МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР
Ташкентский ордена Трудового Красного Знамени
институт инженеров железнодорожного транспорта

№ 6321-В90

УДК 517.98

Д.Ш.Гольдштейн, Ф.А.Сукочев

УСЛОВИЯ (А), (В), (С) и $\sigma(E, E')$ – ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ ПОДМНОЖЕСТВ В НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ташкент – 1990

0. Введение. Работа посвящена изучению свойств слабой топологии в симметричном пространстве $E = E(M)$ на конечной алгебре фон Неймана M. Полученные критерии слабой секвенциальной полноты, рефлексивности и правильности $E(M)$ являются некоммутативным обобщением аналогичных результатов для банаховых решеток (см. [20], [22], [7]). Один из основных результатов – это описание подмножеств в $E(M)$ относительно компактных в топологии $\sigma(E, E')$, порожденной ассоциированным пространством E'. Теорема, устанавливающая девять эквивалентных условий $\sigma(E, E')$ относительной компактности подмножества в $E(M)$, с одной стороны, обобщает для $E(M)$ соответствующий результат M. Takesaki для пространства $L_1(M)$ – всех интегрируемых операторов, присоединенных к M (см. [2, с. 149]), а с другой, как и в коммутативном случае (см. [11]) устанавливает связь между топологическими свойствами подмножества $K \subset E(M)$ и множества $\widetilde{K} \subset E(0,1)$ – всех перестановок операторов из K. Аналог этой теоремы для симметрично-нормированных идеалов (без анализа связи между K и $\widetilde{K}$) доказан в [8, с. 137].

Используются терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [2] и теории некоммутативного интегрирования из [1], [3], [4].

Авторы выражают признательность В.И.Чилину за внимание к работе и помощь в подготовке текста статьи.

1. Предварительные сведения. Всюду в дальнейшем M – конечная непрерывная алгебра фон Неймана, μ – точный нормальный конечный след на M, $\mathcal{P}_M$ – решетка всех проекторов из M, $S(M)$ – $*$-алгебра всех μ – измеримых операторов, присоединенных к M, U_M – множество всех унитарных операторов из M. В дальнейшем будем считать, что $\mu(\mathbb{1}) = 1$, где $\mathbb{1}$ – единица в M. Для каждого положительного оператора $T \in S(M)$ запись $\{T > s\}$ соответствует спектральному проектору для T. Через $\mu_t(T)$ обозначим перестановку оператора $T \in S(M)$, т.е. функцию на $(0, 1)$, определенную равенством

$$\mu_t(T) = \inf\{s > 0 : \mu(\{|T| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0,$$

где $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

Линейное подпространство $E(M)$ в $S(M)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_{E(M)}$ называется симметричным пространством на M, если

из того, что $T \in E(M)$, $S \in S(M)$ и $\mu_t(S) \leq \mu_t(T)$ для всех $t > 0$ следует, что $S \in E(M)$ и $\|S\|_{E(M)} \leq \|T\|_{E(M)}$.
Для всякого симметричного пространства имеют место непрерывные вложения: $M \subset E(M) \subset L_1(M)$, где $L_1(M)$ - банахово пространство всех интегрируемых операторов из $S(M)$, с нормой $\|T\|_1 = \mu(|T|)$ (продолжение μ на $L_1(M)$ также будем обозначать через μ).

Из свойств перестановок ([23] , [5]) непосредственно вытекает, что:

1. $\|x\|_{E(M)} = \|x^*\|_{E(M)}$ для всех $x \in E(M)$;
2. $\|ax\|_{E(M)} \leq \|a\| \|x\|_{E(M)}$ для всех $a \in M$; $x \in E(M)$, где $\|\cdot\| - C^*$ - норма на M;
3. $\|x\|_{E(M)} \leq \|y\|_{E(M)}$ при $|x| \leq |y|$, $x, y \in E(M)$;
4. $\|ux\|_{E(M)} = \|x\|_{E(M)}$ при любых $x \in E(M)$, $u \in U_M$.

Для симметричного простанства $E(M)$ на непрерывной алгебре фон Неймана M через $E_M(0,1)$ обозначим множество всей действительных измеримых функций f на $(0,1)$, для которых существует такое $T_f \in E(M)$, что $\mu_t(T_f) = \tilde{f}(t)$ при всех $t > 0$ (перестановку функции f обозначим символом $\tilde{f}$). Положим $\|f\|_{E_M(0,1)} = \|T_f\|_{E(M)}$. Известно (см. [16] , [14]), что ($E_M(0,1)$, $\|\cdot\|_{E_M(0,1)}$) симметричное функциональное пространство на $(0,1)$. Для подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в M обозначим $E(\mathcal{B}) = L_1(\mathcal{B}) \cap E(M)$. Легко видеть, что $E(\mathcal{B})$ с индуцированной из $E(M)$ нормой является симметричным пространством на $\mathcal{B}$ и более того, в случае, если M и $\mathcal{B}$ - непрерывные алгебры фон Неймана, то пространства ($E_M(0,1)$, $\|\cdot\|_{E_M(0,1)}$ и ($E_{\mathcal{B}}(0,1)$, $\|\cdot\|_{E_{\mathcal{B}}(0,1)}$) - совпадают, поэтому в дальнейшем это пространство обозначим через ($E(0,1)$, $\|\cdot\|_{E(0,1)}$).

В дальнейшем, если $\mathcal{B}$ коммутативная подалгебра фон Неймана, мы часто будем отождествлять $E(\mathcal{B})$ с симметричным пространством комплекснозначных функций $E(\Omega) = E(\Omega, \Sigma, \mu)$ на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) (если алгебра $\mathcal{B}$ - непрерывна, то (Ω, Σ, μ) - непрерывное вероятностное пространство). При этом самосопряженная часть $E_h(\mathcal{B}) = \{T = T^* : T \in E(\mathcal{B})\}$ отождествляется с симметричным пространством $E_h(\Omega)$ - действительнозначных функций.

Символом $E_0 = E_0(M)$ обозначим замыкание алгебры M в $E(M)$

по $\|\cdot\|_{E(M)}$. Известно (см. [I6], [I4]), что E_0 – симметричное пространство на M и $E_0(0,I)$ совпадает с замыканием $L_\infty(0,I)$ по $\|\cdot\|_{E(0,1)}$.

Говорят, что в $E(M)$ выполнено условие (A) если из $0\leq x_n\downarrow 0$, $x_n\in E(M)$ следует $\|x_n\|_{E(M)}\to 0$.

Говорят, что в $E(M)$ выполнено условие (B), если из $0\leq x_n\uparrow$, $x_n\in E(M)$, $\sup\limits_n\|x_n\|_{E(M)}<\infty$ следует, что существует $x\in E(M)$, для которого $x_n\uparrow x$.

Говорят, что в $E(M)$ выполнено условие (C), если из $0\leq x_n\uparrow x\in E(M)$ следует, что $\sup\limits_n\|x_n\|_{E(M)}=\|x\|_{E(M)}$.

Ясно, что условия (A), (B), (C) выполнены в $E(M)$ тогда и только тогда, когда они выполнены в $E_h(M)=\{T=T^*: T\in E(M)\}$.

Симметричные пространства, в которых выполнено условие (A) называются правильными.

Теорема I.I. ([I7], [I6], [I5]).
В симметричном пространстве $E(M)$ выполнено одно из условий (A), (B) или (C) в том и только в том случае, если это условие выполнено в $E(0,I)$.

Заметим, что в силу [24] вместо пространства $E(0,I)$ в формулировке теоремы I.I можно рассматривать пространство $E(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ – некоторая коммутативная непрерывная подалгебра фон Неймана. Пространство $E'=E'(M)=\{x\in L_1(M): xy\in L_1(M)$ для всех $y\in E(M)$ и $\|x\|_{E'(M)}=|\sup\limits_{\|T\|_E\leq 1}\mu(xT)|<\infty\}$ называется ассоциированным пространством к $E(M)$. Пространство $(E'(M), \|\cdot\|_{E'(M)})$ является симметричным пространством на M, в котором всегда выполнены условия (B) и (C). Кроме того $E'(0,I)$ совпадает с $[E(0,I)]'$ (см. [I6], [I8]).

