \neq \{0\}$; ceci implique que l'on a :
$\mu(\{\omega : \mathrm{dom}\, \varphi(\omega,.)$ non borné$\}) > 0$; lorsque μ est continue et $Y = \mathbb{R}^n$, cette condition est caractéristique [C-F]. De plus pour tout $u \in E_\varphi$, l'ensemble $\mu\,\{\omega : \mathbb{R}_+ u(\omega) \not\subset \mathrm{dom}\,\varphi(\omega,.)\}$ est de mesure nulle.

1.7 : THEOREME : Stricte convexité de E_φ

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction de Young strictement convexe, l'espace sous-jacent E_φ est strictement convexe ; la réciproque est vraie lorsque la mesure μ est continue et la fonction $\overline{\varphi}$ est à valeurs finies.

1.8 : Remarque :

Le théorème (1.7) généralise le résultat de Turett $[T_1]$ et $[T_2]$. La technique utilisée par l'auteur au cas des fonctions de Young sans paramètre n'est pas applicable dans le cas avec paramètre.

Démonstration :

(i) On suppose que φ est strictement convexe et on considère deux points différents u et v de la sphère unité de E_φ ; d'après (1.6) $\varphi(\omega,u(\omega))$ et $\varphi(\omega,v(\omega))$ sont finies pour μ-presque tout ω.
Posons $A = \{\omega \in \Omega : u(\omega) \neq v(\omega)\}$; on a : $\mu(A) > 0$ et pour μ-presque tout $\omega \in A$, pour tout $\alpha \in]0,1[$:

$$\varphi(\omega, \alpha u(\omega) + (1-\alpha)\, v(\omega)) < \alpha\, \varphi(\omega\, , u(\omega)) + (1-\alpha)\varphi(\omega, v(\omega))$$

D'où :

$$I_\varphi(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha\, I_\varphi(u) + (1-\alpha)\, I_\varphi(v) \leqslant 1$$

Puisque $\alpha u + (1-\alpha)v \in E_\varphi$, et en raison du corollaire (1.5), pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a :

$$\| \alpha u + (1-\alpha)\, v \|_\varphi < 1$$

(ii) Réciproquement, on va raisonner par l'absurde.

Soit A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\varphi(\omega,.)$ n'est pas strictement convexe, i.e. pour lesquels il existe x et $y \in Y$, $x \neq y$, avec :

$$\varphi(\omega, \tfrac{1}{2}\, x + \tfrac{1}{2}\, y) = \tfrac{1}{2}\, \varphi(\omega,x) + \tfrac{1}{2}\, \varphi(\omega,y) \in \mathbb{R}$$

Considérons alors la multiapplication :

$$\Gamma = \{(\omega,x,y) : x \neq y \quad \text{et} \quad \phi(\omega,x,y) \in [\,0,+\infty\,[\,\}$$

où $\quad \phi(\omega,x,y) = \varphi(\omega,\tfrac{1}{2}\, x + \tfrac{1}{2}\, y) - \tfrac{1}{2}\, \varphi(\omega,x) - \tfrac{1}{2}\, \varphi(\omega,y) \quad ;$

la mesurabilité de ϕ entraîne celle de la multiapplication

$$\Gamma = [\Omega \times (Y \times Y \setminus \Delta)] \cap \phi^{-1}\,([\,0,+\infty\,[)$$

(où Δ est la diagonale de $Y \times Y$), donc celle de $A = \mathrm{dom}\, \Gamma$.

Et dire que $\varphi(\omega,.)$ n'est pas presque partout strictement convexe assure que $\mu(A) > 0$, il existe donc une sélection mesurable non p.p. nulle $s(.) = (x(.), y(.))$ de Γ.

Reste à construire à partir de s, deux éléments u et v distincts de E_φ vérifiant

$$\|u\|_\varphi = \|v\|_\varphi = \|\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} v\|_\varphi = 1$$

Pour cela, on considère une suite de décomposabilité $(G_p)_p$ de E_φ ; comme $\mu(A) > 0$ et $\Omega = \uparrow\bigcup_p G_p$, il existe $p_o \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mu(A \cap G_{p_o}) > 0$$

On pose :

$$A_n = \{\omega \in A \cap G_{p_o} : \mathrm{Sup}(|x(\omega)| , |y(\omega)|) \leqslant n\}$$

Pour n_o assez grand, $\mu(A_{n_o}) > 0$; d'où, en raison du théorème (0.2) de décomposabilité de Giner,

$$x\, \chi_{A_{n_o}} \quad \text{et} \quad y\, \chi_{A_{n_o}} \in L^\infty(G_{p_o}) \subset E_\varphi$$

$$\text{et} \qquad \int_{A_{n_o}} \varphi(\omega, x(\omega))\, d\mu \leqslant \int_{A_{n_o}} \overline{\varphi}(\omega, n)\, d\mu < +\infty$$

$$\int_{A_{n_o}} \varphi(\omega, y(\omega))\, d\mu \leqslant \int_{A_{n_o}} \overline{\varphi}(\omega, n)\, d\mu$$

