Forschungsergebnisse aus dem I. Mathematischen Institut der Universität Münster

Von *Heinrich Behnke*

Die folgende Abhandlung gibt, in einzelne, unabhängige Abschnitte aufgegliedert, einen Bericht über die seit 1959 vom I. Mathematischen Institut der Universität Münster veröffentlichten Arbeiten zur Funktionentheorie. Wir beginnen dabei mit der lokalen Theorie (Abschnitt 1–3) und schließen (in Abschnitt 4 und 5) die globale Theorie an, für welche die lokale Theorie ihre Bausteine liefert. Abschließend werden in diesem Bericht einige Ergebnisse aus der Theorie der Riemannschen Flächen besprochen (Abschnitt 6).

Im Abschnitt 1 ist zugleich eine knappe Einführung in die für die ganze Abhandlung wesentlichen Grundbegriffe enthalten.

Aus dem Literaturverzeichnis ist zu erkennen, wie eng die besprochenen Untersuchungen mit den wissenschaftlichen Forschungen an anderen Instituten in Frankreich, den USA und in Deutschland verflochten sind. Die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, die schon 40 Jahre lang Forschungsgebiet des I. Mathematischen Instituts ist, gehört zu den mathematischen Disziplinen, die sich in den letzten Jahren besonders schnell entwickelt haben und durch ihre interessanten und engen Verbindungen mit anderen mathematischen Gebieten von den Forschern in allen Ländern beachtet werden.

Wir sind den verschiedenen zuständigen Landesstellen besonders dankbar für die Unterstützungen, die uns Einladungen und Diskussionen mit namhaften ausländischen Gelehrten ermöglichten.

1. *Zur lokalen Geometrie*

Grundlegend für die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen ist der Begriff der *Riemannschen Fläche*. Man war daher schon früh bemüht, diesen Begriff in die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher zu übertragen. Freilich war hier das Problem, welches die richtige Verallgemeinerung überhaupt ist. Man knüpfte zunächst an den vorstellungsmäßig einfacheren Begriff der konkreten (= überlagerten) Riemannschen Fläche an. Die komplex n-dimensionale Verallgemeinerung führte so, man würde heute sagen, zum Begriff des *normalen reduzierten komplexen Raumes* (um 1950). Aber für die Abbildungstheorie zum Beispiel war dieser Begriff noch nicht allgemein genug. So wurden bald die allgemeineren sogenannten *Serreschen* (= reduzierten) *komplexen Räume* (um 1955) und noch einmal später (um 1960) die wieder allgemeineren *komplexen Räume schlechthin* (auch *Grauertsche komplexe Räume* genannt) eingeführt. Noch immer aber reichte dieser Begriff vom Standpunkt der Abbildungstheorie nicht aus, wenn man nämlich auf komplexen Räumen auch reelle Analysis, Differentialgeometrie und Differentialtopologie treiben will. So werden in jüngster Zeit die noch allgemeineren sogenannten *differenzierbaren Räume* eingeführt und untersucht (vgl. [31, 33]).

Wie bei den klassischen komplexen Räumen muß man hier zunächst die lokale Struktur dieser Räume angeben. Sei $\mathbf{R}^n$ die reelle n-dimensionale Ebene, $\mathbf{C}^m$ die komplexe m-dimensionale Ebene, $G \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $A \subset G$ heißt *N-abgeschlossen in G*, wenn es zu jedem $x \in G$ in einer Umgebung $U(x) \subset G$ N-mal stetig differenzierbare Funktionen f_i, $i \in J$, gibt mit $A \cap U(x) = \{y\,; y \in U(x), f_i(y) = 0$ für alle $i \in J\}$. Hierbei sei $N = 0, 1, \ldots, \infty, \omega, \omega^*$. $N = \omega$ bedeute reellanalytisch, $N = \omega^*$ (im Falle $\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^m$, $n = 2m$) holomorph. ω^*-abgeschlossene Mengen zum Beispiel sind also die klassischen *analytischen Mengen* der Funktionentheorie. $\mathscr{D}^N$ sei die Garbe der N-mal stetig differenzierbaren Funktionskeime des $\mathbf{R}^n$ (ist $N = \omega^*$ und also $\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^m$, so schreibt man auch $\mathscr{D}^{\omega^*} = \mathscr{O}$). $\mathscr{I}^N \subset \mathscr{D}^N | G$ sei eine Idealuntergarbe, deren genaue Nullstellenmenge A ist. Das Paar $(A, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A)$ heißt *N-differenzierbarer Raum* (= komplexer Raum, falls $N = \omega^*$ und also $\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^m$ ist und $\mathscr{I}^N$ lokalendlich erzeugt ist). $(A^*, \mathscr{D}^{*N}/_{\mathscr{I}^{*N}}|A^*)$ sei ein weiterer N-differenzierbarer Raum mit $A^* \subset G^* \subset \mathbf{R}^{n*}$. Ein Paar $(\Phi, \tilde{\Phi})$ heißt eine *N-differenzierbare Abbildung* $(A, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A) \to (A^*, \mathscr{D}^{*N}/_{\mathscr{I}^{*N}}|A^*)$, wenn gilt:

1. Φ: $A \to A^*$ *ist eine stetige Abbildung* $A \to A^*$.
2. *Zu jedem $x \in A$ gibt es in einer Umgebung $U(x) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ eine N-mal stetig differenzierbare Fortsetzungsabbildung $\hat{\Phi}$: $U(x) \to \mathbf{R}^{n*}$ mit $f_{\Phi(y)} \circ \hat{\Phi} \in \mathscr{I}^N_y$ für jedes $y \in A \cap U(x)$, $f_{\Phi(y)} \in \mathscr{I}^{*N}_{\Phi(y)}$.*
3. *Der durch $\hat{\Phi}$ induzierte Garbenhomomorphismus $A \oplus_{\Phi} \mathscr{D}^{*N}/_{\mathscr{I}^{*N}}|A^* \to \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A$ ist $\tilde{\Phi}$.*

Naheliegend sagt man jetzt, wann $(\Phi, \tilde{\Phi})$ *bi-N-differenzierbar* (oder umkehrbar N-differenzierbar) ist. Im Falle $N = \omega^*$ heißen die entsprechenden Begriffe *holomorph* und *biholomorph* (oder umkehrbar holomorph).

Ein *N-differenzierbarer Raum* ist nun ein Paar $(X, \tilde{\mathscr{D}}^N)$ mit den Eigenschaften:

1. *X ist ein topologischer Hausdorffraum, $\tilde{\mathscr{D}}^N$ eine Garbe von komplexen lokalen (nicht notwendig noetherschen) Algebren, die einen stetigen* 1-*Schnitt hat.*
2. *Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, einen differenzierbaren Raum* $(A, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A)$ *(sogenannten lokalen Repräsentanten von $(X, \tilde{\mathscr{D}}^N)$) und ein Paar $(\Psi, \tilde{\Psi})$ mit: $\Psi\colon U(x) \to A$ ist topologisch, $\tilde{\Psi}\colon U(x) \oplus_{\Psi} \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A \to \tilde{\mathscr{D}}^N|U(x)$ ist ein Garbenisomorphismus, der den* 1-*Schnitt in den* 1-*Schnitt überführt.*
3. *Ist $y \in X$ ein weiterer Punkt mit einem zugehörigen $U(y)$, differenzierbarem Raum $(A^*, \mathscr{D}^{*N}/_{\mathscr{I}^{*N}}|A^*)$ und zugehörigem Paar $(\Phi, \tilde{\Phi})$, so ist mit $\tilde{A} := A \cap \Psi(U(x) \cap U(y))$, $\tilde{A}^* = A^* \cap \Phi(U(x) \cap U(y))$ das Paar $(\Phi \circ \Psi^{-1}, \tilde{\Phi}^{-1} \circ \tilde{\Psi}) : (\tilde{A}, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|\tilde{A}) \to (\tilde{A}^*, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|\tilde{A}^*)$ bi-N-differenzierbar.*

Zwischen N-differenzierbaren Räumen werden naheliegend *N-differenzierbare und bi-N-differenzierbare Abbildungen* definiert. $(X, \tilde{\mathscr{D}}^N)$ heißt *reduziert*, wenn jeder Repräsentant $(A, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A)$ von $(X, \tilde{\mathscr{D}}^N)$ reduziert ist, das heißt wenn $\mathscr{I}^N = \mathscr{I}^N(A) =$ Garbe der auf A verschwindenden Funktionskeime aus $\mathscr{D}^N$ ist. Mit einem reduzierten Raum $(A, \mathscr{D}^N/_{\mathscr{I}^N}|A)$ ist jeder dazu bi-N-differenzierbar äquivalente Raum reduziert. Jeder N-differenzierbare Raum erzeugt einen reduzierten N-differenzierbaren Raum.