Пусть N – конечная алгебра фон Неймана, ν – точный нормальный нормированный след на N. Линейный оператор $T: L_1(M)\to L_1(N)$ называется допустимым оператором из пары $(L_1(M), M)$ в пару $(L_1(N), N)$, если $T(M)\subset N$ и $\|T\|_{(L_1(M),\|\cdot\|_1)\to(L_1(N),\|\cdot\|_1)}\leq 1$, $\|T\|_{(M,\|\cdot\|)\to(N,\|\cdot\|)}\leq 1$.

Множество всех допустимых операторов из пары $(L_1(M), M)$ в пару $(L_1(N), N)$ обозначим через $\mathcal{D}_{M\to N}$. Для $x,y\in L_1(M)$ запись $x\prec y$ означает, что $\int\limits_0^h\mu_t(x)dt\leq\int\limits_0^h\mu_t(y)\,dt$ для всех $h\in(0,1)$.

Известно (см. [16], [9]), что $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $x = Ty$ для некоторого $T \in \mathcal{D}_{M \to N}$.

Для подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в M символом $T_{\mathcal{B}}$ будем обозначать оператор условного математического ожидания (УМО) из $L_1(M)$ на $L_1(N)$. Из свойств операторов УМО следует, в частности, что $T_{\mathcal{B}} \in \mathcal{D}_{M \to \mathcal{B}}$.

Известно, [16], [9], что если для симметричного пространства $E(M)$ из $x \prec y$, $y \in E(M)$ следует, что $x \in E(M)$ и $\|x\|_{E(M)} \leq \|y\|_{E(M)}$, то любой оператор $T \in \mathcal{D}_{M \to M}$ ограниченно действует в $E(M)$. Пространство $E(M)$ с таким свойством называется вполне симметричным. Легко видеть, что пространство $E(M)$ вполне симметрично тогда и только тогда, когда $E(0,1)$ вполне симметрично. Отсюда и из [19] следует, что если в $E(M)$ выполнено условие (A), или (B) и (C), то $E(M)$ - вполне симметрично.

2. Условия (A), (B) и (C) в симметричных пространствах.

В этом пункте изучаются некоторые свойства банаховых пространств (такие как условие (u), слабая секвенциальная полнота, рефлексивность) в классе симметричных пространств измеримых операторов на конечных непрерывных алгебрах фон Неймана. Устанавливается взаимосвязь этих свойств с порядковыми условиями (A), (B) и (C). Аналоги полученных результатов для банаховых решеток - хорошо известны (см. [20], [7], [22]). Следует отметить, что в случае, когда M - некоммутативная алгебра фон Неймана, пространства $E_h(M)$ не являются решетками.

Начнем с технического результата о свойствах оператора УМО в симметричных пространствах.

Лемма 2.I. Пусть $T_{\mathcal{B}} : L_1(M) \longrightarrow L_1(\mathcal{B})$ - оператор УМО на коммутативную подалгебру фон Неймана $\mathcal{B}$ в M. Предположим, что $T_{\mathcal{B}}$ - непрерывно отображает $E(M)$ на $E(\mathcal{B})$. Тогда $\mu(T_{\mathcal{B}}(A)C) = \mu(AC)$ для любых $A \in E(M)$ и $C \in E'(\mathcal{B})$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $A \geq 0$, $C \geq 0$. Пусть $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ таковы, что $C_n \uparrow C$. Имеем,

$$\mu(T_{\mathcal{B}}(A)C_n) = \mu(C_n T_{\mathcal{B}}(A)) = \mu(T_{\mathcal{B}}(C_n A)) = \mu(C_n A) = \mu(AC_n).$$

Поскольку $T_{\mathcal{B}}(A) \geq 0$ и, следовательно, $T_{\mathcal{B}}(A)C_n \uparrow T_{\mathcal{B}}(A)C$, то $\mu(T_{\mathcal{B}}(A)C_n) \longrightarrow \mu(T_{\mathcal{B}}(A)C)$. Покажем, что $\mu(AC_n) \longrightarrow \mu(AC)$. Действительно, $\mu(A(C - C_n)) \leq \int_0^1 \mu_t(A)\mu_t(C - C_n)\,dt$ (см. [4]).

Но, так как $(C - C_n) \downarrow 0$, то $\mu_t(C - C_n) \downarrow 0$, и следовательно $\mu_t(A)\mu_t(C - C_n) \downarrow 0$. Так как $\mu_t(A) \in E(0,1)$, $\mu(C - C_n) \in E'(0,1)$, то $\mu_t(A)\mu_t(C - C_n) \in L_1(0,1)$ для всех $n = 1,2,\ldots$. Следовательно $\int\limits_0 \mu_t(A)\mu_t(C - C_n)\,dt \to 0$.

Теорема 2.I. Если в симметричном пространстве $E = E(M)$ выполнены условия (B) и (C), то это пространство $\sigma(E,E')$ – секвенциально полно.

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$ некоторая $\sigma(E,E')$-фундаментальная последовательность. Очевидно, что $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ также и $\sigma(E,M)$ – фундаментальна. Поскольку $E \subset L_1(M)$ и пространство $L_1(M)$ $\sigma(L_1(M),M)$ – секвенциально полно (см. [2, стр. I48]), то найдется такой оператор $A \in L_1(M)$, что $\mu(A_n D) \to \mu(AD)$ для каждого $D \in M$. Пусть $A = u|A|$, $u \in U_M$ – полярное разложение оператора A. Очевидно, что $u^* A_n \xrightarrow{\sigma(L_1(M),M)} u^* A = |A|$. Таким образом, без ограничения общности, можно считать, что $A \geqslant 0$. Обозначим через $\mathcal{B}$ – коммутативную подалгебру фон Неймана в M, порожденную оператором A. Тогда по лемме 2.I последовательность $\{T_{\mathcal{B}}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ будет $\sigma(E(\mathcal{B}), E'(\mathcal{B}))$ – фундаментальной. Заметим теперь, что если $0 \leq T_n \in E(\mathcal{B})$, $T_n \uparrow$, $\sup\limits_n \|T_n\|_E < \infty$, то найдется такое $T \in E$, что $T_n \uparrow T$. Но в то же время $\sup\limits_n \|T_n\|_1 < \infty$ и значит для некоторого $S \in L_1(\mathcal{B})$ выполнено $T_n \uparrow S$ (см. [18]). Следовательно, $T = S$ и $T \in E(\mathcal{B})$, т.е. в $E(\mathcal{B})$ выполнено условие (B). Выполнение же условия (C) в $E(\mathcal{B})$ – очевидно. Но тогда $E(\mathcal{B})$ является $\sigma(E(\mathcal{B}), E'(\mathcal{B}))$ – секвенциально полным (см. [20, с. 36I]). Поэтому найдется такой оператор $B \in E(\mathcal{B})$, что $T_{\mathcal{B}}(A_n) \xrightarrow{\sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B}))} B$. С другой стороны, из сходимости $A_n \xrightarrow{\sigma(L_1(M),M)} A$ следует сходимость $T_{\mathcal{B}}(A_n) \xrightarrow{\sigma(L_1(\mathcal{B}),\mathcal{B})} T_{\mathcal{B}}(A) = A$ (см. [21]). Ясно, что $B = A$, т.е. $A \in E(\mathcal{B}) \subset E$. Осталось доказать, что $\mu(A_n D) \to \mu(AD)$ для любого положительного $D \in E'(M)$ (заметим, что в силу выполнения условий (B) и (C) в $E(M)$ $E(M) = E''(M)$ (см. [16]), и значит $\mu(AD) < \infty$). Обозначим $\mathfrak{A}$ – коммутативную подалгебру фон Неймана в M, порожденную оператором D. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше для последовательности $\{T_{\mathfrak{A}}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ получим, что

$T_{\mathfrak{A}}(A_n) \xrightarrow{\sigma(E(\mathfrak{A}), E'(\mathfrak{A}))} T_{\mathfrak{A}}(A)$. Так как $D \in E'(\mathfrak{A})$, то по лемме 2.I $\tau(T_{\mathfrak{A}}(A_n)D) = \tau(A_n D)$, $\tau(T_{\mathfrak{A}}(A)D) = \tau(AD)$. Следовательно, $\tau(A_n D) \to \tau(AD)$ при $n \to \infty$.

