Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1937. Volume XVII, № 3

MATHÉMATIQUES

SUR LES ESPACES LINÉAIRES DONT LA SPHÈRE UNITAIRE EST FAIBLEMENT COMPACTE

Par V. GANTMAKHER et V. ŠMULIAN

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 28. VIII. 1937)

Nous allons adopter la terminologie proposée par M. Banach [1]. Dans tout ce qui suit E désigne un espace du type (B).

Notons d'abord la proposition suivante:

1) *E_1 étant un sous-espace séparable de $\overline{E}$, il existe pour toute fonctionnelle linéaire $F(f)$ définie dans E_1 une suite $\{x_n\}$ telle que l'on a:*

$$F(f)=\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad |x_n|\leqslant |F|+\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

Cette proposition a été démontrée par I. M. Gelfand [2] pour le cas $E_1=\overline{E}$. On la démontre par la même méthode dans les conditions qui viennent d'être énoncées. Remarquons que d'après (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|x_n|\leqslant|F|$ et $|F(f)|=\lim|f(x_n)|\leqslant|f|\underline{\lim}|x_n|$, c'est-à-dire $|F|\leqslant\underline{\lim}|x_n|$, d'où $|F|=$ $=\lim|x_n|$. En multipliant x_n par des nombres convenablement choisis, on obtient les égalités:

$$|F|=|x_n|^{*} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Nous dirons que la sphère $|x|\leqslant 1$ est dénombrablement fermée, si pour chaque suite bornée $\{x_n\}$ il existe un élément x_0 tel que l'on a

$$\underline{\lim} f(x_n)\leqslant f(x_0)\leqslant\overline{\lim} f(x_n) \quad \text{pour chaque } f\subset\overline{E}.$$

2) *La sphère $|x|\leqslant 1$ dans E étant dénombrablement fermée, il correspond à toute fonctionnelle linéaire $F(f)$ définie dans un sous-espace linéaire séparable $E_1\subset\overline{E}$ un élément $x_0\subset E$ tel que*

$$|F|=|x_0|, \quad \text{et} \quad F(f)=f(x_0) \quad \text{pour chaque} \quad f\subset E_1.$$

Démonstration. On a $F(f)=\lim f(x_n)\,(f\subset E_1)$ où $|x_n|=|F|$. Il existe, par hypothèse, un élément x_0 tel que

$$\underline{\lim} f(x_n)\leqslant f(x_0)\leqslant\overline{\lim} f(x_n) \quad \text{dans} \quad \overline{E}.$$

* Il faut remarquer qu'on peut déduire presque immédiatement du résultat obtenu le théorème de M. Mazur sur la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans un sous-espace séparable de (m) [3].

On a, donc, $F(f) = f(x_0)$ pour chaque $f \subset E_1$. Il est aussi facile de voir que $|x_0| = |F|$.

3) *Si la sphère $|x| \leqslant 1$ de l'espace séparable E est dénombrablement fermée, l'espace E est régulier.*

Démonstration. E étant séparable, il existe dans $\overline{E}$ un ensemble dénombrable et total $\{f_n\}$ des fonctionnelles linéaires. D'après la proposition 2) il correspond à chaque $F \subset \overline{\overline{E}}$ un élément $x_0 \subset E$, tel que $F(f_n) = f_n(x_0)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. De même il correspond à toute $f_0 \subset \overline{E}$ un élément $x_0' \subset E$ tel que $F(f_0) = f_0(x_0')$ et $F(f_n) = f_n(x_0')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Comme $f_n(x_0) = f_n(x_0')$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, on a $x_0 = x_0'$. Ainsi $F(f) = f(x_0)$ pour chaque $f \subset \overline{E}$.

Montrons à présent comment des résultats indiqués peut on déduire aisément le théorème dû à M. Plessner.

A. *Pour qu'un espace E soit régulier il faut et il suffit que la sphère $|x| \leqslant 1$ de E soit transfiniment fermée*.*

Démonstration. La nécessité des conditions indiquées étant évidente, il ne reste qu'à démontrer leur suffisance. Soit $F \subset \overline{\overline{E}}$, et soit ξ_0 un nombre transfini quelconque. Considérons un ensemble quelconque

$$G_{\xi_0} \equiv \{ f_1, f_2, \ldots, f_\xi, \ldots, (\xi_0 < \xi) \}$$

où $|f_\xi| \leqslant 1$ et toutes les f_ξ sont différentes. Si G_{ξ_0} est un ensemble dénombrable, il existe un élément x_0 tel que $F(f) = f(x_{\xi_0})$ pour chaque $f \subset G_{\xi_0}$ et $|x_{\xi_0}| \leqslant |F|$. On en déduit aisément par induction transfinie qu'il en est de même quel que soit le nombre transfini ξ.