Im Falle $N = \omega$ ergeben obige Definitionen die sogenannten *reell-analytischen Räume*, im Falle $N = \omega^*$ die *komplexen Räume von H. Grauert*. Jeder reduzierte komplexe Raum erzeugt in natürlicher Weise einen reduzierten N-differenzierbaren Raum. Sehr wichtig sind in jüngster Zeit Untersuchungen bezüglich des Zusammenhanges zwischen der komplexen Struktur und den differenzierbaren Strukturen auf einem komplexen Raum. Eine Reihe erster interessanter Resultate hierzu findet sich in [27, 31, 33]. Dabei steht zunächst natürlich die lokale differentielle Geometrie komplexer Räume im Vordergrund des Interesses. Ein Satz des einfachsten Typs sagt hier zum Beispiel:

Ist $A_{x^0} \subset \mathbf{C}^n$ ein analytischer Mengenkeim, der differenzierbar keine Singularität hat, so hat A_{x^0} auch holomorph keine Singularität[33].

Man kann auch die Existenz differenzierbarer Flächenkeime auf A_{x^0} mit der komplexen Struktur auf A_{x^0} in Verbindung bringen, differenzierbare und holomorphe minimale Einbettungsdimensionen miteinander vergleichen[33] oder sich fragen, ob sich holomorphe Relationen in analytischen Garben, die sich differenzierbar fortsetzen lassen, auch holomorph fortsetzen lassen[31]. – Für die Untersuchungen der lokalen Geometrie sind außerdem geeignet einzuführende Tangentialvektorräume an differenzierbare Räume von Bedeutung, etwa

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{x^0} = \mathfrak{T}(\mathcal{D}^N_{x^0}/\mathcal{I}^N_{x^0}) = \{d;\, d\colon \mathcal{D}^N_{x^0}/\mathcal{I}^N_{x^0} \xrightarrow{\text{C-Hom.}} \mathbf{C}\ \textit{mit}\\ df\cdot g(x^0) + f(x^0)\cdot dg = d\,f\cdot g\ \textit{für alle}\ f, g \in \mathcal{D}^N_{x^0}\\ \textit{und mit}\ df = \textit{reell, falls}\ f\ \text{„}\textit{reell}\text{“}\ \textit{ist}\}\ (\text{vgl.}\ ^{33}).\end{aligned}$$

Reell-analytische und komplexe Räume sind bislang recht ausführlich untersucht worden. Für die ersteren finden sich in [4] mehrere interessante Ergebnisse.

Da der Körper $\mathbf{R}$ algebraisch nicht abgeschlossen ist, und da es im $\mathbf{R}^1$ kein Analogon zum Cauchyschen Integralsatz gibt, ergeben sich bei Untersuchungen reell-analytischer Mengen Besonderheiten gegenüber komplex-analytischen Mengen. So gibt es zum Beispiel reell-analytische Mengen, die nicht Nullstellenmengen kohärenter Idealgarben sind; der Identitätssatz für reindimensionale reell-analytische Mengen und Funktionen ist nicht allgemein gültig; die Singularitätenmenge und die Menge der nicht normalen Punkte sind zwar niederdimensional, aber im allgemeinen nicht wieder reell-analytisch; selbst einfache, eigentliche Projektionen reell-analytischer Mengen sind nicht einmal pseudo-analytisch; und es gilt nicht der Hilbertsche Nullstellensatz.

Aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz erhält man immerhin eine lokale Zerlegung reell-analytischer Mengen in endlich viele Komponenten und endlich viele Zusammenhangskomponenten von Mannigfaltigkeitspunkten.