Следствие 2.I. Пусть $E = E(M)$ - симметричное пространство, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - $\sigma(E, E')$ - фундаментальная последовательность в E. Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторому $A \in E''$ в топологии $\sigma(E'', E')$.

Доказательство. Очевидно, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является $\sigma(E'', E')$ - фундаментальной. Так как в E'' выполнены условия (B) и (C), то по теореме 2.I пространство E'' - $\sigma(E'', E')$ - секвециально полно. Следовательно существует $\sigma(E'', E')\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \in E''$.

Говорят, что в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ выполнено условие (u), если для любой $\sigma(X, X^*)$ - фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такая, что

(i) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ - слабо безусловно сходится, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y^*(y_n)| < \infty$ для любого $y^* \in X^*$;

(ii). Последовательность $\{x_n - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю.

Теорема 2.2.(ср. [7 , I. с. 2]). Если в симметричном пространстве $E(M) = M$ выполнено условие (A), то в E выполнено условие (u).

Доказательство. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - $\sigma(E, E^*)$ - фундаментальная последовательность в E. Поскольку в E выполнено условие (A), то $E^* = E'$ (см. [18]). Поскольку M - конечная алгебра фон Неймана, то $M \subset E'$. Таким образом, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - $\sigma(L_1(M), M)$ - фундаментальна. Используя $\sigma(L_1(M), M)$-секвенциальную полноту пространства $L_1(M)$ найдем такой $A \in L_1(M)$, что $\mu(A_n B) \to \mu(AB)$ для любого $B \in M$. Пусть $|A^*| = \int \lambda \, dE_\lambda$ - спектральное разложение оператора $|A^*|$. Положим $P_n = \int_{L_n} \lambda \, dE_\lambda$, $H_n = P_n A$, где $L_n = (n-1, n]$. Покажем, что $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ - искомая последовательность. Имеем $|H_n^*|^2 = P_n A A^* P_n \in M$, и следовательно $H_n \in M \in E$.

Ясно, что $P_k = (E_k - E_{k-1})$ и $P_m = (E_m - E_{m-1})$ - ортогональны при $m \neq k$, так как $m, k \in N$. При этом $\bigvee_n P_n = S(|A^*|)$, где $S(|A^*|)$ - носитель оператора $|A^*|$.

Для любого $G \in E'$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(H_n G)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(P_n A G)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(P_n A G P_n)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(|P_n A G P_n|).$$

Как было отмечено в следствии 2.I $A \in E''$, и следовательно $\mu(AG) < \infty$ для любого $G \in E'$. Пусть $AG = u|AG|$, $u \in \mathcal{U}_M$ - полярное разложение оператора AG. Используя свойство перестановок (см. п. I), получаем, что $\mu(AGS) < \infty$ для любого $S \in M$. Поскольку $\mu(AGS) = \mu(SAG)$ (см. [I, с.87]), то $\|AG\|_1 = \mu(|AG|) = \mu(u^* AG) = \mu(AGu^*) < \infty$.

Таким образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(H_n G)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(|P_n A G P_n|) = \|\sum_{n=1}^{\infty} P_n A G P_n\|_1 \leq$$

$$\leq \|AG\|_1 < \infty \qquad \text{(см. [I3]).}$$

Последнее означает, что часть (i) в определении условия (u) выполнена в $E(M)$.

Проверяем выполнение части (ii) в этом определении. Имеем

$$(A_n - \sum_{j=1}^{n} H_j) G = (A_n - \sum_{j=1}^{n} P_j A) G = A_n G - (\sum_{j=1}^{n} P_j A) G =$$

$$A_n G - (A - (S(|A^*|) - \sum_{j=1}^{n} P_j) A) G = (A_n - A) G +$$

$$+ (S(|A^*|) - \sum_{j=1}^{n} P_j) A G,$$

откуда $\mu((A_n - \sum_{j=1}^{n} H_j) G) = \mu((A_n - A) G) + \mu((S(|A^*|) - \sum_{j=1}^{n} P_j) A G).$

В силу следствия 2.I первое слагаемое стремится к нулю. Оценим второе слагаемое. Пусть $Q_n = \sum_{j=1}^{n} P_j$. Ясно, что $Q_n \uparrow S(|A^*|)$.

Поскольку $S(|A^*|) A G = A G$, то $\mu((S|A^*|) - Q_n) A G) \leq$

$$\leq \int_0^1 \mu_t(S(|A^*| - Q_n) \cdot \mu_t(AG)\, dt.$$

<u>Замечание 2.I</u>. В доказательстве теоремы 2.2 нигде не использовалось предположение о непрерывности алгебры M.

выполнено условие (u). Следовательно, если в E (M) существует слабо фундаментальная, но не сходящаяся последовательность $\{x_n\}$, то в E (M) существует слабо безусловно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, который не сходится в слабой тополгии. По теореме 2.e.4 [6] это обеспечивает наличие в E подпространства изоморфного c_0 .

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Пусть $\mathcal{B}$ - непрерывная подалгебра фон Неймана в M . Тогда E ($\mathcal{B}$) замкнутое по $\|\cdot\|_E$ подпространство в E (см. пункт I). Значит, в E ($\mathcal{B}$) любая ограниченная по норме возрастающая последовательность положительных элементов имеет сильный предел, и следовательно (см. [20, с. 396]) в E ($\mathcal{B}$) выполнены условия (A) и (B). Используя теорему I.I, получаем, что эти условия выполнены также и в E (M).

(iv) $\Longrightarrow$ (ii). Покажем, что наличие свойств (A) и (B) в E (M) приводит к тому, что E (M) изоморфно некоторому сопряженному пространству. Действительно,

$$E = E'' = [(E')_0]' = [(E')_0]^* .$$

Тогда в силу предложения 2.e.8 [6] и теоремы 2.3 в E нет подпространств изоморфных c_0 . Теорема доказана.

Лемма 2.2. Пусть $E = E$ (M) - симметричное пространство. Предположим, что в E'' выполнено условие (A). Тогда и в E выполнено условие (A).

Доказательство. В силу теоремы I.I достаточно установить, что в E (0,I) выполнено условие (A). Последнее эквивалентно равенству E (0,I) = E_0 (0,I) (см. [19], [25)) (мы пользуемся здесь тем, что по условию леммы $L_\infty(0,1) \neq E(0,1)$. Предположим, что это не так, тогда найдется такая функция $f = \tilde{f} \in E(0,1)$, что $f_n = f \cdot \chi_{(n^{-1},1]}$ не сходится к f по норме $\|\cdot\|_{E(0,1)}$. Заметим, что последовательность $\{f_n\}$ не фундаментальна по $\|\cdot\|_{E(0,1)}$. Действительно, если бы $\{f_n\}$ была фундаментальна по $\|\cdot\|_{E(0,1)}$, то нашлась бы такая функция $g \in E$ (0,I), что $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E(0,1)}} g$ и, следовательно, $f_n \longrightarrow g$ по мере. Но, так как $f_n \longrightarrow f$ по мере, то $f = g$ и значит $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{E(0,1)}} f$, что не так. В то же время поскольку E (0,I) $\subset E''$ (0,I) и в E'' (0,I) выполнено условие (A), то $\|f_n - f\|_{E''(0,1)} \longrightarrow 0$. Значит, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна по $\|\cdot\|_{E''(0,1)}$.

Учитывая, что $[E_0(0,1)]'' = E''(0,1)$ и что $E_0(0,1)$, изометрически вкладывается в $[E_0(0,1)]''$ (См. [19]), получим фундаментальность $\{f_n\}$ по норме $\|\cdot\|_{E(0,1)}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.5. Пусть в E'' выполнено условие (А). Следующие условия эквивалентны:

(i). E не содержит подпространств изоморфных ℓ_1 ;

(ii). Единичный шар в E условно $\sigma(E, E^*)$ - секвенциально компактен;

(iii). В E' выполнено условие (А).

