Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 IV 1952)

1. Пусть G — компактное множество в n-мерном евклидовом пространстве. Через $\hat{G}$ обозначим топологическое произведение $G \times G$. Пусть, далее, $M_1(u)$ и $M_2(u)$ — две N'-функции ([1], определения см. также [2]), дополнительные к которым будем обозначать через $N_1(u)$ и $N_2(u)$.

В настоящей заметке изучается линейный интегральный оператор

$$Au(x) = \int_G K(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{1}$$

где $K(x, y)$ — измеримая на $\hat{G}$ функция, и выясняется, когда он будет непрерывным (вполне непрерывным) оператором, действующим из одного пространства Орлича $L_{M_1}(G)$ в другое пространство $L_{M_2}(G)$.

Оператор (1) исследовал Заанен [3], которому принадлежит следующая теорема:

Пусть N'-функции $N_1(u)$ и $N_2(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию. Пусть $K(x, y)$ как функция от y почти при всех x принадлежит $L^*_{N_1}(G)$, причем $\| K(x, y)\|_{N_1} = W(x) \in L^*_{M_2}(G)$. Тогда оператор (1) *является вполне непрерывным оператором, действующим из $L^*_{M_1}(G)$ в $L^*_{M_2}(G)$.*

Так как в условии этой теоремы N'-функции удовлетворяют Δ_2-условию, то теорема применима к изучению операторов в узких классах пространств. Кроме этого отметим, что условия теоремы Заанена представляются нам трудно проверяемыми, так как вычисление норм функций в пространствах Орлича, отличных от L^p, практически мало возможно.

2. Теорема 1. *Пусть $\Phi(u)$ — такая N'-функция, что при $u(y) \in L^*_{M_1}(G)$, $v(x) \in L^*_{N_2}(G)$ функция $u(y)\, v(x)$ принадлежит $L^*_{\Phi}(\hat{G})$, причем*

$$\| uv \|_{\Phi} \leqslant C \| u \|_{M_1} \| v \|_{N_2}.$$

Пусть ядро $K(x, y)$ принадлежит пространству $L^*_{\Psi}(\hat{G})$ (суммируемо с функцией $\Psi(u)$ после умножения на некоторую постоянную), где $\Psi(u)$ — функция, дополнительная к $\Phi(u)$.

Тогда оператор (1) *действует из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *и непрерывен.*

Теорема 1 в применениях, конечно, неудобна. Приведем следствия из нее.

Теорема 2. *Оператор* (1) *действует из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *и непрерывен, если* $K(x, y) \in L^*_{\Psi}(\hat{G})$, *если* $\Psi(u) = M_2[N_1(u)]$ *или* $\Psi(u) = N_1[M_2(u)]$.

Теорема 2 в случае, когда рассматривается оператор, действующий в L^2, дает, как легко видеть, слишком ограничительные условия. Теорема 3 для пространств L^p дает более общие условия непрерывности, но, вообще говоря, не является более общим утверждением, чем теорема 2.

Говорят, что N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию [1], если существуют такие постоянные u_0 и Q, что при $u, v \geqslant u_0$

$$|M(uv)| \leqslant QM(u)M(v).$$

Мы будем ниже писать $M(u) > M_1(u)$, если $L^*_{M_1}(G) \supset L^*_M(G)$.

Теорема 3. *Пусть* $\Psi(u)$ — *такая* N'-*функция, дополнительная к которой удовлетворяет* Δ'-*условию, причем* $\Psi(u) > M_2(u)$ *и* $\Psi(u) > N_1(u)$. *Пусть* $K(x, y) \in L^*_{\Psi}(\hat{G})$.

Тогда оператор (1) *действует из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *и непрерывен.*

Для применения теоремы 3 нужно знать, удовлетворяет ли дополнительная к $\Psi(u)$ N'-функция $\Phi(u)$ Δ'-условию. При этом в большинстве случаев функция $\Phi(u)$ в явном виде не может быть найдена и непосредственная проверка выполнимости Δ'-условия невозможна. Нам не удалось найти необходимые и достаточные условия того, что N'-функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, выраженные непосредственно в терминах N'-функции $\Psi(u)$. Приводимая ниже лемма дает легко проверяемый достаточный признак, который оказывается удобным при изучении важных классов пространств Орлича.

