УДК 517.98

А. К. КАРИМОВ

СУБАДДИТИВНЫЕ МЕРЫ НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

Мақолада йордан алгебрасининг идемпотентларида субаддитив ўлчовнинг хоссалари ўрганилган. Ҳақиқий ўзгарувчанли узлуксиз функция субаддитив ўлчов бўйича яқинлашишига нисбатан узлуксиз эканлиги исботланган.

Неассоциативным аналогом классической меры на йордановой алгебре A является отображение m логики идемпотентов ∇ алгебры A в множество $[0, +\infty]$, которое удовлетворяет условию аддитивности, т. е. $m(p \vee q) = m(p) + m(q)$ для ортогональных идемпотентов p и q из ∇.

В классическом случае из аддитивности следует субаддитивность. В неассоциативном случае из аддитивности не следует субаддитивность, т. е. для любых $p, q \in \nabla$ неравенство $m(p \vee q) \leqslant m(p) + m(q)$ не всегда верно. Но в неассоциативной теории интегрирования [1] в качестве меры m часто берется след, поэтому m удовлетворяет условию субаддитивности, так как меры эквивалентных идемпотентов равны и, следовательно,

$$m(p \vee q) = m(p \vee q - q) + m(q) = m(p - p \wedge q) + m(q) \leqslant m(p) + m(q).$$

Возникает вопрос, можно ли построить теорию интегрирования на A, не требуя аддитивности меры, а потребовав вместо этого субаддитивность и условие равенства меры на эквивалентных идемпотентах (ср. [2]). В настоящей статье этот вопрос изучается в части, касающейся сходимости по мере, а именно, сходимость по субаддитивной мере, и доказывается, что любая действительная непрерывная функция является непрерывной в сходимости по субаддитивной мере.

Пусть A—JBW-алгебра, $S(A)$—OJ-алгебра локально измеримых элементов, присоединенных к A [2], ∇ — логика идемпотентов.

Определение 1 (ср. [3]). Отображение $m:\nabla\to[0, +\infty]$ называется субаддитивной мерой на A, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$1)\ m(\theta)=0,\ m(p)=0\Rightarrow p=\theta,$$

$$2)\ p\lesssim q\Rightarrow m(p)\leqslant m(q),$$

$$3)\ p\sim q\Rightarrow m(p)=m(q),$$

$$4)\ m(p\vee q)\leqslant m(p)+m(q),$$

$$5)\ p_n\uparrow p\Rightarrow m(p_n)\to m(p).$$

Пример. Пусть A — произвольная JBW-алгебра, Z — ее центр, отождествленный с алгеброй $L^\infty(\Omega,\mu)$ всех существенно ограниченных измеримых функций на (Ω,μ), $d:\nabla\to Z_+$ — центрозначный след на A.

Рассмотрим функционал $\gamma: Z_+\to[0, +\infty]$ со следующими свойствами: для любых $\varphi,\ \psi\in Z_+$

$$1)\ \gamma(0)=0,\ \gamma(\varphi)=0\Rightarrow\varphi=0,$$

$$2)\ \varphi\leqslant\psi\Rightarrow\gamma(\varphi)\leqslant\gamma(\psi),$$

$$3)\ \gamma(\varphi+\psi)\leqslant\gamma(\varphi)+\gamma(\psi),$$

$$4)\ \varphi_n\uparrow\varphi\Rightarrow\gamma(\varphi_n)\uparrow\gamma(\varphi)\quad\varphi,\ \varphi_n\in Z_+\ (n=1, 2, \ldots).$$

Если для любого $p\in\nabla$ положим $m(p)=\gamma(d(p))$, то очевидно, что m является субаддитивной мерой на A. Более того, если алгебра A является алгеброй типа II_1, то любая субаддитивная мера на A имеет такой вид. В самом деле, достаточно определить γ следующим образом:

$$\gamma(f)=\begin{cases} m(p), & \text{если } f=d(p),\ 0\leqslant f\leqslant 1,\\ m(1) & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Пусть m — субаддитивная мера на A.