Доказательство. (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Если E не содержит подпространств изоморфных ℓ_1, то и $E(\mathcal{B})$ их не содержит, где $\mathcal{B}$ - произвольная непрерывная подалгебра фон Неймана в M. Тогда по [7, с. 103] в $E'(\mathcal{B})$, а значит и в E' выполнено условие (А). Обратно, если в E' выполнено условие (А), то в E'' и в E' выполнено условие (А) и (В). (см. [20, с. 387] и [17]). Следовательно, пространства E' и E'' - рефлексивны ([20, с.387], [16, с.43]). Так как рефлексивность наследуется подпространствами, то E'' не содержит подпространств изоморфных ℓ_1. Поскольку в E выполнено условие (А) (см. лемму 2.2), то нетрудно заметить, что E изометрически вкладывается в E'' (ср. [19]), поэтому E также не содержит подпространств изоморфных ℓ_1.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (i). См. теорему 2.е.5 [6] .

Следующая теорема даёт описание рефлексивных симметричных пространств.

Теорема 2.6. Для симметричного пространства $E = E(M)$ следующие условия эквивалентны:

(i). E - рефлексивно;

(ii). В E и $E^* = E'$ выполнены условия (А) и (В);

(iii). В E' выполнено условие (А) и каждая возрастающая ограниченная последовательность положительных элементов в E имеет сильный предел;

(iv). E не содержит подпространств изоморфных c_0 и ℓ_1.

Доказательство. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Если E - рефлексивно, то рефлексивно всякое подпространство $E(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ - непрерывная подалгебра фон Неймана в M (см.). По теореме Огасавара (теор. I0, с. 391, [20]) $E(\mathcal{B})$ и $E(\mathcal{B})^* = E'(\mathcal{B})$ обладает свойствами (А) и (В), и, следовательно, этими свойствами обладают также E и E' (теор. I.I). Обратно, пусть в E и

E^* выполнены условия (A) и (B). Тогда $E^* = E'$, $(E^*)' = E'' = E^{**}$. Поскольку $E = E''$, то $E = E^{**}$.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Из теоремы 2.4 следует, что E не содержит подпространств изоморфных c_0. Из предыдущей теоремы следует, что в E нет изоморфных копий ℓ_1.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$. Если в E не существует подпространств изоморфных c_0, то в E выполнены условия (A) и (B) (см. теорему 2.4). Поскольку в E нет подпространств изоморфных ℓ_1, то по теореме 2.5 в E' выполнено условие (A). Как упоминалось ранее условие (B) всегда выполнено в пространстве E'.

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. См. теорему 2.4.

3. $\sigma(E, E')$ - компактные подмножества в $E(M)$.

Следующая теорема даёт описание подмножеств в $E = E''$ относительно компактных в топологии $\sigma(E, E')$.

Теорема 3.1. Пусть $E = E(M)$ симметричное пространство на конечной непрерывной алгебре M, в котором выполнены условия (B) и (C), K - подмножество в E. Следующие условия эквивалентны:

(i). $K - \sigma(E, E')$ - относительно компактно;

(ii). $K - \sigma(E, E')$ - относительно секвенциально компактно;

(iii). $K - \sigma(E, E')$ - относительно счётно компактно;

(iv). Для любой максимальной коммутативной подалгебры фон Неймана $\mathcal{B}$ в M множество $T_{\mathcal{B}}(K) - \sigma(E(\mathcal{B}), E'(\mathcal{B}))$ - относительно счётно компактно;

(v). K ограничено и для любой последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно ортогональных проекторов из M

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B\in K} |\mu(BP_nC)| = 0$$

для всех $C \in E'$;

(iv). K ограничено и для любой последовательности $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывающих к нулю проекторов из M

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B\in K} |\mu(\mathcal{B}R_nC)| = 0$$

для всех $C \in E'$

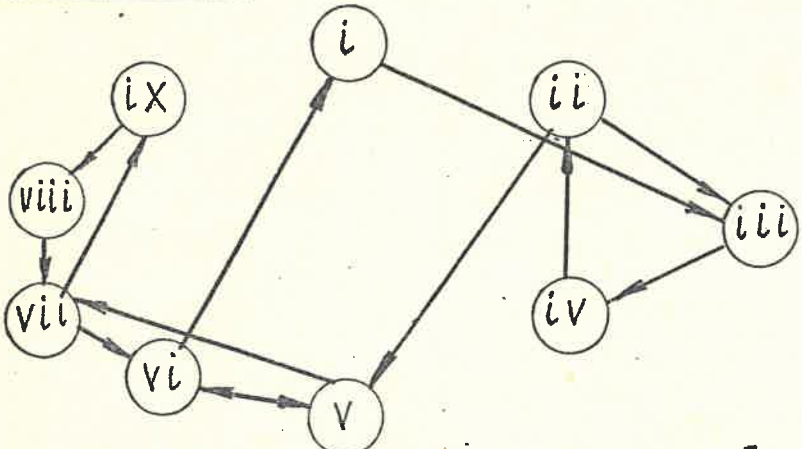
(vii). Множество $\widetilde{K}$ всех перестановок операторов из K является $\sigma(E(0,1), E'(0,1))$ - относительно компактным;

(viii). Множество $\mathcal{D}_{M\to B}(K) = \{Tx : x \in K, T \in \mathcal{D}_{M\to\mathcal{B}}\}$

является $\sigma(E(\mathcal{B}), E'(\mathcal{B}))$ - относительно компактным для некоторой коммутативной подалгебры $\mathcal{B}$ в M ;

(ix). Множество $\mathcal{D}_{M\to M}(K)=\{Tx : x\in K,\ T\in\mathcal{D}_{M\to M}\}$. является $\sigma(E, E')$ - относительно компактным.

Доказательство. Ниже приводится схема импликаций.



Перейдем к доказательству теоремы (ср. [8, с. 35]).

(V) $\Longleftrightarrow$ (vi). Если (vi) невыполнено, то существует $\varepsilon>0$, $C\in E$, $R_n\in\mathcal{P}_M$, $n = 1,2,\ldots$, $R_n\downarrow 0$, $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}\in K$ такие, что $|\mu(\mathcal{B}_n R_n C)|>\varepsilon$ и $|\mu(\mathcal{B}_n R_{n+1} C)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $P_n=R_n-R_{n+1}$. Тогда $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность попарно ортогональных проекторов таких, что

$$|\mu(\mathcal{B}_n P_n C)|>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Обратно, пусть (V) не выполнено. Тогда существует $\varepsilon>0$, $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность попарно ортогональных проекторов из M, $C\in E$, такие, что $|\mu(\mathcal{B}_n P_n C)|>\varepsilon$. Выберем $n(k)$ так, чтобы $|\mu(\mathcal{B}_{n(k)}(\sum_{j\geq n(k+1)} P_j)C)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $R_k=P_{n(k)}+\sum_{j\geq n(k+1)} P_j$. Последовательность проекторов убывает к нулю, и, при этом

$$|\mu(\mathcal{B}_{n(k)} R_k C)|>\frac{\varepsilon}{2}$$

(ср. Stratila S., Zsido L. „Lectures on von Neuman algebras", стр. 117-119).

(ii) $\Longrightarrow$ (V). Предположим, что (V) - не выполнено. Тогда существуют $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность попарно ортогональных проекторов из M, $C\in E'$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$ такие, что $|\mu(A_n P_n C)|>4\delta$, для некоторого $\delta>0$. Так как K - $\sigma(E, E')$ - относительно секвенциально компактно, то мы можем сч итать, что существует $A\in E$ такой, что $A_n \xrightarrow{\sigma(E,E')} A$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(AP_nC)=0$. Следовательно существует номер, для которого при $n \geq n_0$ выполнено условие $\mu(AP_nC) \leq \delta$. Рассмотрим последовательность $B_n = A_n - A \in E$. Очевидно, что

$$B_n \xrightarrow{\sigma(E,E')} 0 \quad \text{и} \quad |\mu(B_nP_nC)| \geq 3\delta \tag{1}$$

Построим подпоследовательность $B_{n(k)}$, обладающую следующими свойствами:

$$\left|\sum_{j=1}^{k} \mu(B_{n(k)}P_{n(j)}C)\right| < \delta \quad \text{для всех } k=2,3,\dots \tag{2}$$

$$\sum_{j=n(k+1)}^{\infty} |\mu(B_{n(k)}P_jC)| < \delta \quad \text{для всех } k=1,2,\dots. \tag{3}$$

Используя лемму 3.2 из [13], получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\mu(DP_nC)| < \infty$ для всех $D\in E$, $C\in E'$.

