Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1940. Volume XXVIII, № 1

MATHÉMATIQUES

SUR LA DÉCOMPOSITION MINIMALE D'UNE FONCTIONNELLE LINÉAIRE EN COMPOSANTES POSITIVES

Par M. KREIN

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l'Académie, le 19. IV. 1940)

1. Soit E un certain espace linéaire normé et complet, $\bar{E}$ — l'espace des fonctionnelles linéaires qui lui est conjugué (¹); soit $K \subset E$ un certain ensemble jouissant des propriétés suivantes:

1°. *Si $x \in K$, on a $\lambda x \in K$ pour $\lambda \geqslant 0$.*

2°. *Si $x, y \in K$, on a $x + y \in K$.*

Convenons d'écrire $f_1 < f_2$ ou, ce qui est le même, $f_2 > f_1$ ($f_1, f_2 \in \bar{E}$, $f_1 \neq f_2$) si $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ pour $x \in K$. Les fonctionnelles linéaires $f > \theta$ seront nommées p o s i t i v e s.

Dans notre Note précédente (²) nous avons démontré qu'une fonctionnelle linéaire quelconque $f \in \bar{E}$ admet la décomposition

$$f = g - h, \text{ où } g \geqslant \theta, \quad h \geqslant \theta \tag{1}$$

dans le cas et dans ce cas seulement, où l'ensemble K est un ensemble c o n i q u e n o r m a l, c'est-à-dire quand l'ensemble K jouit non seulement des propriétés 1°, 2°, mais encore de la propriété suivante:

3°. *Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour $x, y \in K$ quelconques, $|x| = |y| = 1$, on a l'inégalité $|x + y| > \delta$.*

La décomposition (1) de la fonctionnelle donnée f sera nommée m i n i m a l e, si dans chaque autre décomposition

$$f = g' - h', \qquad g' \geqslant \theta, \quad h' \geqslant \theta$$

on a nécessairement $g' > g$, donc $h' > h$.

Le problème suivant se pose naturellement.

Quelle est la condition nécessaire et suffisante qu'il faut imposer à un ensemble conique normal pour que chaque fonctionnelle linéaire admette une décomposition minimale?

Nous donnons une solution complète de ce problème pour le cas où K est un c ô n e n o r m a l, c'est-à-dire quand K vérifie les conditions 1°, 2°, 3° et encore la condition

4°. *K possède des points intérieurs.*

Convenons d'écrire $x < y$ ($x \ll y$) ou, ce qui est le même, $y > x$ ($y \gg x$), si $x \neq y$, et $x - y \in K$ ($x - y$ est un élément intérieur à K). Alors notre résultat peut être formulé de la manière suivante:

T h é o r è m e. *Soit K un cône normal. Alors, pour qu'une fonctionnelle linéaire quelconque $f \in \bar{E}$ admette une décomposition minimale, il est nécessaire et suffisant que le cône K jouisse de la propriété suivante:*

(R_1) *Il suit des inégalités* $x \ll {u \atop v}$, $u \gg \theta$, $v \gg \theta$ *l'existence d'un* $y \gg \theta$ *tel que*

$$x \ll y \ll {u \atop v}$$

Il est facile à voir que la propriété (R_1) est équivalente à la suivante:

(R_1') *Si pour 3 éléments quelconques* $x \gg \theta$, $u \gg \theta$, $v \gg \theta$ *on a l'inégalité* $x \ll u+v$, *il existe des* y, z *tels que*

$$x = y+z, \quad \theta \ll y \ll u, \quad \theta \ll z \ll v.$$

Pour démontrer ce théorème nous devons d'abord établir quelques propositions préliminaires.

2. Faisons correspondre à chaque fonctionnelle linéaire $f \in \overline{E}$ une fonctionnelle $g_f(u)$ définie pour $u \gg \theta$ par la formule

$$g_f(u) = \sup_{\theta \ll x \ll u} f(x) \qquad (u \gg \theta). \tag{2}$$

Remarquons que quelle que soit la décomposition de f:

$$f = g_1 - h_1, \quad g_1 \geqslant \theta, \quad h_1 \geqslant \theta, \tag{3}$$

on a toujours

$$g_f(u) \leqslant g_1(u) \quad \text{pour } u \gg \theta. \tag{4}$$

Lemme 1. *Pour* $u \gg \theta$ *et* $\varepsilon > 0$ *donnés il existe une décomposition* (1) *pour laquelle*