Puisque μ est continue, il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que

$$B \subset A, \quad 0 < \mu(B) < \mu(A) \quad \text{et} \quad \int_B \overline{\varphi}(\omega, n)\, d\mu \leqslant 1$$

Il résulte que $x\, \chi_B$ et $y\, \chi_B$ sont des points de la boule unité de E_φ. On peut envisager trois cas :

<u>1er cas</u> :

Si $I_\varphi(x\ \chi_B) = I_\varphi(y\ \chi_B) = 1$, d'après la définition même de x et y on a :

$$I_\varphi(\frac{1}{2}\ x\ \chi_B + \frac{1}{2}\ y\ \chi_B) = 1$$

Le résultat est donc immédiat.

<u>2ème cas</u> :

On suppose que $I_\varphi(x\ \chi_B) = I_\varphi(y\ \chi_B) < 1$.

On considère la restriction de φ à $A \setminus B \times Y$ et on désigne par $E_\varphi(A \setminus B)$, l'espace sous-jacent correspondant.

Puisque I_φ est continue et prend les valeurs 0 et 1 en des points de la boule unité de $E_\varphi(A \setminus B)$ qui est connexe, il existe W, prolongement par zéro d'un élément de $E_\varphi(A \setminus B)$, tel que :

$$I_\varphi(W) = 1 - I_\varphi(x\ \chi_B)$$

On pose :

$$\begin{cases} u = x\ \chi_B + W \\ v = y\ \chi_B + W \end{cases}$$

Il est évident que $u \neq v$, en plus on a :

$$\begin{aligned}
I_\varphi(u) &= 1 \implies \|u\|_\varphi = 1 \\
I_\varphi(v) &= 1 \implies \|v\|_\varphi = 1 \\
I_\varphi(\tfrac{1}{2}\ u+\tfrac{1}{2}\ v) &= 1 \implies \|\tfrac{1}{2}\ u+\tfrac{1}{2}\ v\|_\varphi = 1
\end{aligned}$$

<u>3ème cas</u> :

Si $I_{\varphi}(x\ \chi_B) \neq I_{\varphi}(y\ \chi_B)$, on suppose par exemple que l'on ait :

$$I_{\varphi}(x\ \chi_B) < I_{\varphi}(y\ \chi_B)$$

Soit :

$$S = \{\omega \in B : \varphi(\omega,\ x(\omega)) - \varphi(\omega,\ y(\omega)) < 0\ \}$$

On remarque que S est mesurable et $\mu(S) > 0$. Comme μ est continue, on peut choisir deux parties S_1 et S_2 de S telles que :

$$S = S_1 \cup S_2 \quad \text{et} \quad 0 < \mu(S_1) = \mu(S_2) = \frac{1}{2}\,\mu(S)$$

On pose :

$$\begin{cases} u = x\ \chi_{S_1} + y\ \chi_{S_2} \\ \\ v = y\ \chi_{S_1} + x\ \chi_{S_2} \end{cases}$$

et on considère

$$F(\omega) = \varphi(\omega,\ u(\omega)) - \varphi(\omega,\ v(\omega))$$

On a :

$$F(\omega) < 0 \qquad \forall\ \omega \in S_1$$

$$F(\omega) > 0 \qquad \forall\ \omega \in S_2$$

Ceci entraîne

$$-\ \alpha = \int_{S_1} F(\omega)\ d\mu < \int_{S_2} F(\omega)\ d\mu$$

(∗) Si $\alpha \leqslant \int_{S_2} F(\omega)\ d\mu$, il existe $S' \subset S_2$ tel que :

$$0 < \mu(S') < \mu(S_2) \quad \text{et} \quad \alpha = \int_{S'} F(\omega)\ d\mu$$

D'où :

$$\int_{S_1 \cup S'} F(\omega)\, d\mu = 0$$

Donc :

$$\int_{S_1 \cup S'} \varphi(\omega,\, u(\omega))\, d\mu = \int_{S_1 \cup S'} \varphi(\omega,\, v(\omega))\, d\mu$$

On se ramène au cas précédent : $u\, \chi_{S_1 \cup S'}$ et $v\, \chi_{S_1 \cup S'}$ jouent le rôle de $x\, \chi_B$ et $y\, \chi_B$.

(**) Si $\alpha > \int_{S_2} F(\omega)\, d\mu$, on conclut de la même façon et avec un raisonnement analogue à (*) sur S_1.

★

1.9 : <u>THEOREME</u> : <u>Stricte convexité de</u> L_φ .

