

Академик М. В. КЕЛДЫШ

**О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ**

1. Все рассматриваемые ниже уравнения в соответствующем пространстве Гильберта могут быть приведены к виду

$$y = L(\lambda)y + f, \quad L(\lambda) = K_0 + \lambda K_1 + \dots + \lambda^n K_n, \quad (1)$$

где y и f — элементы гильбертова пространства, λ — комплексный параметр, K_i — вполне непрерывный оператор.

Вполне непрерывный оператор $R(\lambda)$ есть резольвента $L(\lambda)$, если $(E + R)(E - L) = E$. Если резольвента существует при некотором $\lambda = \lambda_0$, то она на всей плоскости есть мероморфная функция λ . Мы будем говорить, что y есть собственный элемент при собственном значении $\lambda = c$, а y_1, y_2, \dots, y_k — присоединенные к нему элементы, если

$$y = L(c)y, \quad y_k = L(c)y_k + \frac{1}{1!} \frac{\partial L(c)}{\partial c} y_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k L(c)}{\partial c^k} y. \quad (2)$$

Заметим, что если y есть собственный элемент, а y_1, y_2, \dots, y_k — присоединенные к нему элементы, то $y(t) = e^{ct} \left(y_k + y_{k-1} \frac{t}{1!} + \dots + y \frac{t^k}{k!} \right)$ есть решение уравнения $y = K_0 y + K_1 \frac{\partial y}{\partial t} + \dots + K_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n}$.

Если $\lambda = c$ есть полюс резольвенты $R(\lambda)$, то главная часть резольвенты есть сумма слагаемых вида *

$$\frac{y^{(i)} z^{(i)}}{(\lambda - c)^{m_i}} + \frac{y^{(i)} z_1^{(i)} + y_1^{(i)} z^{(i)}}{(\lambda - c)^{m_i - 1}} + \dots + \frac{y^{(i)} z_{m_i - 1}^{(i)} + y_1^{(i)} z_{m_i - 2}^{(i)} + \dots + y_{m_i - 1}^{(i)} z^{(i)}}{\lambda - c}, \quad (3)$$

где $y^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i - 1}^{(i)}$ — собственная функция и присоединенные к ней функции для уравнения (1), а $z^{(i)}, z_1^{(i)}, \dots, z_{m_i - 1}^{(i)}$ — собственная функция и присоединенные к ней функции при $\lambda = \bar{c}$ для сопряженного уравнения $z = L^*(\lambda)z$, где $L^*(\lambda)$ — оператор, сопряженный с $L(\bar{\lambda})$.

Собственные и присоединенные функции, входящие в выражение (3) для полюса резольвенты, при каждом собственном значении могут быть всегда выбраны таким образом, чтобы между всеми собствен-

* Под yz мы понимаем оператор $Af = (f, z)y$.

ными и присоединенными функциями уравнения (1) выполнялись равенства, при $k = 0, 1, \dots, m_i - 1, l = 0, 1, \dots, (m_j - 1)$:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^\nu, z_l^{(j)} \right) + \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{\nu}{1} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^{\nu-1} z_{l-1}^{(j)} \right) + \dots \\ \dots + \left(\sum_{\nu=l}^{n-1} \binom{\nu}{l} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^{\nu-l}, z_l^{(j)} \right) = \delta_{ij} \delta_{k, m_j - l - 1}, \quad (4)$$

где положено

$$(E - L(\lambda)) \left(\frac{y^{(i)}}{(\lambda - c)^{k+1}} + \frac{y_1^{(i)}}{(\lambda - c)^k} + \dots + \frac{y_k^{(i)}}{\lambda - c} \right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} Y_{\nu k}^{(i)} \lambda^\nu. \quad (5)$$

Число N всех собственных и присоединенных функций, соответствующих полюсу резольвенты, мы будем называть кратностью собственного значения. Заметим, что след главной части оператора $\frac{\partial L}{\partial \lambda} R(\lambda)$ для полюса $\lambda = c$ равен $\frac{N}{c - \lambda}$.