Положим $n(1)=1$, $n(2),\dots$, $n(p-1)$ уже построены так, что условие (2) выполнено при $k=2,3,\dots,p-1$, а условие (3) выполнено при $k=1,2,\dots,p-2$. Поскольку $B_n \xrightarrow{\sigma(E,E')} 0$ и так как $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\mu(B_{n(p-1)}P_jC)| < +\infty$, то при достаточно большом n выполнены условия

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1} \mu(B_nP_{n(j)}C)\right| < \delta,$$

$$\sum_{j=n}^{\infty} |\mu(B_{n(p-1)}P_jC)| < \delta.$$

Действительно, пусть n_1 таково, что для $n \geq n_1$ $|\mu(B_nP_{n(1)}C)| < \frac{\delta}{p-1}$; n_2 таково, что для $n\geq n_2$ $|\mu(B_nP_{n(2)}C)| < \frac{\delta}{p-1}$ и так далее. Ясно, что для $n \geq n_0 = \max\{n_1,\dots,n_{p-1}\}$ будет верно предпоследнее равенство. Последнее неравенство следует из того, что $\sum\limits_{j=n}^{\infty}|\mu(B_{n(p-1)}P_jC)|$ есть остаток сходящегося ряда. Из условия (3) имеем:

$$\sum_{j=n(k+1)}^{\infty} |\mu(B_{n(k)}P_jC)| = |\mu(B_{n(k)}P_{n(k+1)}C)| + |\mu(B_{n(k)}P_{n(k+1)+1}C)| + \dots < \delta.$$

Тогда $\sum_{j=k+1}^{\infty} |\mu(B_{n(k)} P_{n(j)} C)| = |\mu(B_{n(k)} P_{n(k+1)} C)| +$

$$+ |\mu(B_{n(k)} P_{n(k+2)} C)| + \dots < \delta,$$

$$k = 1,2,\dots, \qquad (4)$$

Поскольку $n(k+2) \geqslant n(k+1)+1$ и так далее. Рассмотрим проектор $P = \sum_{j=1}^{\infty} P_{n(j)}$. Имеем $\mu(B_{n(k)} PC) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{n(k)} P_{n(j)} C)$. Из (I), (2) и (4) вытекает, что $\mu(B_{n(k)} PC) > \delta$, $k = 1,2,\dots$. Это противоречит тому, что $B_n \xrightarrow{\sigma(E,E')} 0$.

(vi) $\Longrightarrow$ (i). Поскольку K ограничено, то по теореме Банаха-Алаоглу достаточно показать, что каждая $\sigma((E')^*, E')$ предельная точка $K \subset (E')^*$ лежит в $E'' = E$. Пусть $\varphi \in \overline{K}$, где $\overline{K}$ - $\sigma((E')^*, E')$ - замыкание K. Покажем, что $\varphi(R_n C) \to 0$ для любой убывающей к нулю последовательности проекторов $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $C \in E$. Имеем $\varphi(\cdot) = \sigma((E')^*, E')$ - $\lim_{\alpha} \mu(B_\alpha \cdot)$, $\varphi(R_n C) = \lim_{\alpha} \mu(B_\alpha R_n C)$, где $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ сеть из K. По условию (vi) $\lim_{n\to\infty} \varphi(R_n C) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{\alpha} \mu(B_\alpha R_n C)) = 0$.
Итак, $\varphi \in (E')^*$ и $\varphi(R_n C) \longrightarrow 0$ для любой убывающей к нулю последовательности $\{R_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_M$ и любого $C \in E'$. Мы покажем, что в этом случае существует такой $A \in E'' = E$, что $\varphi(x) = \mu(Ax)$ для всех $x \in E'$.

Пусть $\varphi' = \varphi / M$. Очевидно, функциональная φ' продолжается до непрерывного функционала на $(E')_0$. В силу того, что в $(E')_0$ выполнено условие (A) найдется такой оператор D из $(E')_0 = E''$, что $\varphi'(x) = \mu(xD)$ для любого $x \in (E')_0$. Определим функционал $\varphi_1(x) = \mu(xD)$ для любого $x \in E'$. Покажем, что функционал $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$ есть тождественный ноль. Действительно, пусть $x \in E'$, $x \geqslant 0$, $R_n \uparrow \mathbb{I}$, $R_n \in \mathcal{P}_M$, $xR_n = R_n x = X_n$. Поскольку $\varphi_1(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1(X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(DX_n)$, $\varphi(X) = \varphi(X_n) + \varphi(R_n^{\perp} X)$ и при этом $\lim_{n\to\infty} \varphi(R_n^{\perp} X) = 0$ получаем, что

$$\varphi_2(X) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(X_n) - \varphi_1(X_n)) = 0.$$

Установим эквивалентность первых четырех условий. Импликации (i) $\Longrightarrow$ (iii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii) очевидны. Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) следует из уже доказанных импликаций (ii) $\Longrightarrow$ (v), (v) $\Longrightarrow$ (vi), (vi) $\Longrightarrow$ (i).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset E$, $A_\alpha \xrightarrow{\sigma(E,E')} A \in E$.

Тогда по лемме 2.1 $T_{\mathcal{B}}(A_\alpha)\xrightarrow{\sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B}))}T_{\mathcal{B}}(A)\in E(\mathcal{B})$, т.е. отображение $T_{\mathcal{B}}$ — непрерывно действует из $(E,\sigma(E,E'))$ в $(E(\mathcal{B}),\ \sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B})))$. Следовательно, образ $T_{\mathcal{B}}(K)$ множества K будет $\sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B}))$ — относительно счётно компактным.

$(iv)\Longrightarrow(ii)$. Рассмотрим K как подмножество в $L_1(M)$ и покажем, что K — $\sigma(L_1(M),M)$ относительно компактно. Пусть $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}_M$, $P_n\downarrow 0$, $\mathcal{B}$ — максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в M, содержащая $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем $\mu(AP_n)=\mu(T_{\mathcal{B}}(A)P_n)$ для любого $A\in K\subset E$.
Так как $T_{\mathcal{B}}(K)$ — $\sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B}))$ — относительно счётно компактно, то в силу [12] оно $\sigma(E(\mathcal{B}),E'(\mathcal{B}))$ относительно компактно. Ясно, что тогда $T_{\mathcal{B}}(K)$ и $\sigma(L_1(\mathcal{B}),\mathcal{B})$ относительно компактно. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$. По теореме Эберлейна-Шмульяна множество K $\sigma(L_1(M),M)$ — относительно секвенциально компактно. Поэтому существует подпоследовательность $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к некоторому $A\in L_1(M)$ в $\sigma(L_1(M),M)$. Покажем, что $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\sigma(E,E')$ фундаментальная последовательность в E. Пусть $G\in E'$, $G\geq 0$, $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}_M$ таковы, что $R_n\uparrow\mathbb{1}$, $G_n=GR_n=R_nG\in M$. Тогда

$$|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})G)|\leq|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})(G-G_m))|+$$
$$+|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})G_m)|.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ максимальную коммутативную подалгебру фон Неймана в M, содержащую $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем

$$|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})(G-G_m))|=|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})R_m^{\perp}G)|\leq$$
$$\leq|\mu(A_{n_k}R_m^{\perp}G)|+|\mu(A_{n_\ell}R_m^{\perp}G)|=$$
$$=|\mu(T_{\mathfrak{A}}(A_{n_k})R_m^{\perp}G)|+|\mu(T_{\mathfrak{A}}(A_{n_\ell})R_m^{\perp}G)|$$

(см. лемму 2.1).