Soit $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction de Young ; une condition suffisante pour que* L_φ *soit strictement convexe est :*

(i) φ *strictement convexe*

(ii) *tout point de la sphère unité de* L_φ *est un point d'énergie maximum.*

Lorsque la mesure μ *est continue et la fonction* $\overline{\varphi}$ *est à valeurs finies cette condition est aussi nécessaire.*

1.10 : <u>Remarques</u>

(1) *Nous verrons au paragraphe suivant que seuls les espaces* E_φ *sont strictement convexes.*

(2) *En fait, le problème général sous-jacent, est la coïncidence entre les points extrémaux et ceux d'énergie maximum* (cf. : $[F_e.F]$)

Démonstration :

(i) et (ii) $\Longrightarrow$ L_φ strictement convexe : la démonstration est analogue à celle du théorème (1.7). Réciproquement :

L_φ strictement convexe $\Longrightarrow$ (i) : il suffit de transcrire la démonstration du théorème 1.7 compte tenu du théorème (0.2) de décomposabilité de Giner.

L_φ strictement convexe $\Longrightarrow$ (ii) : on raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe un point $u \in S_\varphi$ qui n'a pas une énergie maximum.

Soit :

$$\|u\|_\varphi = 1 \quad \text{et} \quad I_\varphi(u) < 1$$

On pose :

$$A = \{\omega \in \Omega : |u(\omega)| > 0\}$$

La continuité de la mesure μ donne l'existence d'une partie $B \subset A$ telle que $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Donc :
$$u\,\chi_B \neq 0 \quad \text{et} \quad u\,\chi_{\Omega\setminus B} \neq 0$$

En vertu du lemme (1.4) u n'appartient pas à $\overset{\circ}{C}_\varphi$, par conséquent :

$$u\,\chi_B \notin \overset{\circ}{C}_\varphi \quad \text{ou} \quad u\,\chi_{\Omega\setminus B} \notin \overset{\circ}{C}_\varphi$$

Comme $I_\varphi(u) < 1$, on déduit que :

$$\|u\,\chi_B\|_\varphi = 1 \quad \text{ou} \quad \|u\,\chi_{\Omega\setminus B}\|_\varphi = 1$$

On suppose par exemple que l'on ait $\| u \chi_B \|_\varphi = 1$.
On a d'autre part :

$$\int_\Omega \varphi(\omega, [\frac{1}{2} u \chi_B + \frac{1}{2} u](\omega))\, d\mu \leqslant \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega))\, d\mu < 1$$

et pour tout $\alpha > 1$:

$$\int_\Omega \varphi(\omega, \alpha[\frac{1}{2} u \chi_B + \frac{1}{2} u](\omega))\, d\mu \geqslant \int_\Omega \varphi(\omega, \alpha u \chi_B(\omega))\, d\mu = \infty$$

D'où :

$$\|\frac{1}{2} u \chi_B + \frac{1}{2} u \|_\varphi = \| u \chi_B \|_\varphi = \| u \|_\varphi = 1$$

et L_φ n'est donc pas strictement convexe.

§ 2 : Δ_2-CONDITION ET COPIE DE ℓ^∞

On suppose désormais que la mesure μ est continue

On montre que la stricte convexité de L_φ implique la Δ_2-condition au sens de J. Chatelain [C] ; celle-ci est de plus caractéristique de l'ouverture de la classe d'Orlicz C_φ (cf : théorème (2.3)).

Inversement, l'absence d'une Δ_2-condition entraîne l'existence d'une copie de ℓ^∞ dans l'espace d'Orlicz L_φ (cf. théorème (2.8)).

On utilisera des résultats de J. Chatelain [C] et R. Vaudène [FV] et [V] .

I - Etude de la Δ_2-condition

2.1 : DEFINITION : [C]

On dit qu'une fonction de Young $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifie une "Δ_2-*condition*" s'il existe une constante $k > 1$ et une application f positive μ-intégrable telles que l'on ait :

$$\varphi(\omega, 2y) \leqslant k\, \varphi(\omega, y) + f(\omega)$$

Cette notion de "Δ_2-condition" reçoit selon les auteurs des formalisations diverses. En utilisant la remarque de [K.R] (page 23), il vient :

2.2 : PROPOSITION :

Pour toute fonction de Young $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) φ *vérifie une* Δ_2*-condition*

(ii) $\forall \lambda > 0, \exists b_\lambda > 0, \exists a_\lambda \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+)$

$\forall$ μ-p.p. $\omega \in \Omega$, $\forall y \in Y$, $\varphi(\omega, \lambda y) \leqslant b_\lambda \, \varphi(\omega, y) + a_\lambda(\omega)$

(iii) $\exists \lambda > 0, \exists b > 0, \exists a \in L_1(\Omega, \mathbb{R}_+)$:

$\forall$ μ-p.p. $\omega \in \Omega$, $\forall y \in Y$, $\varphi(\omega, \lambda y) \leqslant b \, \varphi(\omega, y) + a\,(\omega)$

2.3 : THEOREME :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young , les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) φ *vérifie une* Δ_2*-condition.*

(ii) C_φ *est un convexe ouvert dans* L_φ.

