Matematica. — *Sur la représentation des fonctionnelles continues.* Nota di R. GATEAUX, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Les fonctions $z(\alpha)$, dont il sera question ici, sont des fonctions réelles continues de la variable réelle α, $0 < \alpha \leq 1$. Nous désignerons par D l'ensemble de ces fonctions, telles que $A \leq z \leq B$. A et B étant deux nombres donnés.

Nous désignerons par $V|[z]|$, avec ou sans indice, des expressions de la forme:

$$(1)\qquad V|[z]| = K_0 + \sum_{p}^{1,\ldots,m} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p,$$

K_0 étant une constante, K_p une fonction continue de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Soit $U|[z]|$ *une fonctionnelle définie et continue dans* D. *On peut déterminer une suite d'expressions* $V_n|[z]|$, *de la forme* (1), *telles que*

$$(2)\qquad U|[z]| = \lim_{n\to\infty} V_n|[z]| ,$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact extrait de D.

Ce théorème est analogue à celui de Weierstrass sur la représentation d'une fonction continue comme limite d'une suite de polynomes. Il a été énoncé et démontré par M. Fréchet (Annales de l'École normale supérieure, mai 1910). J'en ai indiqué une démonstration plus élémentaire (Comptes rendus, 4 aout 1913).

Il peut être intéressant de posséder une représentation (2), la convergence étant uniforme dans tout le domaine D. Le théorème suivant établit les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire $U|[z]|$ pour que ce résultat puisse être obtenu.

THÉORÈME. — *La fonctionnelle* $U|[z]|$ *étant définie dans* D, *pour qu'elle soit limite d'expressions* $V_n|[z]|$, *la convergence étant uniforme dans* D, *il faut et il suffit que:*

1°) $U|[z]|$ *soit uniformément continue dans* D;

2°) *quel que soit* ε *positif, on puisse diviser l'intervalle* (0, 1) *dans lequel sont définies les fonctions* $z(\alpha)$, *en un nombre fini d'intervalles tels que, si* $z(\alpha)$, $t(\alpha)$ *sont deux fonctions du domaine* D *ayant la même valeur moyenne dans chacun de ces intervalles, on ait:*

$$|U|[z]| - U|[t]|| < \varepsilon .$$

A) La condition est nécessaire. Nous supposons que $U|[z]|$, est la limite d'expressions $V_n|[z]|$, la convergence étant uniforme dans D. Nous vérifions d'abord que les conditions 1°) et 2°) sont satisfaites pour toute expression $V_n|[z]|$. De là nous concluons qu'elles le sont pour $U|[z]|$.

B) La condition est suffisante. Nous supposons les conditions 1°) et 2°) satisfaites pour $U|[z]|$. Étant donné ε positif, il nous faut déterminer une expression $V|[z]|$ telle que:

$$|U|[z]| - V|[z]|| < \varepsilon$$

dans le domaine D. Nous opérons de la façon suivante pour construire $V|[z]|$:

a) Nous divisons l'intervalle (0, 1) en intervalles $I_1, \ldots, I_q$, d'étendues $\delta_1, \ldots, \delta_q$, séparés par les points $l_1, \ldots, l_{q-1}$, et tels que, si z, t ont la même valeur moyenne dans chacun d'eux, nous ayons:

$$|U|[z]| - U|[t]|| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

b) Soit δ le plus petit des nombres δ_k, et h un nombre plus petit que δ. Nous désignerons par $\zeta(\alpha)$ une fonction continue, constante dans les intervalles $(0, l_1), (l_1 + h, l_2), \ldots, (l_{q-1} + h, 1)$ où elle est égale à $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$, et linéaire dans les intervalles restants.

À toute fonction $\zeta(\alpha)$ nous attachons un nombre $U|[\zeta]| = u(\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ ainsi défini:

Si ζ appartient à D, $U|[\zeta]|$ est la valeur de la fonctionnelle que nous considérons, pour la fonction ζ.

Si ζ n'appartient pas à D, nous remplaçons par B ceux des nombres ζ_k qui sont plus grands que B, et par A ceux qui sont plus petits que A. Les nombres ζ'_k, ainsi obtenus, caractérisent une fonction $\zeta'(\alpha)$ appartenant à D, et nous posons $U|[\zeta]| = U|[\zeta']|$.

La fonction $u(\zeta_1, \ldots, \zeta_q) = U|[\zeta]|$ est ainsi définie et continue pour toutes les valeurs de ses variables.

c) À toute fonction z de D, nous faisons correspondre la fonction ζ (appartenant ou non à D) ayant la même valeur moyenne que z dans chacun des intervalles I_k.

Nous démontrons, ensuite, que si l'on choisit h plus petit qu'un certain nombre h_1, on a:

$$|U|[z]| - U|[\zeta]|| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

En effet, si ζ appartient à D, c'est évident d'après *a*).

Et si ζ n'appartient pas à D, nous formons une fonction z', correspondant à ζ' au sens précédemment indiqué, et voisine de z. Par l'intermédiaire de $U|[z']|$ et $U|[\zeta']|$, en nous appuyant sur ce que $U|[z]|$ est uniformément continue dans D, nous démontrons que l'inégalité précédente est satisfaite dès que $h < h_1$.

d) Quand z varie dans D, la fonction ζ correspondante varie entre des limites $A - \lambda$, $B + \lambda$. Nous déterminons un polynome $p(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$ tel que dans ce dernier domaine nous ayons:

$$|u(\zeta_1, \dots, \zeta_q) - p(\zeta_1, \dots, \zeta_q)| < \frac{\varepsilon}{4};$$

alors:

$$|U[z] - p(\zeta_1, \dots, \zeta_q)| < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

$\zeta_1, \dots, \zeta_q$ s'expriment linéairement au moyen des valeurs moyennes $z_1, \dots, z_q$ de z dans les intervalles $I_1, \dots, I_q$. On a:

$$p(\zeta_1, \dots, \zeta_q) = p_1(z_1, \dots, z_q).$$

Si nous remplacions les quantités z_k par leurs valeurs $\int_{l_{k-1}}^{l_k} z(\alpha)\, d\alpha$, p_1 deviendrait une expression $V|[z]|$, mais dans laquelle les fonctions K_p ne seraient pas continues.

e) Pour éviter cet inconvénient, au lieu de z_k nous substituons:

$$z'_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} a(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha,$$

$a(\alpha)$ étant une fonction continue nulle aux points l_k (ce qui rend les fonctions K_p continues), égale à 1 dans les intervalles

$$(0, l_1 - h'), \dots, (l_{k-1} + h', l_k - h'), \dots, (l_{q-1} + h', 1),$$

et linéaire dans les intervalles restants.

Dès que h' est plus petit qu'une certaine quantité h'_1, on a:

$$|p_1(z_1, \dots, z_q) - p_1(z'_1, \dots, z'_q)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Or, si nous remplaçons les z'_k par leurs expressions, p_1 devient une expression $V[z]$, pour laquelle on a:

$$|U[z] - V|[z]|| < \varepsilon.$$

$V[z]$ est l'expression cherchée.