Определение 2. Элемент x OJ-алгебры $S(A)$ назовем m-измеримым, если в спектральном разложении $x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda de_\lambda$ идемпотенты $e_\lambda^\perp$ и $e_{-\lambda}$ имеют конечную меру, т. е. $m\left(e_\lambda^\perp\right)<\infty$ и $m(e_{-\lambda})<\infty$ при некотором λ. Через $K(A)$ обозначим множество всех m-измеримых элементов из $S(A)$.

Определение 3. Для любого m-измеримого элемента a из $K(A)$ определим функцию

$$a(\alpha)=\inf\left\{\lambda\in[0, +\infty]: m\left(e_\lambda^\perp\right)<\alpha,\ \alpha>0\right\},\ |a|=\int\limits_0^{+\infty}\lambda de_\lambda.$$

Предложение 1. Для любого $a\in K(A)$

$$a(\alpha)=\inf\left\{\|U_p a\|: p\in\nabla,\ m(p^\perp)\leqslant\alpha,\ \alpha>0\right\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$a'(\alpha)=\inf\left\{\|U_p a\|: p\in\nabla,\ m(p^\perp)\leqslant\alpha,\ \alpha>0\right\},$$

$$a(\alpha)=\inf\left\{\lambda\in[0, +\infty]:\ m\left(e_\lambda^\perp\right)\leqslant\alpha,\ \alpha>0\right\}.$$

Покажем справедливость неравенств $a'(\alpha)\geqslant a(\alpha)$, $a'(\alpha)\leqslant a(\alpha)$, из которых следует $a'(\alpha)=a(\alpha)$. Пусть $\lambda=\|U_p a\|<\infty$. Тогда $e_\lambda^\perp\wedge p=\theta$.

Так как для любого n $e_{\lambda+\frac{1}{n}} \geqslant e_\lambda$, то $e^{\perp}_{\lambda+\frac{1}{n}} \wedge p = \theta$ и $e_{\lambda+\frac{1}{n}} \vee p^{\perp} = \mathbf{1}$.

Идемпотенты $e_{\lambda+\frac{1}{n}} \vee p^{\perp} - e_{\lambda+\frac{1}{n}}$ и $p^{\perp} - e_{\lambda+\frac{1}{n}} \wedge p^{\perp}$ эквивалентны через симметрию ([2]), то $e^{\perp}_{\lambda+\frac{1}{n}} \precsim p^{\perp}$. Поскольку $e^{\perp}_{\lambda+\frac{1}{n}} \uparrow e^{\perp}_\lambda$, то и $m\left(e^n_\lambda\right) = \sup\limits_n m\left(e^{\perp}_{\lambda+\frac{1}{n}}\right)$, $m\left(e^{\perp}_\lambda\right) \leqslant m\left(p^{\perp}\right)$, а поскольку $m(p^{\perp}) \leqslant \alpha$, то $m\left(e^{\perp}_\lambda\right) \leqslant \alpha$ $U_{e_\lambda} a\| \leqslant \lambda$. Из этих выкладок получаем равенство $a'(\alpha) = a(\alpha)$.

Предложение 2. Пусть $a \in K(A)$, $e \in \nabla$; тогда

1) $(U_e a)(\alpha) \leqslant a(\alpha)$, $\alpha > 0$,

2) $(a+b)(\alpha+\beta) \leqslant a(\alpha) + b(\beta)$,

3) для $b \in K(A)$ и $0 \leqslant a \leqslant b$, $\alpha > 0$ имеет место $a(\alpha) \leqslant b(\alpha)$.

Доказательство. 1). Так как $U_e a \leqslant a$, то $U_p(U_e a) \leqslant U_p a$. Учитывая предложение 1, имеем $(U_e a)(\alpha) \leqslant a(\alpha)$ для $\alpha > 0$.

