理学硕士学位论文

赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的若干性质

李小彦

哈尔滨理工大学

2010 年 3 月

国内图书分类号：O177.3

理学硕士学位论文

赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的若干性质

硕 士 研究生： 李小彦

导 师： 崔云安

申请学位级别： 理学硕士

学科、专 业： 基础数学

所 在 单 位： 应用科学学院

答 辩 日 期： 2010 年 3 月

授予学位单位： 哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.3

Dissertation for the Master Degree in Science

Some Properties of Orlicz Space Equipped with the p-Amemiya Norm

Candidate:	Li XiaoYan
Supervisor:	Cui YunAn
Academic Degree Applied for:	Master of Science
Specialty:	Pure Mathematics
Date of Oral Examination:	March, 2010
University:	Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《赋p-Amemiya范数Orlicz空间的若干性质》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：李小彦　　　　日期：2010年4月6日

哈尔滨理工大学硕士学位论文使用授权书

《赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的若干性质》系本人在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保密 □，在　　年解密后适用授权书。

不保密 ☑。

(请在以上相应方框内打 √)

作者签名：李小彦　　　　日期：2010年4月6日

导师签名：　　　　日期：2010年4月6日

赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的若干性质

摘　　要

根据各种不同理论和应用的需要，Orlicz 空间有各种不同形式的推广，赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间是其中的一种推广形式。本文对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间，局部凸性，和 H 性质进行了一些研究。本文共分四部分，主要工作总结如下：

首先，回顾了Orlicz 空间理论和广义Orlicz 空间几何学八十多年来的发展历程。评价和总结了前人的主要研究成果，并展示了本文各部分所讨论内容的背景和意义。

其次，研究赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间，有助于我们更好的研究该空间，对偶空间同样是赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间。本文给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间的结构。

再次，局部一致凸性是 Banach 几何中重要的几何性质，许多学者对赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的局部一致凸，弱局部一致凸，紧局部一致凸做了深入的研究，并得到了很多好的结果。在本文中得出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有局部一致凸，弱局部一致凸，紧局部一致凸的判别条件。

最后，H 性质是 Banach 几何中重要的几何性质，H 性质蕴涵了许多好的性质。国内外许多学者对赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质做了深入的研究，并得到了很多好的结果。在本文中得出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有 H 性质的判别条件。

关键词　局部一致凸性；H性质；Orlicz空间；p-Amemiya范数

Some Properties of Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya Norm

Abstract

According to the requirement of various theories and application, there are many generalizations of Orlicz spaces. The Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm is a generalization among the number. Locally convexity, H property and the dual spaces of Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm are studied. This thesis consists of four parts. The main results are as follows:

First of all, it is reviewed that developing course of the theory and geometry of Orlicz spaces during more than 80 years studies. Moreover, the pioneer's main research results are evaluated and summarizied, and the background and significance of each part in this thesis are shown.

Second, the dual spaces of Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm which help us study the space better is studied. The dual space is also an Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm. The structures of the dual spaces of Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm are discussed.

Third, local convexity plays an important role in the geometry of Banach spaces. Many scholars had done an in-depth study of locally uniform rotundity, weakly locally uniform rotundity and compactly locally uniform rotundity of Orlicz spaces equipped with the Luxemburg norm and the Orlicz norm, and have obtained a lot of good results. In this thesis, the necessary and sufficient conditions for locally uniform rotundity, weakly locally uniform rotundity and compactly locally uniform rotundity in Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm are shown.

Finally, H property which implies many good properties, is also important in the geometry of Banach spaces. A good many scholars at home and abroad have done an in-depth study of H property of Orlicz spaces equipped with the

Luxemburg norm and the Orlicz norm, and have got many good results. In this thesis, the necessary and sufficient conditions for H property of Orlicz spaces equipped with the p-Amemiya norm are given.

Keywords locally uniform rotundity, H property, Orlicz space, p-Amemiya norm

目　录

第1章 绪论

1.1 Orlicz 空间理论发展概况

波兰数学家 W. Orlicz 为了解决有关三角级数中问题的需要，联系积分方程的需要，于 1931 年引进了以他的名字命名的 Orlicz 函数类，后形成了 Orlicz 空间，Orlicz 函数空间是 $L_p\left(1 \le p \le \infty\right)$空间的推广，Orlicz 序列空间是 $l_p\left(1 \le p \le \infty\right)$空间的推广。Orlicz 空间空间作为一类具体的 Banach 空间，由于其生成函数的多样性，为 Banach 空间研究准备了巨大的模型库，决定了 Orlicz 空间必定为抽象的 Banach 空间提供众多的实例，甚至为解决一般 Banach 空间的几何理论问题提供研究方法和解题技巧。随着时间的推移 Orlicz 空间几何理论在自身日趋完善，其应用越来越广泛，特别在逼近论、不动点理论及控制论、预报算子理论等理论中。