Поскольку $T_{\mathfrak{A}}(K)$, $\sigma(E(\mathfrak{A}),E'(\mathfrak{A}))$ — относительно компактно, а $R_m^{\perp}\downarrow 0$, то, используя [12], получим, что

$\sup\limits_{A\in K}|\mu(T_B(A)R_m^{\perp}G)| \longrightarrow 0$, следовательно, $|\mu(T_B(A_{n_k})R_m^{\perp}G|<\frac{\varepsilon}{4}$,
$$|\mu(T_B(A_{n_\ell})R_m^{\perp}G)|<\frac{\varepsilon}{4}$$
при достаточно больших m и любых n_k, n_ℓ. Зафиксируем m, при котором выполнены последние два неравенства и, пользуясь $\sigma(L_1(M),M)$ фундаментальностью последовательности $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, выберем такое K_0, что при K, $\ell\geqslant K_0$ выполнено $|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})G_m)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом $|\mu((A_{n_k}-A_{n_\ell})G)|<\varepsilon$ при K, $\ell\geqslant K_0$, т.е, $\{A_{n_k}\}$ $-\sigma(E, E')$ - фундаментальна. По теореме 2.I существует $A=\sigma(E,E')-\lim\limits_{k\to\infty}A_{n_k}$, $A\in E$.

Итак, мы установили эквивалентность первых шести условий.

$(vii)\Longrightarrow(vi)$. Пусть $B\in K$, $C\in E'$, $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset \mathcal{P}_M$, $R_n\downarrow 0$. Имеем $|\mu(BR_nC)|\leq\int\limits_0\mu_t(B)\mu_t(R_n)\mu_t(C)\,dt$.
Поскольку эквивалентность $(i)\Longleftrightarrow(vi)$ уже установлена, то применяя импликацию $(i)\Longrightarrow(vi)$ к множеству $\widetilde{K}$, получаем, что $\int\limits_0\mu_t(B)\mu_t(R_n)\mu_t(C)\,dt\longrightarrow 0$ при $n\to\infty$, равномерно по $\mu_t(B)$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{B\in K}|\mu(BP_nC)|=0$.

$(v)\Longrightarrow(vii)$. Предположим, что $\widetilde{K}$ не является $\sigma(E(0,1), E'(0,1))$ относительно компактным. Применяя уже доказанную эквивалентность (i) и (v) к множеству $\widetilde{K}$ мы можем утверждать, что тогда существуют $\varepsilon>0$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - измеримые попарно непересекающиеся подмножества отрезка $[0,1]$, $g\in E'(0,1)$, $A_n\in K$ такие, что
$$\int\limits_0^1\mu_t(A_n)\chi_{e_n}g>\varepsilon.$$

Легко видеть, что множества e_n можно выбирать так, что $g\cdot\chi_{e_n}\in L_\infty(0,1)$ и последнее неравенство сохранится при всех $n=1,2,\ldots$.

Дальнейшее доказательство импликации разбивается на два случая: $E\neq L_1(M)$ (и, следовательно, $E'\neq M$ и $E'(0,1)\neq$ $\neq L_\infty(0,1)$) и $E=L_1(M)$. Рассмотрим сначала случай $E\neq L_1(M)$.

<u>Лемма 3.I</u>. Пусть $F(0,1)$ симметричное функциональное пространство на $(0,1)$, такое, что $F(0,1)$ не совпадает с $L_\infty(0,1)$ и в $F(0,1)$ выполнены условия (B) и (C), $f=\widetilde{f}\in F(0,1)$. Тогда для любой последовательности попарно непересекающихся подмножеств $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ отрезка $[0,1]$ таких, что $f\cdot\chi_{e_n}\in L_\infty(0,1)$

$n = 1,2,\ldots$, существует подпоследовательность $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $f_1 \in F(0,1)$ такие, что $\sum_{k=1}^{m} (f\chi_{e_{n_k}})^{\sim} \uparrow f_1$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Положим $n_1 = 1$. Заметим, что условие $F(0,1) \neq L_\infty(0,1)$ обеспечивает непрерывность в нуле фундаментальной функции пространства $F(0,1)$. Пользуясь этим замечанием и ограниченностью функции $f\chi_{e_n}$ можно выбирать e_{n_2} , $e_{n_3}, \ldots$, так чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\|(f\chi_{e_{n_1}})^{\sim} \cdot \chi_{[0,\, mes\, e_{n_2}]}\|_{F(0,1)} < 2^{-1},$$

$$\|(f\chi_{e_{n_2}})^{\sim} \cdot \chi_{[0,\, mes\, e_{n_3}]}\|_{F(0,1)} < 2^{-2}$$

и так далее. Очевидно, что последовательность $\left\{\sum_{k=1}^{m} (f\cdot\chi_{e_{n_k}})^{\sim}\right\}_{m=1}^{\infty}$ возрастает. Кроме того,

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} (f\chi_{e_{n_k}})^{\sim}\right\|_{F(0,1)} \leq \|f\|_{F(0,1)} + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-m} \leq \|f\|_{F(0,1)} + 1.$$

Используя условия (B) и (C), получаем, что $\sum_{k=1}^{m} (f\chi_{e_{n_k}})^{\sim} \uparrow$ к некоторой функции $f_1 \in F(0,1)$. Лемма доказана.

В соответствии с только что доказанной леммой разрядим последовательность $\{e_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g\chi_{e_n})^{\sim} = f \in E'(0,1).$$

Пусть далее $\mathcal{B}_n$ – коммутативные непрерывные подалгебры фон Неймана в M , такие, что $|A_n| \in L_1(\mathcal{B}_n)$. Пространство $L_1(\mathcal{B}_n)$ будем отождествлять с $L_1(\Omega_n, \Sigma_n, \tau_n)$, где $(\Omega_n, \Sigma_n, \tau_n)$ – некоторое непрерывное вероятностное пространство с мерой. Известно, что для любого $x \in L_1(\Omega_n, \Sigma_n, \tau_n)$ найдется сохраняющее меру сюръективное сохраняющее меру отображение φ из Ω_n на $[0,1]$, для которого $|x(\omega)| = \tilde{x}(\varphi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega_n$. Каждое такое отображение порождает изометрический оператор $T_\varphi : L_1(0,1) \to L_1(\Omega_n, \Sigma_n, \tau_n)$, $T_\varphi(f)(\omega) = f(\varphi(\omega))$ и $\tau_n(T_\varphi(f)) = \int_0^1 f$. Обозначим через π_n изометрический оператор из $L_1(0,1)$ в $L_1(\mathcal{B}_n)$ такой, что $\pi_n(\mu_t(A_n)) = |A_n|$ для всех $n = 1,2,\ldots$. Положим $Q_n = \pi_n(\chi_{e_n})$, $D = \pi_n(g)$ (легко видеть, что $Q_n \in \mathcal{P}_M$). Тогда

$$\pi_n(\mu_t(A_n)\chi_{e_n} g) = |A_n|\, Q_n D_n$$

и $\mu(|A_n|Q_n D_n)=\int_0^1 \mu_t(A_n)\chi_{e_n} g$. Имеем $\mu(|A_n|Q_n D_n)=$
$=\mu(u_n A_n Q_n D_n)=\mu(A_n Q_n D_n u_n)=\mu(A_n Q_n C_n)>\varepsilon$,
где $C_n=Q_n D_n u_n$, $u_n\in U_M$, такие, что $|A_n|=u_n A_n$.

Покажем, что найдется такая последовательность $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и последовательность $\{P_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset \mathcal{P}_M$, $P_{n_k}P_{n_\ell}=0$ при $k\neq \ell$, что

$$|\mu(A_{n_k}P_{n_k}C_{n_k})-\mu(A_{n_k}Q_{n_k}C_{n_k})|<2^{-k} \qquad (*)$$

причём $P_{n_k}\subset Q_{n_k}$ для всех $k=1,2,\ldots$. Положим $n_1=1$, $q_m=\bigwedge_{n=m}^\infty Q_n^\perp$. Ясно, что $\mu(q_m^\perp)=\mu((\bigwedge_{n=m}^\infty Q_n^\perp)^\perp)=\mu(\bigvee_{n=m}^\infty Q_n))\to 0$, т.е. $\mu(q_m)\to 1$ при $m\to\infty$. Выберем n_2 так, чтобы $P_{n_1}=q_{n_2}\wedge Q_{n_1}$ удовлетворял неравенство $|\mu(A_{n_1}P_{n_1}C_{n_1})-$ $-\mu(A_{n_1}Q_{n_1}C_{n_1})|<2^{-1}$. Затем, для выбранного номера n_2 выберем такой номер n_3, чтобы $P_{n_2}=q_{n_3}\wedge Q_{n_2}$ удовлетворял неравенству $|\mu(A_{n_2}P_{n_2}C_{n_2})-\mu(A_{n_2}Q_{n_2}C_{n_2})|<2^{-2}$ и т.д.