2). Существуют идемпотенты e и f, такие, что

$$\left\|U_{e^{\perp}} a\right\| = \alpha \left\|U_{f^{\perp}} b\right\| = \beta,\ m(e) \leqslant \alpha,\ m(f) \leqslant \beta.$$

Пусть

$$g = e \vee f,\ g^{\perp} = \mathbf{1} - e \vee f = e^{\perp} \wedge f^{\perp},$$

тогда

$$\left\|U_{g^{\perp}}(a+b)\right\| = \left\|U_{g^{\perp}} a + U_{g^{\perp}} b\right\| \leqslant \left\|U_{g^{\perp}} a\right\| + \left\|U_{g^{\perp}} b\right\| \leqslant \alpha + \beta,$$

$$m(g) = m(e \vee f) \leqslant m(e) + m(f) \leqslant \alpha + \beta;$$

это и доказывает 2).

Условие 3) следует из предложения 1.

Определение 4. Пусть $a, a_n \in K(A)(n=1, 2, \ldots)$. Назовем $\{a_n\}$ сходящейся по мере к a (обозначим $a_n \to a$ по мере), если для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{e_n\} \subset \nabla$, такая, что $m(e_n) \to 1$ и $\|U_{e_n}(a_n - a)\| < \varepsilon$, начиная с некоторого n.

Предложение 3. Алгебраические операции в A непрерывны относительно сходимости по мере.

Доказательство предложения аналогично случаю следа, полученному в [1].

Теорема 1. Пусть $a, a_n \in K(A)(n=1, 2, \ldots)$ и $\{a_n\}$ сходится по мере к a. Тогда для любой непрерывной функции φ с компактным носителем последовательность $\{\varphi(a_n)\}$ сходится по мере к $\varphi(a)$.

Доказательство. Пусть $a_n \to a$ по мере и φ — непрерывная функция с компактным носителем $M \subset \boldsymbol{R}$ (R — действительная прямая), $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как φ можно равномерно аппроксимировать полиномами на M, то существует полином $P(x)$ на M, такой, что $|\varphi(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in M$. Тогда очевидно, что $\|\varphi(a_n) - P(a_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех n и $\|\varphi(a) - P(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Из предыдущего предложения следует, что $P(a_n) \to P(a)$ по мере. Следовательно, существует последовательность $\{e_n\} \subset \nabla$, такая, что

$\| U_{e_n}(P(a_n) - P(a))\| < \frac{\varepsilon}{3}$, начиная с некоторого n, и $m(e_n) \to 1$. Тогда

$$\| U_{e_n}(\varphi(a_n) - \varphi(a))\| \leqslant \| U_{e_n}(\varphi(a_n) - P(a_n))\| +$$
$$+ \| U_{e_n}(P(a_n) - P(a))\| + \| U_{e_n}(P(a) - \varphi(a))\| < \varepsilon,$$

начиная с некоторого n, т. е. $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ по мере.

Определение 5. Пусть

$$a \in K(A) \text{ и } |a| = \int_0^{+\infty} \lambda de_\lambda .$$

Положим $\rho(a) = \inf\{\varepsilon > 0 : m(1 - e_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$. Легко заметить, что $\rho(a) = \inf\{\varepsilon > 0 : a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$.

Предложение 4. Для любого $a \in K(A)$

$$\rho(a) = \inf\{\varepsilon > 0 : \| U_p a\| \leqslant \varepsilon,\ m(p^\perp \leqslant \varepsilon,\ p \in \nabla).$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \{\varepsilon > 0 : \| U_p a\| \leqslant \varepsilon,\ m(p^\perp) \leqslant \varepsilon, p \in \nabla\}$; тогда существует $q \in \nabla$, $m(q^\perp) \leqslant \lambda$ такой, что $\| U_q a\| \leqslant \lambda$. Это означает, что $\lambda \geqslant \inf\{\varepsilon > 0 : a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$.