Исходя из собственных и присоединенных элементов, удовлетворяющих равенствам (4), мы построим n систем собственных и присоединенных элементов

$$u_{\nu k}^{(i)} = \left[\frac{d^\nu}{dt^\nu} e^{c_i t} \left(y_k^{(i)} + y_{k-1}^{(i)} \frac{t}{1!} + \dots + y_1^{(i)} \frac{t^k}{k!} \right) \right]_{t=0}, \quad \nu = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Определение. Система собственных и присоединенных элементов уравнения (1) называется n -кратно полной, если любая система из n элементов гильбертова пространства f_1, f_2, \dots, f_n может быть представлена как предел линейных комбинаций $f_\nu^{(N)} = \sum_{k=1}^N a_{kN}^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, с коэффициентами, не зависящими от ν .

В частности, при $n = 1$ мы имеем полноту в обычном смысле.

Сделаем еще следующее замечание. Положим

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} Z_{\nu k}^{(i)} \lambda^\nu = L^*(\lambda) \left(\frac{z^{(i)}}{(\lambda - c_i)^{k+1}} + \frac{z_1^{(i)}}{(\lambda - c_i)^k} + \dots + \frac{z_k^{(i)}}{\lambda - c_i} \right),$$

тогда

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (Z_{\nu k}^{(i)}, u_{\nu l}^{(j)}) = \delta_{ij} \delta_{k, m_j - l + 1}.$$

Если имеют место сходящиеся разложения

$$f_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_i - 1} a_k^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

то коэффициенты этих разложений определяются формулами

$$a_k^{(i)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (f_{\nu+1}, Z_{\nu, m_i - k + 1}^{(i)}).$$

Отсюда, в частности, следует, что разложения вида (6) единственны.

2. Назовем оператор H полным, если система его собственных функций $x = \lambda Hx$, $\lambda \neq \infty$, полна.

Теорема 1. Пусть H — полный самосопряженный оператор, некоторая степень которого H^m имеет конечную абсолютную

норму, A — произвольный вполне непрерывный оператор, B_1, B_2, \dots, B_{n-1} — ограниченные операторы.

Система собственных функций уравнения

$$y = (A + \lambda HB_1 + \dots + \lambda^{n-1} HB_{n-1} + \lambda^n H)y, \quad (7)$$

а также сопряженного уравнения, n -кратно полная. Собственные значения уравнений (7) асимптотически приближаются к лучам $\arg \lambda = k\pi/n$.

Заметим, что в условиях теоремы 1 сходимость разложений (6), вообще говоря, не имеет места.

Пусть оператор H положителен. Обозначим через $\varphi(x)$ число собственных значений H , не превышающих x , и пусть $\varphi_n(x) = \varphi(x^n)$; через $\psi_\nu(x)$ обозначим число собственных значений уравнения (7), расположенных в угле $(2\nu - 1)\pi/n < \arg \lambda < (2\nu + 1)\pi/n$ с модулем, не превосходящим x .

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 оператор положителен, то собственные значения уравнения (7) асимптотически приближаются к лучам $\arg \lambda = 2\nu\pi/n$ и при любом $\varepsilon > 0$ существуют сколь угодно большие значения x , для которых удовлетворяется неравенство

$$(1 - \varepsilon)\varphi_n(x) \leq \psi_\nu(x) \leq (1 + \varepsilon)\varphi_n(x).$$

Налагая ограничения на $\varphi(x)$, можно получить более точное предложение.

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 $\varphi_n(x)/\omega(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, где $\omega(x)$ — возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенствам $\alpha\omega(x) < \omega'(x) < \beta\omega(x)$, $\beta < \alpha + 1$, то $\psi_\nu(x)/\varphi_n(x) \rightarrow 1$.

Доказательство этого предложения основывается на следующей теореме тауберова типа.