Interessante Beziehungen bestehen zwischen reell-analytischen Mengenkeimen und ihren komplexen Fortsetzungen. Die Komplexifizierung eines reell-analytischen Mengenkeimes ist komplex gewöhnlich bzw. irreduzibel bzw. normal genau dann, wenn der reelle Mengenkeim reell gewöhnlich bzw. irreduzibel bzw. normal ist. Daraus ergibt sich, daß die reellen und komplexen Strukturhalme einer komplex-analytischen Menge bezüglich Regularität, Integrität und Normalität algebraisch gleich sind. Reell-analytische Räume mit kohärenter Strukturgarbe haben jedoch global einfache Strukturen. So gelten die Analoga zu den Theoremen A und B; „kohärente“ reelle Räume sind in holomorph-vollständige komplexe Räume einbettbar, womit Kriterien für ihre Einbettbarkeit in reelle Zahlenräume gegeben sind. Aus der Beziehung der kohärenten Räume zu den komplexen Räumen erhält man den Identitätssatz sowie die Analytizität der Singularitätenmenge und der Menge der nicht normalen Punkte.

Die lokale Geometrie in der Funktionentheorie spiegelt sich ferner in einer Reihe von Sätzen, welche sehr weitgehende Verallgemeinerungen des klassischen Satzes von Osgood und Hartogs sind. Dieser sagt bekanntlich, daß eine Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbf{C}^n$ bereits dann holomorph ist, wenn ihre Beschränkung auf sämtliche achsenparallele Geraden durch G holomorph ist. Nun besitzt der Satz Verallgemeinerungen für Funktionen auf reduzierten[28] und beliebigen komplexen Räumen[32]. Dahinter steht eine noch allgemeinere Struktur, welche den Satz von Osgood und Hartogs auf kohärente Garben über beliebigen komplexen Räumen verallgemeinert[29, 30, 32]. Das Problem ist, wann eine Schnittfläche in einer Garbe einer Untergarbe angehört unter der Voraussetzung, daß gewisse tensorielle Beschränkungen dieser Schnittfläche auf Unterräume in den entsprechenden Beschränkungen der Untergarbe enthalten sind. Ein Spezialfall ist ein auch als Eindeutigkeitssatz für Schnittflächen zu deutendes Ergebnis, nach dem eine Schnittfläche bereits dann in der Untergarbe liegt, wenn sie nur in jedem Punkt bis zu einer bestimmten endlichen Ordnung in der Untergarbe liegt. Als Anwendungen erhält man Eindeutigkeitssätze für holomorphe Funktionen auf komplexen Räumen und Aussagen über die differenzierbaren Strukturen auf komplexen Räumen[31]. Bei den komplizierten Induktionsbeweisen werden wesentlich die Existenz und gewisse Eigenschaften von Primärzerlegungen der Halme kohärenter Garben ausgenutzt.

(*W. Fensch* und *K. Spallek*)

2. *Anwendung der lokalen Algebra*

In diesem Paragraphen soll unter einem „komplexen Raum“ stets ein reduzierter komplexer Raum verstanden werden (s. 1). Im folgenden soll über solche Forschungen in der Theorie der komplexen Räume referiert

[9] *Kuhlmann. N.*, Über die normalen Punkte eines komplexen Raumes. Math. Ann. 146 (1962), 397–412.

[10] *Lindenau, V.*, Das Cousin-I-Problem und die Nebenhüllen q-konvexer Gebiete des C^n. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 31 (1964).

[11] *Meis, Th.*, Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 16 (1960).

[12] *Oeljeklaus, H.*, Einbettung komplexer Räume in komplex-projektive Räume. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 23 (1962).

[13] *Reiffen, H.-J.*, Die differentialgeometrischen Eigenschaften der invarianten Distanzfunktion von Carathéodory. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 26 (1963).

[14] *Reiffen, H.-J.*, Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie a supports compacts. C. R. Acad. Sci. (Paris) 259 (1964), 2333–2335.

[15] *Reiffen, H.-J.*, Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik. Math. Ann. 161 (1965), 315–324.

[16] *Reiffen, H.-J.*, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger. Math. Ann. (erscheint demnächst).