Лемма. *Пусть производная* $p(u)$ N'-*функции* $\Psi(u)$ *дифференцируема при больших значениях* u, *причем функция*

$$g(t) = \frac{tp'(t)}{p(t)}$$

при больших значениях t *не убывает.*

Тогда дополнительная к $\Psi(u)$ N'-*функция удовлетворяет* Δ'-*условию.*

Если в условиях леммы функция $g(t)$ не возрастает, то Δ'-условию удовлетворяет сама функция $\Psi(u)$.

Из леммы 1 следует, например, что Δ'-условию удовлетворяет N'-функция, дополнительная к N'-функции $\Psi(u) = e^{u^2} - 1$. Следовательно, для того, чтобы оператор (1) действовал из любого пространства L^p в пространство $L^*_{\Psi}(G)$, в силу теоремы 3 достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_G \int_G e^{K^2(x, y)}\, dx\, dy < \infty.$$

3. Всюду в дальнейшем через $\varkappa_{\mathscr{E}}(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества $\mathscr{E} \subset G$. Будем говорить, что функция $u(x)$ имеет в пространстве $L^*_M(G)$ абсолютно непрерывную норму, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\|u(x)\varkappa_{\mathscr{E}}(x)\|_M < \varepsilon$, коль скоро $\operatorname{mes}\mathscr{E} < \delta$ ($\mathscr{E} \subset G$).

В пространствах Орлича, порожденных функциями, не удовлетворяющими Δ_2-условию, не каждая функция имеет абсолютно непрерывную норму.

Теорема 4. *Действующий из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *оператор* (1) *в условиях теоремы* 1, *теоремы* 2 *или теоремы* 3 *вполне непрерывен, если функция* $K(x, y)$ *имеет в* $L^*_{\Psi}(\hat{G})$ *абсолютно непрерывную норму.*

В приложениях удобны более обозримые следствия из этой теоремы.

Обозначим через E_M замыкание в $L^*_M(G)$ линейного множества ограниченных функций. Нетрудно видеть, что функция $u(x) \in L^*_M(G)$ имеет абсолютно непрерывную норму в том и только в том случае, когда она принадлежит E_M. Очевидно, $E_M \subset L_M$. Если N'-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то множество ограниченных функций нигде не плотно [2] в $L^*_M(G)$ и, следовательно, $E_M \neq L^*_M(G)$. Если же $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M = L_M = L^*_M(G)$.

Поэтому из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Действующий из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *оператор* (1) *в условиях теоремы* 1, *теоремы* 2 *или теоремы* 3 *вполне непрерывен, если* N'-*функция* $\Psi(u)$ *удовлетворяет* Δ_2-*условию.*

Из этой теоремы следует, например, что оператор (1) действует из пространства $L^*_{M_1}(G)$ в пространство $L^*_{M_2}(G)$, где $M_1(u) = e^{|u|} - u - 1$, $M_2(u) = N_1(u) = (|u| + 1)\ln(|u| + 1) - |u|$, и вполне непрерывен, если

$$\int_G \int_G |K(x, y)| \ln^2(|K(x, y)| + 1)\, dx\, dy < \infty.$$

Теорема 4 допускает эквивалентную формулировку.

Теорема 6. *Действующий из* $L^*_{M_1}(G)$ *в* $L^*_{M_2}(G)$ *оператор* (1) *в условиях теоремы* 1, *теоремы* 2 *или теоремы* 3 *вполне непрерывен, если при любом* $\alpha > 0$

$$\int_G \int_G \Psi[\alpha K(x, y)]\, dx\, dy < \infty. \tag{2}$$

Условие (2), в частности, выполняется, если

$$\int_G \int_G \Psi\{Q[K(x, y)]\}\, dx\, dy < \infty,$$

где $Q(u)$ — некоторая N'-функция.