(iii) *tout point de la sphère unité de* L_φ *est un point d'énergie maximum.*

(iv) C_φ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}(\Omega, Y)$.

2.4 : Remarque :

(i) Ce résultat figurait dans [K-R] dans le cas sans paramètre et une seule variable ; les techniques utilisées par l'auteur ne sont pas applicables au cas avec paramètre.

(ii) L'équivalence des assertions (i) et (iv) figure dans [F-V].

2.5 : COROLLAIRE :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young et si* L_φ *est strictement convexe, alors* φ *vérifie une* Δ_2*-condition.*

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la combinaison des théorèmes (1.9) et (2.3).

★

Démonstration du théorème (2.3) :

(i) $\Longleftrightarrow$ (iv) : [F-V ; II.3]

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) : triviale

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : découle du lemme

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : on considère les deux lemmes suivants :

2.6 : LEMME : [F-V ; II.1]

Soient f *et* g *deux intégrandes positives nulles en zéro, définies de* $\Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$*. La fonctionnelle* I_g *est majorée sur une section inférieure de* I_f *si et seulement si* f *et* g *vérifient la condition de croissance suivante:*

$$\begin{cases} \exists\, a \in L_1(\Omega, \overline{\mathbb{R}}_+),\ \exists\, b > 0 : \forall\ \mu\text{-p.p. } \omega \in \Omega \\ \forall\, y \in Y,\ g(\omega,y) \leqslant b\, f(\omega,y) + a(\omega) \end{cases}$$

2.7 : <u>LEMME</u> [K] : <u>repris dans</u> [F-V ; II.2].

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *, une suite de fonctions de* $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_+)$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_\Omega a_n(\omega)\, d\mu \geq 2^n$. *Si la mesure* μ *est continue, il existe une suite* $(a_{n_k})_k$ *et une famille* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *de sous-ensembles disjoints de* Ω *tels que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{A_k} a_{n_k}(\omega)\, d\mu = 1$$

<u>Suite de la démonstration</u> :

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$\varphi_\lambda(\omega, y) = \varphi(\omega, \lambda y)$$

On déduit de la proposition (2.2) que φ vérifie une Δ_2-condition si et seulement si il existe $\lambda > 1$ tel que les fonctions φ et φ_λ vérifient une condition de croissance au sens de R. Vaudène.

On suppose que φ ne vérifie pas une Δ_2-condition ; le lemme (2.6) entraîne alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, I_{φ_λ} n'est majorée sur aucune section inférieure de I_φ. On peut donc exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_\Omega \varphi(\omega, u_n(\omega))d\mu \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \int_\Omega \varphi(\omega, (1+\tfrac{1}{n})\, u_n(\omega))d\mu \geq 2^n$$

Deux cas sont à envisager :

1. S'il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_o$ et μ-presque tout $\omega \in \Omega$

$$\text{dom } \varphi(\omega, .) \subset \text{dom } \varphi_{1+\frac{1}{n}}(\omega, .)$$

Ceci entraîne pour tout $n \geqslant n_o$, la fonction :

$$\omega \longrightarrow \varphi(\omega, (1+\tfrac{1}{n})\, u_n(\omega))$$

appartient à $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_+)$. D'après le lemme (2.7) - quitte à passer à une sous-suite - on peut supposer qu'il existe une suite de parties disjointes $(A_n)_n$ de Ω telle que pour tout $n \geqslant n_o$

$$\int_{A_n} \varphi(\omega, (1+\tfrac{1}{n})\, u_n(\omega))\, d\mu = 1$$

La fonction $u = \sum_{n \geqslant n_o} u_n \chi_{A_n}$ vérifie :

$$I_\varphi(u) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < 1$$

et pour tout $\alpha > 1$, il existe n_α tel que $\alpha \geqslant 1 + \frac{1}{n_\alpha}$ et

$$I_\varphi(\alpha u) \geqslant \sum_{n \geqslant \operatorname{Sup}(n_o, n_\alpha)} \int_{A_n} \varphi(\omega, (1+\tfrac{1}{n})\, u_n(\omega))\, d\mu = \infty$$