1932 年 Orlicz 给出了 L_M^o 空间，1936 年给出了 Orlicz 范数的定义[1，2]，日本著名数学家 Nakano 在 1950 年引进了模空间，并对该空间的半序理论进行了研究，从而发展了以 Orlicz 空间为特例的模半序空间理论，其成果收集在他的著作《模半序线性空间》一书中[3]。1955 年，W. A. Luxemburg 在 Orlicz 空间引入与 Orlicz 范数等价的 Luxemburg 范数，并对赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间进行了深入的讨论，推进了 Orlicz 空间理论的研究[4]。同时，M. A. Krasnselskii 和 Ya. B. Rutickii 为了解决非线性分析中若干问题，深入系统的研究了不满足Δ_2条件的 Orlicz 函数生成的 Orlicz 空间理论，在 1958 年出版了第一本 Orlicz 空间理论的专著《凸函数与 Orlicz 空间》，该书总结了前人和他们本人的工作，该书的出版标志 Orlicz 空间理论已经形成[5]。之后，Orlicz 空间理论得到了进一步发展与完善[6-14]。

伴随着 Orlicz 空间理论的发展历程，Orlicz 空间出现了三种范数：Orlicz 范数[1]； Luxemburg 范数[3，4] 和 Amemiya 范数。1951 年 Nakano 讨论了 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的关系，并且得出这两种范数是等价的。Luxemburg-Zaanen[5] 和 Nakano[6] 证明了当 Orlicz 函数 M 为有限值，且当 $u \to \infty$ 时，$\dfrac{M\left(u\right)}{u} \to \infty$，此时 Orlicz 空间中的任意一点的 Orlicz 范数和它的 Amemiya 范数是相等的。

进入上世纪 60 年代，Orlicz 空间理论有了重要的发展，1960 年 T.Ando 给出了 Orlicz 空间上有界线性泛函表达式[8]，1964 年 M. M. Rao 给出了 Orlicz 空间上有界线性泛函表达式[9]，1967 年 V.F.Gaposki 证明了 Orlicz 空间有无条件基的充分必要条件是空间自反[10]，1962 年数学工作者郭大钧给出了 Uryson 算子全连续的充分必要条件[15]，1966 年王廷辅得到了 Orlicz 空间为列紧集的充分必要条件[16]，丁夏畦[17]，N. S. Trudinger[18]则从不同方面推广了 Orlicz 空间理论应用于偏微分方程理论，Sobolev 嵌入定理。

上世纪 70 年代，J. Lindenstrauss 和 L. Tzafriri 用空间引入常数的方法对 Orlicz 序列空间的基和同构问题进行了一系列的讨论，得到了许多重要的结果。之后，1978 年数学工作者吴从炘等给出关于 Orlicz 空间范数计算公式与严格赋范条件[19]。之后，波兰的许多数学工作者进一步研究了模空间的理论和 Orlicz 空间的几何理论。

尤其是上世纪 80 年代后，随着 1983 年吴从炘、王廷辅的《Orlicz 空间及其应用》在中国的出版[20]，1986 年吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文出版了《Orlicz 空间几何理论》[21]，1996 年陈述涛出版《Geometry of Orlicz Spaces》[22]。这三部专著的相继问世，使得 Orlicz 空间理论特别是 Orlicz 空间几何理论得到了极大地丰富，也使 Orlicz 空间理论更加完善、系统化，应用范围更加广泛，为 Orlicz 空间理论这一数学分支注入了生机、活力。这也使中国的哈尔滨成为 Orlicz 空间研究中心之一，获得了不少有价值的成果[23-34]。

从二十世纪三十年代到二十一世纪的今天，在众多数学工作者的坚持努力下，Orlicz 空间理论取得了重要的发展，其内容更加完善，同时不断开拓新的研究方向，进行各种推广和深化，应用范围逐渐扩大，渗透到数学的许多其它分支中。