Пусть теперь $\lambda' \in \{\varepsilon > 0 : a(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$; тогда существует такой $p \in \nabla$, что $m(p^\perp) \leqslant \lambda'$ $\| U_p a\| \leqslant \lambda'$, т. е. $\lambda' \in \{\varepsilon > 0 : \| U_p a\| \leqslant \varepsilon, m(p^\perp) < \varepsilon\}$ или $\lambda' \geqslant \inf\{\varepsilon > 0 : \| U_p a\| \leqslant \varepsilon,\ m(p^\perp) \leqslant \varepsilon\}$.

Теорема 2. Последовательность $\{a_n\}$ сходится по мере к a тогда и только тогда, когда $(a_n - a)(\alpha) \xrightarrow[n]{} 0$ для всех $\alpha > 0$.

Доказательство. Пусть $a_n \to a$ по мере и $\alpha > 0$; тогда существует последовательность $\{P_n\} \subset \nabla$, такая, что $m(p_n) \to 1$ и $\| U_{P_n}(a_n - a)\| < \alpha$ для достаточно большого n. Отсюда для таких n, $\rho(a_n - a) \leqslant \alpha$, и из того, что функция $a(\alpha)$ убывающая, следует $(a_n - a)(\alpha) \leqslant (a_n - a)(\rho(a_n - a))$.

Теперь докажем, что $a(\rho(a)) \leqslant \rho(a)$ для любого $a \in K(A)$. Пусть $|a| = \int_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$ и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность чисел с условием $m(1 - e_{\varepsilon_n}) \leqslant \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n \downarrow \rho(a)$; тогда $e^\perp_{\varepsilon n} \uparrow e^\perp_{\rho(a)}$ и $m(1 - e_{\varepsilon_n}) \to m(1 - e_{\rho(a)})$. Из свойств ограниченных числовых последовательностей следует, что $m(1 - e_{\rho(a)}) \leqslant \rho(a)$. Это означает, что $a(\rho(a)) \leqslant \rho(a)$; тогда

$$(a_n - a)(\alpha) \leqslant (a_n - a)(\rho(a_n - a)) \leqslant \rho(a_n - a).$$

Отсюда легко заметить, что из $a_n \to a$ по мере следует, что $\rho(a_n - a) \to 0$, поэтому $(a_n - a)(\alpha) \to 0$ при $n \to \infty$. Обратно. Пусть $(a_n - a)(\alpha) \to 0$ при $n \to \infty$ для $\alpha > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N, такое, что при всех $n > N$ $(a_n - a)(\varepsilon) < \varepsilon$, т. е. если $|a_n - a| = \int_0^{+\infty} \lambda de^n_\lambda$, то $\inf\{\lambda > 0 : m(1 - e^n_\lambda) \leqslant \varepsilon\} < \varepsilon$ и $m(1 - e^n_\varepsilon) \leqslant m(1 - e_{(a_n - a)(\varepsilon)})$. Для любого $n > N$ существует последовательность чисел λ_k, такая, что $\lambda_k \downarrow (a_n - a)(\varepsilon)$ и $m(1 - e_{\lambda_k}) \leqslant \varepsilon$; тогда при $k \to \infty$

$m\left(1-e^n_{\lambda_k}\right)\to m\left(1-e_{(a_n-a)(\varepsilon)}\right)$. Отсюда $m\left(1-e^n_{(a_n-a)(\varepsilon)}\right)\leqslant\varepsilon$ и $\left\|U_{e^n_{\varepsilon_n}}(a_n-a)\right\|<\varepsilon$ для достаточно большого n, т. е. $a_n\to a$ по мере.