D'où :

$$\|u\|_\varphi = 1 \quad \text{et} \quad I_\varphi(u) < 1$$

2. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $A_n \subset \Omega$ tel que $\mu(A_n) > 0$ et pour tout $\omega \in \bar{A}_n$,

$$\operatorname{dom} \varphi(\omega, .) \not\subset \operatorname{dom} \varphi_{1+\frac{1}{n}} (\omega, .)$$

on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la multiapplication Γ_n définie sur A_n par :

$$\Gamma_n(\omega) = \operatorname{dom} \varphi(\omega, .) \setminus \operatorname{dom} \varphi_{1+\frac{1}{n}} (\omega, .)$$

admet une sélection mesurable s_n, [CV], qu'on prolonge par zéro à Ω. La continuité de μ permet de construire une suite de parties $(S_n)_n$ disjointes de Ω vérifiant pour tout n, $\mu(S_n) > 0$, $S_n \subset \operatorname{dom} \Gamma_n$ et

$$\int_{S_n} \varphi(\omega, s_n(\omega))\, d\mu \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

On en déduit que la fonction $u = \sum_n s_n \chi_{S_n}$ n'est pas un point d'énergie maximum.

★

II - Espace d'Orlicz contenant ℓ^∞

On note par ℓ^∞, le Banach des suites bornées muni de la norme "Sup". On dira qu'un espace d'Orlicz contient ℓ^∞ s'il contient un sous-espace isométrique à ℓ^∞.

2.8 : THEOREME :

Si une fonction de Young $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ne vérifie pas une Δ_2-condition, l'espace d'Orlicz L_φ contient ℓ^∞.

Une réciproque à ce théorème est facile à établir dans le cas où la tribu $\mathfrak{G}$ possède une propriété de séparabilité au sens de Chatelain [C].

2.9 : DEFINITION [C]

On dira que la tribu $\mathfrak{G}$ est "*φ-séparable*" si elle possède un anneau générateur σ-fini dénombrable contenant les éléments d'une suite de décomposabilité de L_φ.

2.10: COROLLAIRE :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young,* $\overline{\varphi}$ *à valeurs finies et si* $\mathfrak{G}$ *est φ-séparable, alors :* L_φ *contient* ℓ^∞ *si et seulement si* φ *ne vérifie pas une* Δ_2*-condition.*

2.11: COROLLAIRE :

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *est une fonction de Young,* $\overline{\varphi}$ *à valeurs finies et si* $\mathfrak{G}$ *est φ-séparable, alors* L_φ *est séparable si et seulement si* φ *vérifie une* Δ_2*-condition.*

Démonstration de (2.10)

$\Longleftarrow$ dû au théorème (2.8)

$\Longrightarrow$ dû au fait que si φ vérifie une Δ_2-condition, $L_\varphi = E_\varphi$ est un espace décomposable puisque $\overline{\varphi}$ est à valeurs finies.

D'après [C ; 3.3] , E_φ est séparable et ne contient donc pas ℓ^∞.

<u>Démonstration du théorème</u> (2.8)

On suppose que φ ne vérifie pas une Δ_2-condition et on montre d'abord qu'il existe une suite $(v_k)_k$ d'éléments de la sphère unité de L_φ qui sont à supports disjoints et qui n'ont pas une énergie maximum.
On procède comme dans la preuve du théorème (2.3) ; il résulte des hypothèses, l'existence d'une suite $(u_n)_n$ telle que :

$$I_\varphi(u_n) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad I_\varphi((1+\frac{1}{n})\ u_n) \geqslant 2^n$$

(*) S'il existe n_o tel que pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, dom $\varphi(\omega, .) \subset$ dom $\varphi(\omega, (1+\frac{1}{n_o})\ .\ )$.
En vertu du lemme (2.7), il existe une suite $(A_n)_n$ de parties disjointes de Ω telle que $\mu(A_n) > 0$ et

$$[1] \quad \int_{A_n} \varphi(\omega, (1+\frac{1}{n})\ u_n(\omega)\ d\mu = 1 \qquad \forall\ n \geqslant n_o$$

Puisque μ est continue, pour chaque n fixé, il existe **une** suite $(A_n^k)_k$ de parties disjointes de A_n vérifiant pour tout k et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$[2] \quad \mu(A_n^k) > 0 \quad \text{et} \quad \int_{A_n^k} \varphi(\omega, (1+\frac{1}{n})\ u_n(\omega))\ d\mu = \frac{1}{2^k}$$

[1] et [2] impliquent alors pour chaque n fixe

$$I_\varphi(u_n\ \chi_{A_n^k}) \leqslant \inf(\frac{1}{2^k} , \frac{1}{2^{n+1}})$$

On pose $N_k = \sup(n_o, k)$ et on considère :

$$v_k = \sum_{n \geqslant N_k} u_n\ \chi_{A_n^k}$$

La suite $(v_k)_k$ est à supports disjoints ; de plus on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$I_\varphi(v_k) = \sum_{n \geq N_k} I_\varphi(u_n \chi_{A_n^k}) \leq \sum_{n \geq k} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^k}$$

