837. 中野氏ノ談話ニツイテ

角谷　静夫（阪大）

P, Q ヲ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ二ツノ Projection トスルトキ（必ズシモ $PQ=QP$ デナイトスル）$\lim_{n\to\infty}(PQ)^n=R$ ガ strongly ニ存在シテ、シカモ R ガ P 及ビ Q ノ定メル Manifold $\mathfrak{M}_P$, $\mathfrak{M}_Q$ ノ共通部分 $\mathfrak{M}_P\cdot\mathfrak{M}_Q=\mathfrak{M}_R$ ヘノ projection ニナッテヰルコトヲ中野氏ガ証明サレタ。中野氏ハコノ定理ヲ Hermitian operator ニ関スル spectral representation ヲ使ッテ証明サレタ。本談話ニ於テハ spectral representation ヲ使ハナイ証明ヲ与ヘヨウ。

先ヅ最初ニ $\mathfrak{M}_P\cdot\mathfrak{M}_Q=0$ ナル場合ニ $(PQ)^n\to 0$ (strongly) トナルコトヲ証明スレバ十分デアルコトニ注意スル.

コレヲ示スタメニ $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = \mathfrak{M}_R$ トオキ $\mathfrak{M}_R$ ヘノ projection ヲ R トスレバ $RP = PR = RQ = QR = R^2 = R$ デアル。ヨツテ $(PQ)^n = (R + (PQ - R))^n = (R + (P-R)(Q-R))^n$
$= R + ((P-R)(Q-R))^{n'}$

然ルニ $\mathfrak{M}_{P-R} \cdot \mathfrak{M}_{Q-R} = 0$ ナル故 $\underline{((P-R)(Q-R))^n \to 0}$ (strongly) ニヨツテ $(PQ)^n \to R$ (strongly).

次ニ $\underline{\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = 0 \text{ ナルトキ } (PQ)^n \to 0 \text{ (strongly)}}$ トナルコトヲ証明シヨウ. 任意ノ $x \in \mathfrak{H}$ ニ対シテ $(PQ)^n x = x_n$, $Q(PQ)^n x \equiv Qx_n = x'_n$ トオク.
$\|x_n\| \geqq \|x'_n\| \geqq \|x_{n+1}\|$ デアル. 先ヅ $\underline{x_n \to 0 \text{ (weakly)}}$ ナルコトヲ証明スル。$\mathfrak{H}$ ハ locally weakly compact デアルカラ、コレヲ示スニハ任意ノ $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ガ弱収斂シタトキソノ極限 $\bar{x}$ ガ 0 以外デハアリ得ヌコトヲ示セバヨイ。然ルニ $x_{n_\nu} \to \bar{x}$ (weakly) ナラバ $x_{n_\nu+1} = PQx_{n_\nu} \to PQ\bar{x}$ (weakly) ニテ且ツ $\|x_{n_\nu} - x_{n_\nu+1}\|^2 \leqq (\|x_{n_\nu} - x'_{n_\nu}\| + \|x'_{n_\nu} - x_{n_\nu+1}\|)^2$

$$\leqq 2(\|x_{n_\nu} - x'_{n_\nu}\|^2 + \|x'_{n_\nu} - x_{n_\nu+1}\|^2)$$

$$= 2(\|x_{n_\nu}\|^2 - \|x'_{n_\nu}\|^2 + \|x'_{n_\nu}\|^2 - \|x_{n_\nu+1}\|^2)$$

$$= 2(\|x_{n_\nu}\|^2 - \|x_{n_\nu+1}\|^2) \to 0$$

デアルカラ $PQ\bar{x} = \bar{x}$ デナケレバナラヌ. コレヨリ $P\bar{x} = Q\bar{x} = \bar{x}$ ヲ得ルカラ $\bar{x} = 0$ デナケレバナラヌ。

コレデ $x_n \to 0$ (weakly) トナルコトガ証明出来 $a^2+(a^2+b)^2+$

又。 $x_n \to 0$ (strongly) トナルコトハ

$$\|x_n\|^2 = ((PQ)^n x, (PQ)^n x) = (x, (QP)^n (PQ)^n x)$$

$$= (x, Q(PQ)^{2n-1} x) = (x, x'_{2n-1}) \to 0$$

トナルコトヨリワカル。

コレデ定理ノ証明ガ終ル。同様ニシテ更ニ任意ノ有限個ノ projection $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$ ニ対シテ $(P_1 P_2 \cdots\cdots P_k)^n \to R$ (weakly) (R ハ $\mathfrak{M}_{P_1} \cdot \mathfrak{M}_{P_2} \cdots\cdots \mathfrak{M}_{P_k} \equiv \mathfrak{M}_R$ ヘノ projection) トナルコトガワカル。シカシコレガ強収斂デオキカヘラレルカドウカハ未ダワカラナイ。