[17] *Reiffen, H.-J.*, und *U. Vetter*, Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen. Math. Ann. (erscheint demnächst).

[18] *Scheja, G.*, Über das Auftreten von Holomorphie- und Meromorphiegebieten, die nicht holomorph-konvex sind. Math. Ann. 140 (1960), 33–50.

[19] *Scheja, G.*, Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie. C. R. Acad. Sci. (Paris) 251 (1960), 2863/64.

[20] *Scheja, G.*, Der Durchschnittssatz für Holomorphiegebiete. Math. Ann. 142 (1961), 366–384.

[21] *Scheja, G.*, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. 144 (1961), 345–360.

[22] *Scheja, G.*, Eine Anwendung Riemannscher Hebbarkeitssätze für analytische Cohomologieklassen. Arch. Math. Vol. XII (1961), 341–348.

[23] *Scheja, G.*, Beiträge zur Syzygientheorie der geometrischen und abstrakten lokalen Ringe. Habilitationsschrift Münster 1962.

[24] *Scheja, G.*, Bettizahlen lokaler Ringe. Math. Ann. 155 (1964), 155–172.

[25] *Scheja, G.*, Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung. Math. Ann. 157 (1964), 75–94.

[26] *Scheja, G.*, Über Primfaktorzerlegung in zweidimensionalen lokalen Ringen. Math. Ann. 159 (1965), 252–258.

[27] *Spallek, K.*, Zum Spurproblem holomorpher Funktionen auf analytischen Mengen. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 22 (1962).

[28] *Spallek, K.*, Verallgemeinerung eines Satzes von Osgood–Hartogs auf komplexe Räume. Math. Ann. 151 (1963), 200–218.

[29] *Spallek, K.*, Einige Untersuchungen über analytische Modulgarben. Math. Ann. 153 (1964), 428–441.

[30] *Spallek, K.*, Tensorielle Beschränkungen analytischer Garben. Math. Zeitschrift 84 (1964), 448–463.

[31] *Spallek, K.*, Differenzierbare und holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen. Math. Ann. 161 (1965), 143–162.

[32] *Spallek, K.*, Zur lokalen Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Insbesondere über eine allgemeine Theorie zum Satz von Osgood und Hartogs für analytische Moduln. Habilitationsschrift Münster 1965.

[33] *Spallek*, *K.*, Über Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. (erscheint demnächst).

[34] *Vetter*, *U.*, Über nicht kontinuierlich operierende komplexe Transformationsgruppen auf komplexen Räumen. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster, Heft 28 (1964).

Sonstige Zitate

[35] *Abyankar*, *S.*, Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality. Math. Ann. 141 (1960), 171–192.

[36] *Behnke*, *H.*, und *K. Stein*, Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120 (1948), 430–461.

[37] *Grauert*, *H.*, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Inst. des Hautes Etudes Sci., Publ. Math. No. 5, Paris (1960).

[38] *Grauert*, *H.*, und *R. Remmert*, Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Zeitschrift 67 (1957), 103–128.

[39] *Hepp*, *K.*, Klassische komplexe Liesche Gruppen und kovariante analytische Funktionen. Math. Ann. 152 (1963), 149–158.

[40] *Mumford*, *D.*, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Inst. des Hautes Etudes Sci., Publ. Math. No. 9, Paris (1961), 5–22.

[41] *Oka*, *K.*, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII, Lemme Fondamental. J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 204–214, 259–278.

[42] *Remmert*, *R.*, und *K. Stein*, Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Zeitschrift 73 (1960), 159–189.

[43] *Seifert*, *H.*, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta Math. 60 (1933), 147–238.

[44] *Serre*, *J. P.*, Un théorème de dualité. Comment. Math. Helv. 29 (1955), 9–26.

[45] *Tietz*, *H.*, Eine Normalform berandeter Riemannscher Flächen. Math. Ann. 129 (1955), 44–49.

[46] *Zariski*, *O.*, and *P. Samuel*, Commutative Algebra, Volume I. van Nostrand Company, Princeton (1958).

[47] *Zariski*, *O.*, and *P. Samuel*, Commutative Algebra, Volume II. van Nostrand Company, Princeton (1960).