$$g(u) \leqslant g_f(u) + \varepsilon. \tag{5}$$

Démonstration. Choisissons un $\delta > 0$ et < 1 tel que

$$\sup_{-\delta u \ll x \ll u} f(x) < g_f(u) + \varepsilon. \tag{6}$$

Désignons par $E^{(2)}$ le produit métrique de E par lui-même [voir Banach ([1]), page 182] et par $K^{(2)}$ l'ensemble de $Z = (x, y) \subset E^{(2)}$, pour lesquels $x \in K$, $y \in K$. Il est facile à voir que $K^{(2)}$ est un cône normal dans $E^{(2)}$.

Posons $V = (u, \delta u)$ et désignons par G l'ensemble linéaire de tous les éléments $Z \in E^{(2)}$ de la forme

$$Z = tV - X, \quad \text{où } -\infty < t < \infty, \quad X = (x, -x) \ (x \in E).$$

Définissons dans l'espace $G \subset E^{(2)}$ une fonctionnelle $F(Z)$ en posant

$$F(Z) = [g_f(u) + \varepsilon]\, t - f(x). \tag{7}$$

Si $Z = tV - X$ est un élément intérieur à $K^{(2)}$, on a $tu - x \gg \theta$, $\delta tu + x \gg \theta$, ou bien $-\delta tu \ll x \ll tu$; donc, $t > 0$ et en vertu de (6)

$$f(x) < t\,[g(u) + \varepsilon], \text{ c'est-a-dire } F(Z) > 0.$$

Mais alors la fonctionnelle $F(Z)$ $(Z \in G)$ peut être étendue à tout l'espace $E^{(2)}$ de sorte qu'elle conserve l'additivité et qu'elle reste positive ($F(Z) > 0$ pour $Z \gg \theta$), donc qu'elle reste linéaire [voir le recueil des travaux d'Akhieser-Krein ([3]), page 154].

Posons ensuite

$$g(x) = F(X') \quad \text{et} \quad h(x) = F(X'') \tag{8}$$

où $X' = (x, \theta)$, $X'' = (\theta, x)$ $(x \in E)$. Il est évident que les fonctionnelles g et h sont linéaires, positives et que d'ailleurs

$$f(x) = F(X) = F(X') - F(X'') = g(x) - h(x).$$

En remarquant ensuite qu'en vertu de (8) et (7)

$$F(V)=g(u)+\delta h(u)=g_f(u)+\varepsilon$$

nous arrivons à (5).

3. Lemme 2. *Pour qu'une fonctionnelle linéaire f admette une décomposition minimale, il est nécessaire et suffisant que la fonctionnelle $g_f(u)$ soit additive*:

$$g_f(u+v)=g_f(u)+g_f(v) \quad (u \gg \theta, \quad v \gg \theta). \tag{9}$$

Démonstration. En rappelant que (3) entraîne (4), on déduit du lemme 1 que si $f=g-h$ est la décomposition minimale d'une certaine fonctionnelle $f \in \overline{E}$, on a $g_f(u)=g(u)$ pour $u \gg \theta$. La nécessité de la condition (9) en résulte.

Pour démontrer la suffisance de cette condition, remarquons qu'un élément x quelconque admet la représentation

$$x=u_x-v_x, \quad \text{où } u_x \gg \theta, \quad v_x \gg \theta.$$

En vertu de (8) l'égalité

$$g(x)=g_f(u_x)-g_f(v_x)$$

détermine d'une manière unique une certaine fonctionnelle additive $g(x)$. Comme d'ailleurs $g(x) \geqslant 0$ pour $x \gg \theta$, on voit que $g(x)$ est une fonctionnelle linéaire [voir ([3]), page 154]. Posons $h=g-f$; alors

$$h(u)=g(u)-f(u)=g_f(u)-h(u) \geqslant 0 \quad \text{pour } u \gg \theta.$$

Donc, $h \geqslant \theta$. Comme (3) entraîne (4), nous concluons que la décomposition obtenue $f=g-h$ est minimale.

4. Démonstration de la nécessité des conditions du théorème. Pour chaque $u \gg \theta$ désignons par Q_u l'ensemble des x pour lesquels $\theta \ll x \ll u$. Alors la condition (R_1) exprime ce fait que pour $u \gg \theta$ et $v \gg \theta$ quelconques

$$Q_{u+v}=Q_u+Q_v \tag{10}$$

où Q_u+Q_v désigne l'ensemble de tous les $z=x+y$ possibles, où $x \in Q_u$, $y \in Q_v$.