1.2 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间

根据各种不同理论和应用的需要，Orlicz 空间有各种不同形式的推广。p-Amemiya 范数是 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的推广。2006 年以来崔云安，段丽芬等对赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的几何性质进行了深入的研究[35-39]。但是赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的研究刚刚开始，还有许多性质没有进行研究。赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间是一类具体的 Banach 空间，这类空间不仅包含了 L_p，l_p，$(1 \le p \le \infty)$，及 c_0 等经典空

间，而且 Orlicz 空间成为它的一个特例。对这类空间进行研究，可为抽象的 Banach 空间提供众多的直观材料，刻画赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的几何性质的方法和技巧将为解决一般的 Banach 空间几何问题提供借鉴，因此对赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间几何性质进行研究是十分重要的。

1.3 课题来源

本课题来源于导师崔云安教授的国家自然科学基金项目。

1.4 本文主要研究内容

本文主要研究赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的若干几何性质。

一、赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间。

在本章中，我们根据 *Köthe* 空间性质得到 $\|\cdot\|_{M,p}$ 的对偶范数是 $\|\cdot\|_{N,q}$，及商空间的性质，给出赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的对偶空间结构，并得到对偶空间自反的充要条件，奇异泛函的范数等式。

二、赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的局部凸性。

在本章中，我们根据赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数 Orlicz 空间具有局部一致凸性，弱局部一致凸性，紧局部一致凸性的条件，和刚刚得到的赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间对偶空间结构，给出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有局部一致凸性，弱局部一致凸性，紧局部一致凸性的判别准则。

三、赋 p-Amemiya 范数 Orlic 性空间的 H 性质。

在本章中，我们根据赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数 Orlicz 空间具有 H 性质的条件，和刚刚得到的赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间对偶空间结构，给出该空间具有 H 性质的判别准则。

第2章 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间

2.1 引言

自 1932 年著名波兰数学家 W.Orlicz 引入 Orlicz 空间以来，Orlicz 空间理论因其重要的理论性质和应用价值得到了长足的发展。关于 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间的几何性质研究的已近乎完善。而赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的研究刚刚开始。本文将给出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构。同时给出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间自反的充要条件。下面我们给出一些基本概念：

以 X 表示一个 Banach 空间，$B(X)$，$S(X)$ 分别表示 X 的单位球和单位球面。

定义 **2.1** 映射 $M:R\to[0,\infty)$ 称为 Orlicz 函数是指：M 是偶的，非负连续凸函数，当且仅当 $u=0$ 时，$M(u)=0$，满足 $\lim\limits_{u\to0}\frac{M(u)}{u}=0$ 和 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$ 的 Orlicz 函数称为 N-函数。

定义 Orlicz 函数 $M(u)$ 的余函数 $N(v)$ 为 $N(v)=\sup\{|v|u-M(u):u\geq0\}$。

定义 **2.2** 设 $(G,\sum,\mu)$ 是非原子，完备的测度空间，L^0 是所有定义在 G 上的依测度等价的实值可测函数的全体，对 $\forall x\in L^0$，称

$$\rho_M(x)=\int_G M(x(t))dt$$

为 x 关于 M 的模。

Orlicz 空间

$$L_M^*=\left\{x\in L^0:\exists\lambda>0,\rho_M(\lambda x)<\infty\right\}$$

及其闭子空间

$$E_M^*=\left\{x\in L^0:\forall\lambda>0,\rho_M(\lambda x)<\infty\right\}$$

关于 Orlicz 范数：

$$\|x\|_M=\sup\left\{\left|\int_G x(t)y(t)dt\right|:y\in L_N,\rho_N(y)\leq1\right\}=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\rho_M(kx)\right)$$

Luxemburg 范数：

$$\|x\|_{(M)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right)\le 1\right\}$$

均称为 Banach 空间，简记

$L_M=\left[L_M^*,\|\cdot\|_M\right]$，$E_M=\left[E_M^*,\|\cdot\|_M\right]$，$L_{(M)}=\left[L_M^*,\|\cdot\|_{(M)}\right]$，$E_{(M)}=\left[E_M^*,\|\cdot\|_{(M)}\right]$

在 L_M^* 中引入如下泛函：

$$\|x\|_{M,p}=\begin{cases}\inf\limits_{k>0}k^{-1}\left(1+\rho_M^p(kx)\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \inf\limits_{k>0}k^{-1}\max\{1,\rho(kx)\},p=\infty\end{cases}$$