Et pour tout $\alpha > 1$, il existe n_α tel que $\alpha \geq 1 + \frac{1}{n_\alpha}$ ce qui entraîne :

$$I_\varphi(\alpha v_k) \geq \sum_{n \geq \mathrm{Sup}(N_k, n_\alpha)} \int_{A_n^k} \varphi(\omega, (1+\tfrac{1}{n})\, u_n(\omega))d\mu = \infty$$

Il en résulte, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$I_\varphi(v_k) \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad \|v_k\|_\varphi = 1$$

(**) Si pour tout n, $\mathrm{dom}\, \varphi(\omega, .) \not\subset \mathrm{dom}\, \varphi_{1+\frac{1}{n}}(\omega,.)$.

On a vu dans la preuve de (2.3) qu'il existe dans ce cas une suite $(s_n)_n$ de fonctions à supports S_n disjoints telle que pour tout n

$$I_\varphi(s_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Puisque μ est continue, il existe une suite $(S_n^k)_k$ de parties disjointes de S_n vérifiant :

$$\int_{S_n^k} \varphi(\omega, u_n(\omega))\, d\mu = \frac{I_\varphi(s_n)}{2^k}$$

On considère alors la suite $(v_k)_k$ définie pour chaque k par :

$$v_k = \sum_n u_n \chi_{S_n^k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$I_\varphi(v_k) \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad \|v_k\|_\varphi = 1$$

La suite $(v_k)_k$ étant construite, on considère l'application

$$i : c = (c_k)_k \in \ell^\infty \longrightarrow v_c = \sum_k c_k v_k \in L_\varphi$$

Montrons que i est une isométrie de ℓ^∞ dans L_φ.

Soit $c \in \ell^\infty$ de norme $|c| = \operatorname{Sup}_k |c_k|$.

On a : $I_\varphi(\frac{v_c}{|c|}) = \sum_k \int_\Omega \varphi(\omega, \frac{c_k}{|c|} v_k(\omega))\, d\mu < 1$

De plus pour tout $\alpha < |c|$, il existe k_o tel que :

$$\alpha < |c_{k_o}| < |c|$$

Donc :

$$I_\varphi(\frac{v_c}{\alpha}) \geqslant \int_\Omega \varphi(\omega, \frac{|c_{k_o}|}{\alpha} v_{k_o}(\omega))\, d\mu \geqslant 1$$

D'où $\|v_c\|_\varphi = |c|$, ce qui achève la démonstration.

2.12 : PROPOSITION : "Propriété de Radon-Nikodym"

Soit $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction de Young.*

Une condition nécessaire pour que L_φ *possède la propriété de Radon Nikodym est que* φ *vérifie une* Δ_2*-condition.*

Si de plus φ *est fortement coercive, la fonction* $\overline{\varphi}$ *à valeurs finies, et la tribu* $\mathcal{G}$ *est* φ*-séparable, cette condition est aussi suffisante.*

Démonstration :

Si φ ne vérifie pas une Δ_2-condition, en raison du théorème (2.8) L_φ contient ℓ^∞ et n'a donc pas la propriété de Radon-Nikodym (voir [D_2]).

Réciproquement, si φ est fortement coercive et vérifie une Δ_2-condition, $L_\varphi = E_\varphi$ est un espace dual séparable [C].
D'après le théorème de Dunford-Pettis, L_φ possède la propriété de Radon-Nikodym (voir [D_1] , page 225).

ANNEXE I

LIEN ENTRE POINTS EXTREMAUX DE LA BOULE UNITE DE L_φ ET POINTS D'ENERGIE MAXIMUM

(en collaboration avec A.FOUGERES)

On rappelle qu'un point de la boule unité est dit "*extremal*" s'il n'est pas milieu d'un segment de celle-ci.

LEMME

Si φ est strictement convexe, tout point d'énergie maximum (i.e *égale à* 1) *de la sphère-unité de* L_φ *est un point extrémal.*

THEOREME

Si la mesure μ est continue et la fonction $\overline{\varphi}$ à valeurs finies, tout point extrémal de la sphère unité de L_φ est un point d'énergie maximum ; la réciproque n'est vraie que si φ est strictement convexe.

Démonstration du lemme :

Si u est un point de la sphère-unité non extrémal, il existe deux points différents u_1 et u_2 de la boule unité tels que

$$u = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$$

Comme φ est strictement convexe, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$\varphi(\omega,u(\omega)) \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi(\omega,u_1(\omega)) + \frac{1}{2}\,\varphi(\omega,u_2(\omega)).$$

avec inégalité stricte en tout point ω de l'ensemble

$$A = \{\omega : u_1(\omega) \neq u_2(\omega)\}.$$

qui est de mesure positive par hypothèse ; donc

$$\int_\Omega \varphi(\omega,u(\omega))d\mu < \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(\omega,u_1(\omega))d\mu + \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(\omega,u_2(\omega))d\mu \leqslant 1$$

et u n'est pas d'énergie maximum.