Il est évident que l'on a toujours $Q_u+Q_v \subset Q_{u+v}$. Il est d'ailleurs facile à voir que les ensembles Q_u, Q_v, Q_{u+v}, Q_u+Q_v sont convexes, ouverts et bornés (ce dernier fait résulte de ce que K est un cône normal).

Supposons que pour certains $u \gg \theta$ et $v \gg \theta$ (10) n'a pas lieu. Il existe alors un élément $x_0 \in Q_{u+v}$ qui est situé hors de la fermeture de l'ensemble Q_u+Q_v; donc, en vertu du théorème d'Ascoli-Mazur [voir ([4]), page 74] il existe une fonctionnelle $f_0 \in \overline{E}$ telle que

$$\sup_{x \in Q_u+Q_v} f_0(x) < f_0(x_0) \leqslant \sup_{x \in Q_{u+v}} f_0(x).$$

Mais en nous rappelant de la définition (2) de la fonctionnelle g_f, nous voyons que cette dernière inégalité ne signifie rien d'autre que

$$g_{f_0}(u)+g_{f_0}(v) < g_{f_0}(u+v).$$

Donc, en vertu du lemme 2, la fonctionnelle f_0 n'admet pas de décomposition minimale.

5. Démonstration de la suffisance des conditions du théorème. Soit $\mathfrak{M} \subset \overline{E}$ un certain ensemble fini ou infini de fonctionnelles linéaires et qui possède une majorante, c'est-à-dire tel qu'il existe un élément $g_0 \in \overline{E}$ tel que $f < g_0$ pour $f \in \mathfrak{M}$. Si parmi les majorantes $\mathfrak{M}$ il existe la majorante minimale, nous l'appellerons borne

supérieure de l'ensemble $\mathfrak{M}$ et nous la désignerons par sup $\mathfrak{M}$. Il est évident que $f=g-h$ est la décomposition minimale de la fonctionnelle donnée $f \in \bar{E}$ dans le cas et dans ce cas seulement, où $g = \sup(f, \theta)$.

Montrons qu'il suit des résultats de F. Riesz ([5], [6]) que si la condition (R_1) est remplie on a:

A. *Chaque ensemble* $\mathfrak{M} \subset E$ *ayant une certaine majorante* g_0 *possède une borne supérieure.*

En effet, posons pour $x \gg \theta$

$$g(x) = \sup\{f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_m(x_m)\}, \tag{11}$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_m$ $(m=1, 2, \ldots)$ sont des éléments arbitraires de $\mathfrak{M}$, et $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ est une décomposition arbitraire de l'élément x en composantes $x_i \gg \theta$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ainsi que F. Riesz ([5], [6]) a démontré [voir aussi ([7])], il suit de la propriété (R_1') que la fonctionnelle $g(x)$ est additive. En posant pour $x \gg \theta$, $y \gg \theta$ quelconques $g(x-y) = g(x) - g(y)$, nous obtenons une fonctionnelle additive définie dans tout E. Il est aussi évident que la fonctionnelle additive $\varphi(x) = g_0(x) - g(x)$ est positive, c'est-à-dire que $\varphi(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant \theta$. Il en résulte que φ, donc aussi $g = g_0 - \varphi$, est une fonctionnelle linéaire. D'autre part, il suit de (11) que g n'est pas supérieure à chaque majorante de l'ensemble $\mathfrak{M}$.

Le théorème est démontré.

6. Remarque. Désignons par (R_0) et (R_0') les deux conditions équivalentes entre elles que l'on obtient de (R_1), respectivement de (R_1'), en remplaçant partout le signe $\gg$ par le signe $\geqslant$.

Il est facile à voir que la condition (R_0) entraîne la condition (R_1) (mais pas inversement).

D'autre part, la condition (R_0) est évidemment remplie, si dans E lui-même chaque élément x admet une décomposition minimale, c'est-à-dire

(R) *Chaque élément* $x \in E$ *admet une décomposition* $x = x_+ - x_-$ $(x_+ \geqslant \theta$, $x_- \geqslant \theta)$ *telle que pour chaque autre décomposition* $x = x_1 - x_2$ $(x_1 \geqslant \theta$, $x_2 \geqslant \theta)$ *on a nécessairement* $x_1 > x_+$, *donc* $x_2 > x_-$.