事实上 $\|x\|_{M,1}=\|x\|_M$，$\|x\|_{M,\infty}=\|x\|_{(M)}$，在文献[38]中已经证明对于任意的 $1\le p\le\infty$，泛函 $\|x\|_{M,p}$ 为 L_M^* 上的范数，且所有的范数是互相等价的，我们称泛函 $\|x\|_{M,p}$ 为 L_M^* 上的 p-Amemiya 范数，赋予该范数的 Orlicz 空间我们记为 $L_{M,p}$，并可以证明该空间为 Banach 空间。

记

$$L_{M,p}=\left[L_M^*,\|\cdot\|_{M,p}\right],\ E_{M,p}=\left[E_M^*,\|\cdot\|_{M,p}\right]$$

定义 **2.3** 称函数 M 满足 Δ_2 条件，如果存在常数 $k\ge 2$ 和 $u_0>0$ 满足

$M(2u)\le kM(u)$，当 $|u|>u_0$ 时。

定义 **2.4** 称 Banach 空间 X 为 *Köthe* 函数空间是指 $X\subset L^0$ 具有如下性质，若 $|x(t)|\le|y(t)|\quad(t\in G,a.e)$ 且 $y\in X$，则 $x\in X$ 且 $\|x\|\le\|y\|$。

定义 **2.5** $x\in X$ 称为具有绝对连续范数是指 $\lim\limits_{\mu e\to 0}\|x\chi_e\|=0$。

记 $X_0=\{x\in X: x\text{具有绝对连续范数}\}$

定义 2.6 如果 X 到 X'' 的自然映射是满射的，则称 X 是自反的，记做 $X=X''$。

引理 **2.1**[22]9 $M\in\Delta_2\Leftrightarrow N\in\nabla_2$。

引理 **2.2**[36]3 $\forall x\in L_M^*$，$\|x\|_{(M)}=\|x\|_{M,\infty}\le\|x\|_{M,p}\le\|x\|_{M,1}=\|x\|_M$。

2.2 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间

令 D 表示 G 上所有有界可测函数。

定理 **2.1** 若 $\rho_M\left(x\right)<\infty$，则 $d\left(x,D\right)\le 1$。

证明 $\forall\varepsilon>0$，选取 $N\in N_+$，当 $n\ge N$ 时，满足 $\rho_M\left(x_n\right)>\rho_M\left(x\right)-\varepsilon$，其中 $x_n=x\cdot\chi_{G_n}$，$G_n=\left\{t\in G,\left|x\left(t\right)\right|\le n\right\}$，因此 $x_n\in D$。

$$d\left(x,D\right)\le\left\|x-x_n\right\|_{M,p}\le$$

$$\left(1+\rho_M\left(x-x_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left(1+\left(\rho_M\left(x\right)-\rho_M\left(x_n\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left(1+\left(\varepsilon\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 1$$

定理 **2.2** $E_{M,p}=\overline{D}$。

证明 $\forall x\in E_{M,p}$，$k\ge 1$，$kx\in E_{M,p}$，由定理 2.1 知 $d\left(kx,D\right)\le 1$，故有 $d\left(x,D\right)\le\dfrac{1}{k}$。由于 k 的任意性。有 $x\in\overline{D}$，故 $E_{M,p}\subseteq\overline{D}$。又 $D\subset E_{M,p}$，$E_{M,p}$ 为 $L_{M,p}$ 的闭子空间。故 $E_{M,p}=\overline{D}$。

定理 **2.3** 下述命题等价

(1) $x\in E_{M,p}$；

(2) $\left\|x-x_n\right\|_{M,p}\to 0\qquad\left(n\to\infty\right)$；

(3) x 具有绝对连续范数。

其中 $x_n=x\cdot\chi_{G_n}$，$G_n=\left\{t\in G,\left|x\left(t\right)\right|\le n\right\}$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)

$\forall\varepsilon>0$，$\rho_M\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)<\infty$，$\exists N\in N_+$，$\forall n>N$ 使得 $\rho_M\left(\dfrac{x-x_n}{\varepsilon}\right)\le 1$。于是有

$$\left\|\frac{x-x_n}{\varepsilon}\right\|_{M,p}\le\left(1+\rho_M\left(\frac{x-x_n}{\varepsilon}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le 2$$

得 $\left\|x-x_n\right\|_{M,p}\to 0$。

(2)$\Rightarrow$(3)

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$，$\forall n>N$，$\left\|x-x_n\right\|_{M,p}<\varepsilon$，$\exists\delta>0$，满足 $\mu e<\delta$ $\left\|x_n\chi_e\right\|_{M,p}<\varepsilon$。有 $\left\|x\chi_e\right\|_{M,p}\le\left\|\left(x-x_n\right)\chi_e\right\|_{M,p}+\left\|x_n\chi_e\right\|_{M,p}<2\varepsilon$。