★

<u>Démonstration du théorème</u>

(i) Considérons un élément u de I_φ tel que:

$\|u\|_\varphi = 1$ et $I_\varphi(u) < 1$.

Il existe une suite $(\Omega_p)_p$ de décomposabilité de E_φ

(on a donc : $\int_\Omega \varphi(\omega, p\chi_{\Omega_p}(\omega))d\mu < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$)

qu'on peut supposer vérifiant de plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ et μ-presque tout $\omega \in \Omega$, $|u(\omega)| < p$.

Il en résulte l'existence d'un p_o tel que $u\chi_{\Omega_{p_o}} \neq 0$.

La multiapplication

$$\Gamma = \{(\omega,y) \in \Omega_{p_o} \times Y \;/\; |y| = p_o - |u(\omega)|\}$$

admet donc une sélection mesurable γ définie sur Ω_{p_o} (qu'on prolonge par zéro hors de Ω_{p_o}).

La continuité de μ entraine l'existence d'une partie A de Ω_{p_o} de mesure > 0 vérifiant :

$$0 < \int_\Omega \overline{\varphi}(\omega, p_o \chi_A(\omega)) d\mu \leqslant 1 - \int_\Omega \varphi(\omega, u(\omega)) d\mu .$$

On a alors :

$$\int_\Omega \varphi(\omega, (u \pm \gamma\chi_A)(\omega)) d\mu \leqslant \int_{\Omega \setminus A} \varphi(\omega, u(\omega)) d\mu + \int_A \overline{\varphi}(\omega, p) \leqslant 1 ;$$

u est donc milieu du segment $[u_1, u_2]$ de la boule unité, où :

$$u_1 = u + \gamma\chi_A \quad \text{et} \quad u_2 = u - \gamma\chi_A$$

(ii) Si φ est strictement convexe, la réciproque découle du lemme précédent ; dans le cas contraire, d'après le théorème (1.7), E_φ n'est pas strictement convexe, i.e il existe des points de la sphère-unité de E_φ qui ne sont pas extrémaux dans E_φ, donc à fortiori dans L_φ, bien qu'ils soient d'énergie maximum d'après (1.5).

ANNEXE II

RENORMAGE MODULAIRE DANS LE CAS D'UNE FONCTION DE YOUNG DE REVOLUTION

(en collaboration avec A.FOUGERES et J.C. PERALBA)

On rappelle qu'une fonction de Young $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite "*de révolution*" si pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $y \in Y$, $\varphi(\omega, y) = \bar{\varphi}(\omega, |y|)$.

THEOREME

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Young de révolution, il existe une fonction de Young de révolution $\psi : \Omega \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que l'espace de Vitali E_ψ soit strictement convexe et isomorphe à E_φ .

Démonstration

La fonction φ étant de révolution, il suffit de démontrer le théorème pour $Y = \mathbb{R}$ et de l'appliquer à la fonction $\bar{\varphi}$. On établit alors deux lemmes permettant de déduire le résultat.

LEMME 1

Si $\varphi : \Omega \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Young de noyau nul (i.e pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, $\ker \varphi(\omega, .)$ est réduit à zéro), il existe une fonction de Young $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ strictement convexe telle que les espaces E_φ et E_ψ soient isomorphes.

LEMME 2

Pour toute fonction de Young $\varphi : \Omega\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *il existe une fonction de Young* $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *de noyau nul telle que les classes d'Orlicz associées* C_φ *et* C_ψ *coïncident.*

Démonstration du lemme 1.

On remarque d'abord qu'une fonction de Young φ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ est de noyau nul si et seulement si φ est strictement croissante (au sens $\varphi(\omega,.)$ strictement croissante pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$).

On considère une fonction de Young : $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe vérifiant pour tout $y\in\mathbb{R}$

$$|y| \leqslant \gamma(y) \leqslant 2|y|$$

(par exemple $\gamma(y) = 2|y| - \dfrac{|y|}{\sqrt{1+|y|}}$) : la fonction de Young ψ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ par

$$\psi(\omega,y) = \varphi(\omega, \gamma(y))$$

est strictement convexe puisque φ est strictement croissante et γ est strictement convexe. De plus pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a

$$(1) \qquad \varphi(\omega,y) \leqslant \psi(\omega,y) \leqslant \varphi(\omega,2y)$$

les fonctions φ et ψ définissent donc le même espace de Vitali E_φ , on déduit du théorème (1.7) que E_φ muni de la norme modulaire $\|.\|_\psi$ est strictement convexe et la relation (1) entraine pour tout $u\in E_\varphi$

$$\|u\|_\varphi \leqslant \|u\|_\psi \leqslant 2\|u\|_\varphi .$$

Démonstration du lemme 2.