Les conditions (R_0), (R_0') et (R) ont cet avantage qu'elles conservent leurs sens pour les ensembles coniques normaux sans points intérieurs. En utilisant une proposition de V. Šmulian *, il est facile à montrer que dans le cas d'un ensemble conique normal fermé K sans points intérieurs la condition (R) est suffisante pour qu'une fonctionnelle $f \in \bar{E}$ arbitraire admette une décomposition minimale, et même que d'ailleurs la proposition A ait lieu. De même la condition (R_0) est aussi suffisante pour le même but, pourvu que l'ensemble K soit *reproduisant*, c'est-à-dire que chaque élément $x \in E$ admette une décomposition $x = x_1 - x_2$, où $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$.

Remarquons encore que, ainsi qu'il a été démontré récemment par Selim Krein ([8]) et l'auteur, l'espace E, où un cône normal est donné vérifiant la condition (R), est isomorphe à l'espace de toutes les fonctions continues, définies sur un certain ensemble bicompact de Haussdorff.

7. En revenant au cas général d'un cône normal vérifiant la condition (R_1), citons encore les résultats suivants obtenus par S. Krein et l'auteur.

---

* En généralisant une proposition de l'auteur, V. Šmulian a démontré que si un certain ensemble fermé $K \subset E$ jouit des propriétés 1°, 2°, et si d'ailleurs chaque élément $x \in E$ admet la décomposition $x = x_1 - x_2$ $(x, x_2 \in K)$, alors pour chaque $x \in E$ il existe une décomposition $x = x_1' - x_2'$ $(x_1', x_2' \in K)$ telle que $|x_1'| + |x_2'| < C|x|$, où C ne dépend pas de x.

Soit $u \gg \theta$. Introduisons au moyen de u une norme nouvelle $|x|_u$ topologiquement équivalente à celle qui est donnée:

$$|x|_u = \inf t \ (-tu < x < tu)$$

et la norme correspondante $|f|_u$ ($f \in \overline{E}$)

$$|f|_u = \sup \frac{f(x)}{|x|_u} .$$

Désignons par H_u l'ensemble des fonctionnelles positives f vérifiant la condition $|f|_u = f(u) = 1$, et par S_u les points extrémaux de l'ensemble H_u ([8]). On a la proposition suivante:

Soit $f_i \in S_u$ ($i = 1, 2, \ldots, n$); *alors, quels que soient les* c_i ($i = 1, 2, \ldots \ldots n$), *on a*

$$\left| \sum_1^n c_i f_i \right|_u = \sum_1^n |c_i|.$$

C'est pourquoi, si S_u *contient une suite infinie* $\{f_i\}$, $\overline{E}$ *contient un sous-espace linéaire isomorphe à* (l) *et qui est formé de tous les éléments de la forme*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i, \quad \text{où} \ \sum_1^{\infty} |c_i| = \left| \sum_1^{\infty} c_i f_i \right|_u < \infty.$$

Cela étant, si E est régulier, S_u est formé d'un nombre fini de points et donc, en vertu de (12), E est équivalent en norme $|x|_u$ à un certain espace euclidien $\mathcal{E}_n$ de vecteurs ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$); d'ailleurs, $x \gg \theta$ dans le cas et dans ce cas seulement, où le vecteur correspondant de $\mathcal{E}_n$ a toutes les coordonnées $\xi_i > 0$ ($i = 1, 2. \ldots, n$). À propos, cette dernière proposition contient le résultat fondamental de l'article de A. Youdine ([9]).

Université d'État à Odessa.

Manuscrit reçu le 21. IV. 1940.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] M. Krein, C. R. Acad. Sci. URSS, XXVIII, No. 1 (1940). [3] Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах в теории моментов, Харьков (1938). [4] S. Mazur, Studia Math., IV (1933). [5] F. Riesz, Atti del congresso intern. dei Mat., Bologna, III, 143 (1928) (VI). [6] F. Riesz, Ann. of Mathem., **41**, No. 1 (1940). [7] L. V. Kantorovitch, C. R. Acad. Sci. URSS, I (X), No. 7 (84) (1936). [8] Mark and Selim Krein, C. R. Acad. Sci. URSS, XXVII, No. 5 (1940). [9] A. Youdine, ibid., XXIII, No. 5 (1939).