Теорема 4. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — положительные возрастающие функции, определенные при $x > 0$, причем $\varphi(x) \rightarrow \infty$, $\alpha\varphi(x) < \varphi'(x) < \beta\varphi(x)$ при $\beta < \alpha + 1$, и положим

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(\xi)}{(\xi + x)^{m+1}}, \quad g(x) = \int_0^\infty \frac{d\psi(\xi)}{(\xi + x)^{m+1}},$$

где m есть целая часть β . Если при $x \rightarrow \infty$ имеем $f(x)/g(x) \rightarrow 1$, то $\varphi(x)/\psi(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

3. Приведенные в § 2 результаты могут быть использованы для установления полноты системы собственных функций и для установления асимптотических выражений для собственных значений широких классов несамосопряженных дифференциальных уравнений.

В качестве примера мы рассмотрим уравнения с частными производными эллиптического типа

$$M_\lambda(u) = \sum_{i,k=1}^m p_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^m q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (r_0 + \lambda r_1 + \dots + \lambda^n r_n)u = 0 \quad (8)$$

в области D , удовлетворяющей условиям Ляпунова, коэффициенты которого являются непрерывно дифференцируемыми функциями x_1, x_2, \dots, x_m , причем p_{ik} и r_n действительны и $r_n > \alpha$, $\sum_{i,k} p_{ik} \xi_i \xi_k > \beta \sum_i \xi_i^2$

в D при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема 5. Для уравнения $M_\lambda(u) = 0$ при граничном условии $u = 0$ или $\sum_{i,k} p_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(N, x_k) - \sigma u = 0$, где σ — непрерывная, комп-

лексная функция точки границы области, а N — нормаль к границе D , имеют место следующие утверждения:

1) Система собственных и присоединенных функций n -кратно полная.

2) Собственные значения, расположенные в угле $\frac{2\nu-1}{n} \pi \leq \arg \lambda < \frac{2\nu+1}{n} \pi$, имеют асимптотические выражения

$$\lambda_k^{(\nu)} \sim \left\{ \frac{\sigma_m}{2^m \pi^m} \int_D \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \right\}^{-2/nm} k^{\frac{2}{nm}} e^{\frac{2\nu\pi}{n} i},$$

где σ_m — объем единичной сферы m -мерного пространства и $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_m)$ — определитель $|p_{ik}|$.

Отметим, что при $n=1$ часть теоремы, касающаяся асимптотических выражений собственных значений, была установлена Карлеманом (1).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений в ряде случаев могут быть установлены более точные теоремы.

Рассмотрим уравнение

$$M_\lambda(u) = u^{(m)} + p_1(x, \lambda) u^{(m-1)} + \dots + p_{m-1}(x, \lambda) u' + [p_m(x, \lambda) + \lambda^n] u = 0, \quad (9)$$

где $p_k(x, \lambda)$ — полином от λ степени меньше, чем kn/m .

При некоторых ограничениях на граничные условия можно установить n -кратную полноту системы собственных функций уравнения (9), а при $m \leq n$ — сходимости n -кратных разложений.

Для определенности мы укажем лишь два случая граничных условий:

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \dots, (m-1) \quad (10)$$

и

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^{(\nu)} y^{(k)}(0) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l; \quad \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k^{(\nu)} y^{(k)}(1) = 0, \quad \nu = (l+1), \dots, m, \quad (11)$$

причем $0 < l < m$.

Теорема 6. Система собственных функций уравнения (9) при граничных условиях (10) или (11) n -кратно полная.

При $m > n$ имеют место равномерно сходящиеся разложения

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_k \alpha_k^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

для n произвольных дифференцируемых m раз функций, удовлетворяющих граничным условиям.

При $n=m$ существует подпоследовательность частных сумм разложений (12), которая равномерно сходится.

Отметим, что в случае $n=1$ этот результат получен Биркгофом (2). В случае $n=m$ Я. Д. Тамаркин (3) установил ряд предложений о разложении одной функции в ряд по собственным функциям.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ T. Carleman, Ber. d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, 119 (1936). ² G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 219 (1908). ³ Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, 1917.