On suppose que φ est de noyau non nul, pour chaque $\omega\in\Omega$ soit

$$a(\omega) = \sup \{ y\in\mathbb{R} : \varphi(\omega,y) = 0\}$$

a est une fonction mesurable puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $a^{>}(\alpha)$ est la projection sur Ω de l'ensemble des $(\omega,y)\in\Omega\times]\alpha,+\infty[$ tel que $\varphi(\omega,y) = 0$.

On considère une fonction $k\in L^1(\Omega,\mathbb{R}_+^*)$ et une sélection mesurable s de la multiapplication mesurable à valeurs non vides

$$\Gamma = \{(\omega,y)\in \Omega \times \mathbb{R} : \varphi(\omega,y) = k(\omega)\} .$$

Notons que la fonction $\omega \longrightarrow \varphi(\omega,s(\omega))$ est intégrable et pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, $s(\omega)>a(\omega) > 0$.

Soit $\beta(\omega) =\dfrac{\varphi(\omega,s(\omega))}{s(\omega)}$, on pose

$$\psi(\omega,y) = \begin{cases} \beta(\omega)|y| & \text{si } |y| \leqslant s(\omega) \\ \varphi(\omega,y) & \text{si } |y| > s(\omega) \end{cases}$$

ψ est une fonction de Young de noyau nul et φ et ψ vérifient la condition de croissance suivante : pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$

$$\varphi(\omega,y)\leqslant \psi(\omega,y) \leqslant \varphi(\omega,y)+\varphi(\omega,s(\omega)).$$

En effet, $\psi(\omega,y)$ coïncide avec $\varphi(\omega,y)$ pour tout $|y| \geqslant s(\omega)$ et est majorée par $\varphi(\omega,s(\omega))$ pour $|y| \leqslant s(\omega)$; d'autre part, $\dfrac{\varphi(\omega,y)}{|y|}$ est une fonction croissante avec $|y|$, et l'on a donc pour tout $|y| \leqslant s(\omega)$:

$$0\leqslant \frac{\varphi(\omega,y)}{|y|} \leqslant \frac{\varphi(\omega,s(\omega))}{s(\omega)} = \beta(\omega) = \frac{\psi(\omega,y)}{|y|}$$

- BIBLIOGRAPHIE -

[C] J. CHATELAIN - Quelques propriétés de type Orlicz de certains intégrandes convexes normaux - Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1975) n°10.

[C-F] J. CHATELAIN et A. FOUGERES - Propriétés de Vitali et dualité de l'espace d'Orlicz sous-jacent - Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier (1976) n° 15.

[C-V] C. CASTAING et M. VALADIER - Convex analysis and mesurable multifunctions - Springer ; Lectures notes n° 580.

[D_1] J. DIESTEL - Geometry of Banach Spaces - Springer-Verlag ; Lectures notes n° 485.

[D_2] J. DIESTEL and J.J. UHL JR - Vector Measures - Math. Surveys n° 15, AMS (1977).

[F] A. FOUGERES - Coercivité, Convexité, Relaxation - Montpellier (1977) n° 11.

[F_e-F] R. FENNICH et A. FOUGERES - Caractérisation des points extrémaux de la sphère modulaire de L_φ - (à paraître).

[F-V] A. FOUGERES et R. VAUDENE - Comparaison de fonctionnelles intégrales : Application aux opérateurs intégrands entre espaces d'Orlicz - Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1977) n° 3.

[G] E. GINER - Espaces intégraux de type Orlicz ; dualité, compacités, convergences en mesure - Thèse 3e cycle Montpellier-Perpignan (1977).

[K] A. KOZEK - Orlicz spaces of functions with values in Banach spaces - Ann. Soc. Math. Pol. Séries I commentationes Mathematicae XIX 1977.

[K-R] M.A. KRASNOSEL'SKII and Ya. B. RUTICKII - Convex Functions and Orlicz spaces (1961).

[R] M.M. RAO - Smoothness of Orlicz spaces - Proc. Acad. Amsterdam A 68 (1965), 671-690.

[S] K. SUNDARESAN - On the strict and uniform convexity of certain Banach spaces - Pacific J. Mat. 15 (1965), 1085 - 1086.

[T_1] B. TURETT - Rotundily of Orlicz spaces - Proc. Acad. Amsterdam (1976).

[T_2] B. TURETT - Fenchel Orlicz spaces - A.M.S. (1970) Subject classification 46 E 30, 46 E 40.

[V] R. VAUDENE - Quelques propriétés de l'Opérateur de Nemickii dans des espaces d'Orlicz - Montpellier (1976) n° 8 C.R.A.S. t. 283, Série A. 767.