Для упрощения обозначений мы заменяем двойную индексацию построенных последовательностей на обычную.

Положим теперь $B_k=\sum_{i=1}^k P_i C_i=\sum_{i=1}^k P_i Q_i D_i u_i$.
Покажем, что последовательность $\sum_{i=1}^n P_i C_i$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$, т.е. $\|B_n-B_m\|_1\to 0$ при $n,m\to\infty$. Действительно, считая $n>m$, имеем

$$\|B_n-B_m\|_1\le\sum_{i=m+1}^n\|P_i Q_i D_i u_i\|_1\le\sum_{i=m+1}^n\|D_i Q_i\|_1=$$

$$=\sum_{i=m+1}^n\|\pi_i(\chi_{e_i}g)\|_1=\sum_{i=m+1}^n\int_0^1\chi_{e_i}g\to 0 \quad \text{при } n,m\to\infty.$$

Пусть $B=\|\cdot\|_1-\lim_{n\to\infty}B_n$. Покажем, что $\mu_t(B)\in E'(0,1)$.
Имеем $\mu_t(B_n)\xrightarrow{\|\cdot\|L_1(0,1)}\mu_t(B)$ (см. [10]) и при этом
$\mu_t(B_n)\prec\mu_t(P_1C_1)+\mu_t(P_2C_2)+\cdots+\mu_t(P_nC_n)\le\mu_t(Q_1D_1)+\mu_t(Q_2D_2)+\cdots+$
$+\mu_t(Q_nD_n)=(g\chi_{e_1})^\sim+(g\chi_{e_2})^\sim+\cdots+(g\chi_{e_n})^\sim\le f\in E'(0,1)$.
Поскольку $\mu_t(B_n)\prec f\in E'(0,1)$, то по теореме Фату $\mu_t(B)\prec$ $\prec f\in E'(0,1)$. Поскольку пространство E' (0,1) интерполяционно в паре (L_1 (0,1), L_∞ (0,1)) с интерполяционной константой единица (см. [19, с. 192]), то из соотношения $\mu_t(B)\prec f\in E'(0,1)$ следует, что $\mu_t(B)\in E'(0,1)$, что равносильно $B\in E'$.

Для фиксированного i имеем при $k > i$:

$$|\mu(A_i P_i B)| \geqslant |\mu(A_i P_i B_k)| - |\mu(A_i P_i (B - B_k))| =$$

$$= |\mu(A_i P_i \sum_{j=1}^{k} P_j C_j)| - |\mu(A_i P_i (B - B_k))| =$$

$$= |\mu(A_i P_i C_i)| - |\mu(A_i P_i (B - B_k))|.$$

С другой стороны, $B - B_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} P_i C_i$, $\mu_t(B - B_k) =$

$$= \mu_t\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} P_i C_i\right) < \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu_t(P_i C_i) \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} (g\chi_{e_i})^{\sim}.$$

По лемме 3.I мы можем считать, что $\sum_{i=1}^{\infty} (g\chi_{e_i})^{\sim} = f$, $f \in E'(0,1)$.

Значит $\sum_{i=k+1}^{\infty} (g\chi_{e_i})^{\sim} \downarrow 0$, откуда $|\mu(A_i P_i (B - B_k))| \leqslant$

$$\leqslant \int_0^1 \mu_t(A_i P_i) \sum_{i=k+1}^{\infty} (g\chi_{e_i})^{\sim} \longrightarrow 0$$

при $k \longrightarrow \infty$. Учитывая условие ($*$) и неравенство $\mu(A_i Q_i C_i) < \varepsilon$ получим $|\mu(A_i P_i B)| \geqslant \varepsilon - 2^{-i}$, для всех $i = 1, 2, \ldots$, что противоречит предположению об относительной $\sigma(E, E')$ – компактности множества K .

Осталось рассмотреть случай, когда $E = L_1(M)$. Предположим, что $\widetilde{K}$ не является $\sigma(L_1(0,1), L_\infty(0,1))$ – относительно компактным. Пользуясь предыдущими обозначениями и критерием Такесаки слабой относительной компактности подмножества в предсопряженном пространстве к коммутативной алгебре фон Неймана $L_\infty(0,1)$, мы можем найти последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ и $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P_M$, $\mu(Q_n) \longrightarrow 0$ $(Q_n = \pi(\chi_{e_n}))$, для которых $\mu(A_n Q_n u_n) > \varepsilon > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, где $A_n = u_n |A_n|$ – полярное разложение элемента A_n. Как уже было показано, можно так разрядить последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и найти такие попарно ортогональные проекторы $\{P_n\} \subset P_M$, что $P_n \leqslant Q_n$ и при всех $n = 1, 2, \ldots$, выполнены неравенства

$$|\mu(A_n P_n u_n) - \mu(A_n Q_n u_n)| < \delta_n,$$

где $\delta_n \downarrow 0$, $\delta_1 < \varepsilon/8$. Покажем, что существует такая подпоследовательность $\{P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и проекторы $\{R_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset P_M$, $R_{n_k} \leqslant P_{n_k}$, для которых верно:

$$|\mu(A_{n_k} R_{n_k} u_{n_k}) - \mu(A_{n_k} Q_{n_k} u_{n_k})| < 2\delta_{n_k}$$

и при этом $\{u^*_{n_k} R_{n_k} u_{n_k} = t_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть семейство попарно ортогональных проекторов. Пусть $t'_n = u^*_n P_n u_n$. Ясно, что $\mu(t'_n) \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Положим $n_1 = 1$, $z_m = \bigwedge_{n=m}^{\infty} (t'_n)^{\perp}$. Легко видеть, что можно так разрядить последовательность $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\mu(z_m) \longrightarrow 1$ при $m \to \infty$. Выберем n_2 так, чтобы $t_1 = z_{n_2} \wedge t'_{n_2}$ удовлетворял неравенству $\mu(|A_{n_1}|(u^*_{n_1}(t'_{n_1} - t_1)u_{n_1})) < \delta^2_{n_1}$. Тогда

$$|\mu(P_{n_1} - u_{n_1} t_1 u^*_{n_1})| = |\mu(u_{n_1} t'_{n_1} u^*_{n_1} - u_{n_1} t_1 u^*_{n_1})| < \delta_{n_1}.$$

Положим $R_{n_1} = u_{n_1} t_1 u^*_{n_1}$. Имеем $|\mu(A_{n_1} R_{n_1} u_{n_1}) - \mu(A_{n_1} Q_{n_1} u_{n_1})| \le$

$$\le |\mu(A_{n_1} P_{n_1} u_{n_1}) - \mu(A_{n_1} Q_{n_1} u_{n_1})| + |\mu(A_{n_1} R_{n_1} u_{n_1}) -$$
$$- \mu(A_{n_1} P_{n_1} u_{n_1})| \le \delta_{n_1} + |\mu(|A_{n_1}|(R_{n_1} - P_{n_1}))| < 2\delta_{n_1}.$$

Далее, определим $t_2 = z_{n_3} \wedge t'_{n_2}$ так, что для номера n_3 выполнено $\mu(|A_{n_2}|(u_{n_2}(t_{n_2} - t_2)u^*_{n_2})) < \delta_{n_2}$.

Тогда $|\mu(A_{n_2} R_{n_2} u_{n_2}) - \mu(A_{n_2} Q_{n_2} u_{n_2})| < 2\delta_{n_2}$ и так далее.