Предложение 5. Пусть $a_n\to a$ по мере; тогда $m\left(1-e^n_\lambda\right)\to 0$ при $\lambda\to\infty$ равномерно по n, где

$$|a_n|=\int\limits_0^{+\infty}\lambda de^n_\lambda.$$

Доказательство. Докажем, что последовательность $\{a_n(\alpha)\}$ равномерно ограничена по n для любого $\alpha>0$. По теореме 2, $(a_n-a)\left(\frac{\alpha}{2}\right)\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. $\left\{(a_n-a)\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$ ограничена, а по предложению 2, $a_n(\alpha)=(a_n-a+a)\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\leqslant(a_n-a)\left(\frac{\alpha}{2}\right)+a\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n(\alpha)\}$ ограничена, т. е. существует такое число $k>0$, что для всех n $a_n(\alpha)<k$. Другими словами, для любого $\varepsilon>0$ существует $k>0$, такое, что $m\left(1-e^n_k\right)<\varepsilon$ для всех n. Тогда при всех $k_1>k$ $m\left(1-e^n_{k_1}\right)<\varepsilon$ для любого n. Это означает, что $m\left(1-e^n_\lambda\right)\to 0$ при $\lambda\to\infty$ равномерно по n.

Теорема 3. Пусть f — действительная непрерывная на R функция. Если a, $a_n\in K(A)$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $a_n\to a$ по мере, то $f(a_n)\to f(a)$ по мере.

Доказательство. Пусть $a_n\to a$ по мере, тогда, по предложению 5, существует $\mu>0$, такое, что

$$m\left(1-e^n_\mu\right)<\frac{\alpha}{3}\ m\left(1-e_\mu\right)<\frac{\alpha}{3},$$

где

$$|a|=\int\limits_0^{+\infty}\lambda de_\lambda,\ |a_n|=\int\limits_0^{+\infty}\lambda de^n_\lambda.$$

Существует непрерывная функция f_1 на R, совпадающая с f на $[-\mu,\mu]$, и $f_1(\lambda)=0$, если $\lambda\in[-\mu,\mu]$. Положим $f_2(\lambda)=f(\lambda)-f_1(\lambda)$. Тогда

$$f(a_n)-f(a)=f_1(a_n)-f_1(a)+f_2(a_n)-f_2(a),$$

$$[f(a_n)-f(a)](\alpha)\leqslant(f_1(a_n)-f_1(a))\left(\frac{\alpha}{3}\right)+$$

$$+(f_2(a_n))\left(\frac{\alpha}{3}\right)+(f_2(a))\left(\frac{\alpha}{3}\right).$$

Так как $U_{e^n_\mu}f_2(a_n)=0$ при $n=1, 2, \ldots$ и $U_{e_\mu}f_2(a)=0$, то, по предложению 1, $[f_2(a_n)]\left(\frac{\alpha}{3}\right)=0$ и $[f_2(a)]\left(\frac{\alpha}{3}\right)=0$. Согласно теореме 1, $f_1(a_n) \to f_1(a)$ по мере и $[f_1(a_n) - f_1(a)]\left(\frac{\alpha}{3}\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $[f(a_n) - f(a)](\alpha) \to 0$ при $n \to \infty$ и, по теореме 2, $f(a_n) \to f(a)$ по мере. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда m — след, аналоги теоремы 3 получены в работах [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аюпов Ш. А.//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 1. С. 3.
2. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан, 1986. 124 с.
3. Leszek J. Ciach. Subadditive measures on projections of a von Neuman algebra. Dissertationes Mathematical. Warszawa, 1990.
4. Каримов А. К.//Сб. научн. трудов ТашГУ «Математический анализ и геометрия». Ташкент, 1983. С. 39.
5. Тихонов О. Е./Изв. вузов. Сер. матем. 1987. № 1. С. 77.

Андижанский
государственный педагогический институт

Дата поступления
11. 05. 92

SUBADDITIVE MEASURES ON JORDAN ALGEBRAS

A. K. Karimov

(Summary)

Subadditive measures m on idempotent of Jordan algebras are studied. For arbitrary real continuous function the continuity in m convergence is proved.