В силу этого из теоремы 6 вытекает, например, что оператор (1) действует в пространстве $L^*_M(G)$, где $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, и вполне непрерывен, если

$$\int_G \int_G e^{|K(x, y)|^{1+\varepsilon}}\, dx\, dy < \infty \quad (\varepsilon > 0).$$

4. В связи с теоремами о компактности операторов естественно возникает вопрос об отыскании достаточно общих признаков компактности семейств функций в пространствах Орлича. Отметим, впрочем, что теоремы предыдущего пункта проще всего доказывать, аппроксимируя изучаемый оператор интегральными операторами с непрерывными ядрами, компактность которых очевидна.

Общераспространенный признак А. Н. Колмогорова [4] компактности семейств функций в пространствах L^p основан на возможности приближений функций семейства ограниченными функциями. Так как множество ограниченных функций нигде не плотно в любом пространстве Орлича, порожденном N'-функцией, не удовлетворяющей Δ_2-условию, то признак А. Н. Колмогорова принципиально не может быть полностью обобщен на произвольные пространства Орлича.

Для случая, когда N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, признак А. Н. Колмогорова на семейства функций в пространстве $L_M^*(G)$ был обобщен Такагаши [5] (без предположения, что $\operatorname{mes} G < \infty$). Для случая пространств Орлича, порожденных N'-функциями, не удовлетворяющими Δ_2-условию, обычное доказательство А. Н. Колмогорова приводит к следующему утверждению.

Теорема 7. *Семейство $\mathfrak{M}$ функций пространства $L_M^*(G)$ компактно в этом пространстве и лежит в E_M тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

а) $\|u\|_M \leqslant C \quad (u(x) \in \mathfrak{M})$;

б) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всех функций* $u(x) \in \mathfrak{M}$ *из условия* $r < \delta$ *следует*

$$\|u_r - u\|_M < \varepsilon.$$

Через $u_r(x)$ здесь обозначена функция Стеклова

$$u_r(x) = \frac{1}{m_r} \int\limits_{T_r(x)} u(t)\,dt \quad (x \in G),$$

где $T_r(x)$ — шар радиуса r с центром в точке $x \in G$, m_r — объем шара $T_r(x)$, причем $u(t) = 0$ при $t \bar{\in} G$.

Второй признак компактности семейства функций в пространствах Орлича (ср. [6], лемма 1) также относится фактически к семействам функций, лежащим в E_M.

Будем говорить, что семейство $\mathfrak{M}$ функций $u(x) \in L_M^*(G)$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $\|u(x)\varkappa_{\mathscr{E}}(x)\|_M < \varepsilon$ для всех $u(x) \in \mathfrak{M}$, если $\operatorname{mes}\mathscr{E} < \delta$ $(\mathscr{E} \subset G)$.

Теорема 8. *Пусть семейство $\mathfrak{M} \subset L_M^*(G)$ имеет в $L_M^*(G)$ равностепенно абсолютно непрерывные нормы и компактно в какомнибудь пространстве Орлича.*

Тогда семейство $\mathfrak{M}$ компактно в $L_M^*(G)$.

Поступило
9 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Z. W. Birnbaum u. W. Orlicz, Studia Math., **3**, 1 (1931). [2] М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, ДАН, **81**, № 4 (1951). [3] A. Zaanen, Ann. of Math., **47**, No. 4 (1946). [4] А. Н. Колмогоров, Göttinger Nachr., 60 (1931). [5] T. Takahashi, Stud. Math., **5**, 141 (1934). [6] М. А. Красносельский, ДАН, **82**, № 3 (1952).

Поправка. В моей статье «Операторы с монотонными минорантами» (ДАН, т. 76, № 4, 1951 г.) приводятся теоремы о существовании собственных функций у положительных операторов на границах некоторых областей банахова пространства. Во всех определениях и утверждениях предполагается, что эти области ограничены (эта оговорка пропущена по моей вине).

М. Красносельский