On déduit de la proposition A (ce qui a déjà été indiqué par Plessner) la proposition suivante:

B. *Tout sous-espace linéaire fermé d'un espace régulier est aussi régulier.*

Cette dernière proposition permet d'établir le

Théorème 1. *Si E est régulier, la sphère unitaire $(|x| \leqslant 1)$ de E est faiblement compacte.*

Démonstration. Soit $\{x_n\} \subset E$ une suite quelconque bornée. Considérons le sous-espace fermé séparable $E_1 \subset E$ formé par la suite $\{x_n\}$. E_1 étant régulier, $\overline{\overline{E_1}} = E_1$ est séparable et il en est donc de même pour $\overline{E_1}$; d'où l'on voit que la sphère $|F| \leqslant 1$ de $\overline{\overline{E_1}}$ est faiblement compacte (au sens de la convergence faible des fonctionnelles). Posons $F_n(f) = f(x_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ pour $f \subset \overline{E_1}$. Il est évident que $|F_n| = |x_n| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc la suite $\{F_n\}$ contient une suite partielle $\{F_{n_i}\}$ qui converge faiblement vers F_0. Alors $F_{n_i}(f) \to F_0(f)$, donc $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$ pour chaque $f \subset \overline{E_1}$, c'est-à-dire la suite $\{x_{n_i}\}$ converge faiblement vers x_0.

Théorème 2. *Les deux notions: la sphère unitaire de E est dénombrablement fermée et la sphère unitaire de E est faiblement compacte, sont équivalentes.*

* Une sphère $|x| < 1$ est dite transfiniment fermée lorsque pour toute suite transfinie $\{x_\xi\}$, $\xi < \vartheta$, $|x_\xi| \leqslant 1$, il existe un élément x_0 tel que l'on a $\underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f(x_\xi) \leqslant f(x_0) \leqslant \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f(x_\xi)$ pour chaque $f \subset \overline{E}$.

Il suffit de montrer que la première propriété implique la deuxième. Soit $\{x_n\}$ une suite bornée $(|x_n| \leqslant 1)$. Envisageons un sous-espace linéaire $E_1 \subset E$ fermé et séparable contenant la suite $\{x_n\}$. E_1 étant régulier en vertu de 3), la sphère $|x| \leqslant 1$ est faiblement compacte.

Théorème 3. *Si la sphère $|x| \leqslant 1$ de E est faiblement compacte, la sphère $|f| \leqslant 1$ de $\overline{E}$ l'est également.*

Démonstration. Considérons une suite bornée $|f_n| \leqslant 1$. Il existe une fonctionnelle $f_0(x)$ telle que l'on a:

$$\underline{\lim}\, f_n(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \overline{\lim}\, f_n(x) \quad \text{dans } E.$$

Formons un sous-espace linéaire fermé séparable $E_1 \subset \overline{E}$ contenant $\{f_n\}$ et f_0. Pour une fonctionnelle arbitraire $F_0 \subset \overline{\overline{E}}$ on a $F_0(f) = f(x_0)$ pour chaque $f \subset E_1$, et, par conséquent:

$$\underline{\lim}\, F_0(f_n) = \underline{\lim}\, f_n(x_0) \leqslant f_0(x_0) \leqslant \overline{\lim}\, f_n(x_0) = \overline{\lim}\, F_0(f_n).$$

On a donc

$$\underline{\lim}\, F_0(f_n) \leqslant F_0(f_0) \leqslant \overline{\lim}\, F_0(f_n).$$

Ceci étant établi le théorème à démontrer résulte immédiatement du théorème précédent.

Il est aisé de démontrer maintenant le

Théorème 4. *Étant donnée la suite*

$$E, E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots, E^{(n)}, \ldots \qquad (E^{(n)} = \overline{E^{(n-1)}}; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad E^{(0)} = E)$$

les deux cas suivants peuvent se présenter:

1) la sphère $|x| \leqslant 1$ de chaque $E^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ est faiblement compacte;

2) la sphère $|x| \leqslant 1$ de chaque $E^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ne l'est pas.

Remarquons que la propriété de la sphère $|x| \leqslant 1$ d'être faiblement compacte implique les trois propriétés suivantes:

A) *Toute fonctionnelle linéaire $F(f)$ est faiblement continue.*

B) *Pour que le système d'équations $f_\nu(x) = c_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ait une solution y telle que $|y| \leqslant M$, il faut et il suffit que l'inégalité*

$$\left| \sum_1^n c_\nu \lambda_\nu \right| \leqslant M \left| \sum_1^n f_\nu \lambda_\nu \right|$$

se présente pour toute suite finie $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ de nombres réels.

C) *Chaque sous-espace linéaire $\Gamma \subset \overline{E}$ fermé et séparable est régulièrement fermé.*

1) Il serait intéressant de savoir si l'une de ces propriétés (ou un groupe de ces propriétés) est équivalente à la propriété de la sphère unitaire d'être faiblement compacte.

2) Il paraît intéressant de résoudre la question si le réciproque du théorème 2 est vrai. La réponse est affirmative pour le cas où E est séparable, ce qu'a été trouvé pour la première fois par S. Banach ([4]). On a donc la proposition:

L'espace séparable E est régulier si la sphère $|x| \leqslant 1$ est faiblement compacte.

S. Banach a démontré cette proposition par une méthode assez compliquée. Il est clair que cette proposition est une conséquence immédiate de 3°.

$$F(f) = \int\limits_{Q} f(x)\, d\Phi(e),$$

où Q est la sphère $|x| \leqslant 1$ dans E.

Université d'État.
Odessa.

Manuscrit reçu
le 28. VIII. 1937.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, [2] И. Гельфанд, Интегрирование абстрактных функций и аналитическое изображение линейных операторов (диссертация, 1935). [3] S. Banach, loc. cit., p. 72. [4] S. Banach, loc. cit., chap. XI, th. 13.