Проекторы $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно ортогональны по построению. Осталось заметить, что $t_k \le t'_{n_k} = u^*_{n_k} P_{n_k} u_{n_k}$ и, следовательно, $R_{n_k} = u_{n_k} t_k u^*_{n_k} \le P_{n_k}$. Отсюда, в частности следует, что R_{n_k} попарно ортогональны.

Пусть $B_m = \sum_{k=1}^{m} R_{n_k} u_{n_k}$. Тогда при $\ell < m$ имеем

$$\| |B_m - B_\ell| \|_1 = \| | \sum_{k=\ell+1}^{m} R_{n_k} u_{n_k} | \|_1 = \| \sum_{k=\ell+1}^{m} u^*_{n_k} R_{n_k} u_{n_k} \|_1 =$$
$$= \| \sum_{k=\ell+1}^{m} t_k \|_1 \longrightarrow 0$$

при $\ell, m \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ – $\|\cdot\|_1$ – фундаментальна. Пусть $B = \|\cdot\|_1 - \lim_{m\to\infty} B_m$. Тогда $|B| = \|\cdot\|_1 - \lim_{m\to\infty} |B_m|$ (см. [3], [15]). Поскольку проекторы t_k попарно ортогональны, получаем $|B| \in M$, откуда $B \in M$.

Для фиксированного i имеем:

$$R_{n_i} B = \|\cdot\|_1 - \lim_{m\to\infty} \left(R_{n_i} \sum_{k=1}^{m} R_{n_k} u_{n_k} \right) = R_{n_i} u_i .$$

Поэтому $|\mu(A_{n_i}R_{n_i}B)| = |\mu(A_{n_i}R_{n_i}u_{n_i})| \geqslant$

$$\geqslant |\mu(A_{n_i}Q_{n_i}u_{n_i})| - |\mu(A_{n_i}Q_{n_i}u_{n_i}) - \mu(A_{n_i}R_{n_i}u_{n_i})| > \varepsilon - 2\delta_n,$$

что противоречит условию (V).

Для завершения доказательства теоремы осталось показать эквивалентность трёх последних условий: (vii), (viii), (ix).

(vii) $\Longrightarrow$ (ix). Обозначим символом $\mathcal{D}_{(0,1)}$ множество всех допустимых операторов из пары (L_1 (0,I), L_∞ (0,I)) в себя. Учитывая, что $T \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ тогда и только тогда, когда $T_f \prec f$ для всех $f \in L_1(0,I)$ и $T \in \mathcal{D}_{M \to M}$ тогда и только тогда, когда $Tx \prec x$ для всех $x \in L_1(M)$ (см. [I6], [9]) характеристику соотношения $x \prec y$ (см. п. I), а также то, что алгебра M – непрерывна легко проверяется следующее равенство:

$$\widetilde{\mathcal{D}_{M \to M}(K)} = \widetilde{\mathcal{D}_{(0,1)}(\widetilde{K})}.$$

В силу условия (vii) множество $\widetilde{K}$ – $\sigma(E\ (0,I), E'(0,1))$ – относительно компактно, и значит, (см. [11]) $\mathcal{D}_{(0,1)}(\widetilde{K})$.

Следовательно, σ (E (0,I), E' (0,I)) относительно компактно также множество $\widetilde{\mathcal{D}_{M\to M}(K)} = \widetilde{\mathcal{D}_{(0,1)}(\widetilde{K})}$ Учитывая эквивалентность (i) $\Longleftrightarrow$ (vii), получим, что $\mathcal{D}_{M\to M}$ (K) σ(E ,E') – относительно компактно.

Импликация (ix) $\Longrightarrow$ (viii) очевидна, поскольку $\mathcal{D}_{M\to B}(K) \subset \mathcal{D}_{M\to M}(K)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (vii). Если $\mathcal{D}_{M\to B}(K)$ – σ (E ,E') – относительно компактно, то в силу эквивалентности (i) $\Longleftrightarrow$ (vii) множество $\widetilde{\mathcal{D}_{M\to B}}$ (K) – σ (E (0,I), E' (0,I)) – относительно компактно. Осталось заметить, что $\widetilde{\mathcal{D}_{M\to B}(K)} \supset \widetilde{K}$ компактно (последнее включение вытекает из того факта, что для любых двух операторов A и B из L_1(M), таких, что $\mu_t(A) = \mu_t(B)$, $t > 0$ найдется $T \in \mathcal{D}_{M\to M}$ что $T(A) = B$, а также из непрерывности алгебр M и B).

Следствие 3.1. Для любого оператора $T \in E$ (M) множество $\mathcal{D}_{M\to M}(T)$ – σ (E , E') – компактно.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 , множество

$\mathcal{D}_{M\to M}(T)$ – $\sigma(E, E')$ – относительно компактно. Замкнутость этого множества в $\sigma(E, E')$ топологии следует из $\sigma(L_1(M), M)$ замкнутости этого множества (см. [16], [9]).

Следствие. 3.2. Из любой последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E(M)$ таких, что $\mu_t(A_i) = \mu_t(A_j)$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots$ можно выделить $\sigma(E, E')$ сходящуюся подпоследовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal I.E. A non-commutative extension of abstract integration. Ann. of Math. 1953. v. 57. P. 401-457.

2. Takesaki M. Theory of operator algebras, I. New York. Springer. 1979. 415 p.

3. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators. Pacific. J. Math. 1986. v. 123. P. 269-300.

4. Yeadon F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras, II. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1980. P. 135-147.

5. Yeadon F.J. Non-commutative Lp-spaces. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 175. v. 77. P. 91-102.

6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, I. Springer. Berlin. 1977. 90 p.

7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, II. Springer. Berlin. 1979. 243 p.

8. Dodds P.G., Lennard C.J. Normality in trace ideals. J. Operator Theory. 1986. v. 16. P. 127-145.

9. Dodds P.G., Dodds T.K.-Y., Pagter B. Remarks on Non-Commutative Interpolation Preprint.

10. Dodds P.G., Dodds T.K.-Y., Pagter B. Non-commutative Banach Function Spaces. Math. Z. v. 201. P. 583-597. 1989.

11. Fremlin D.H. Stable subspaces of $L_1 + L_\infty$. Proc. Camb. Phil. Soc. v. 64. P. 625-643. 1968

12. Fremlin D.H. Abstract Köthe space. Proc. Camb. Phil. Soc. v. 63. P. 653-660. 1967.

13. Крыгин А.В., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Крайние точки выпуклых вполне симметричных подмножеств измеримых операторов. Деп. ВИНИТИ. № 4028-В89. 50 с.

14. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Слабая сходимость в некоммутативных симметричных пространствах. Деп. ВИНИТИ. № 2028-В90. 39 с.

15. Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Критерий сходимости в правильных некоммутативных симметричных пространствах. ИАН УзССР. 1990. № 4. С. 34-39.

16. Сукочев Ф.А. Симметричные пространства измеримых операторов на конечных алгебрах фон Неймана. Дисс. канд. физ.-мат.наук. Ташкент. ТашГУ. 1987. 124 с.

17. Сукочев Ф.А. Порядковые свойства норм симметричных пространств измеримых операторов. "Математический анализ и теория вероятности". Сб. науч.трудов ТашГУ. 1985. С. 49-54.

18. Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов. Дисс. канд. физ.-мат.наук. Ташкент. ТашГУ. 1979. 133 с.

19. Крейн С.Г., Петунин Ю.Н., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука. 1978. 400 с.

20. Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984. 752 с.

21. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир. 1967. 258 с.

22. Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я. Банаховы решётки - некоторые банаховы аспекты теории. УМН. 1979. т. 34. Вып. 2(206). С. 137-183.

23. Овчинников В.И. О s - числах измеримых операторов / Функц. Анализ и его прил. 1970. Т. 4. Вып. 3. С. 78-85.

24. Меклер А.А. Операторы усреднения по σ -подалгебрам в идеалах пространства $L_1(\mu)$. Дисс. кан. физ.-мат.наук. Ленинград. ЛИАП. 1977. 96 с.

25. Крейн С.Г. (редактор). Функциональный анализ. СМБ. М.: Наука. 1972. 544 с.