(3)$\Rightarrow$(1)

$\mu(G\setminus G_n)\to 0$有$\|x-x_n\|_{M,p}=\|x\chi_{G\setminus G_n}\|_{M,p}\to 0$，$x_n\in D$，得$x\in\overline{D}=E_{M,p}$。

定理 **2.4** $\forall f\in\left(L_{M,p}\right)'$，$f$存在唯一分解$f=v+s$其中$v\in L_{N,q}$，$s\in S$。其中$S$为奇异泛函。即$\forall x\in E_{M,p}$，$s(x)=0$。

证明 由商空间的性质知

$$X'=(X_0)'\oplus\left(X/X_0\right)'$$

故

$$\left(L_{M,p}\right)'=\left(E_{M,p}\right)'\oplus\left(L_{M,p}/E_{M,p}\right)'$$

又设

$$\left(L_{M,p}/E_{M,p}\right)'=\left\{f\in\left(L_{M,p}\right)',f\text{是奇异泛函}\right\}=S$$

$\|\cdot\|_{M,p}$ 的 *Köthe* 对偶范数为 $\|\cdot\|_{N,q}$，其中N为M的余N-函数，且q满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。故$\left(E_{M,p}\right)'=L_{N,q}$。

于是$\forall f\in\left(L_{M,p}\right)'$，$f$存在唯一分解$f=v+s$其中$v\in L_{N,q}$，$s\in S$。

定理 **2.5** $L_{M,p}$自反$\Leftrightarrow M\in\Delta_2\cap\nabla_2$。

证明 必要性

由$L_{M,p}$是自反的可知$E_{M,p}$也是自反的。即

$$E_{M,p}=\left(E_{M,p}\right)''$$

又

$$\left(E_{M,p}\right)'=L_{N,q}$$

于是

$$\left(E_{M,p}\right)''=\left(L_{N,q}\right)'=\left(E_{M,p}\right)'\oplus\left(L_{M,p}/E_{M,p}\right)'=L_{M,p}+S=E_{M,p}$$

故 $S=\phi$，$L_{M,p}=E_{M,p}$，由 $S=\phi$ 可知 $M\in\nabla_2$，由 $L_{M,p}=E_{M,p}$ 可知 $M\in\Delta_2$。

充分性

$M\in\Delta_2$可知$L_{M,p}=E_{M,p}$，$\left(L_{M,p}\right)'=\left(E_{M,p}\right)'=L_{N,q}$；

$M \in \nabla_2$ 可知 $L_{N,q} = E_{N,q}$，$\left(L_{N,q}\right)' = \left(E_{N,q}\right)' = L_{M,p}$。

于是 $\left(L_{M,p}\right)'' = L_{M,p}$。故 $L_{M,p}$ 是自反的。

对任意 $f \in \left(L_{M,p}\right)'$，定义

$$\|f\|_{N,q} = \sup\left\{ f(u) : \|u\|_{M,p} = 1 \right\}$$

推论 2.1 $\forall x \in L_{M,p}$，$\|x\|_{M,p} = \sup\left\{ \int_G x(t) y(t) dt; y(t) \in S\left(E_{N,q}\right) \right\}$。

定理 2.6 令 $f \in \left(L_{M,p}\right)'$，则 $\|f\| = \|v\|_{N,q} + \|s\|_{N,q}$。

证明 由定理 2.4 知 $f = v + s$，故 $\|f\| \le \|v\|_{N,q} + \|s\|_{N,q}$。

只须证明反向不等式

$\forall \varepsilon > 0$，取 $x, y \in S\left(L_{M,p}\right)$，满足 $\|v\|_{N,q} - \varepsilon < \int_G x(t) v(t) dt$，$\|s\|_{N,q} - \varepsilon < \langle s, y \rangle$ 不妨设 $x \in S\left(E_{M,p}\right)$，取 $\delta > 0$ 使 $\mu(E) < \delta$ 且 $\int_E x(t) v(t) dt < \varepsilon$。取 $k > 0$，$H = \left\{ t \in G, |y(t)| > k \right\}$，满足 $\mu(H) < \delta$，$\int_H y(t) v(t) dt < \varepsilon$，$\|y \chi_H\|_{M,p} < \varepsilon$。定义 $u(t) = x(t) \cdot \chi_{G/H} + y(t) \chi_H$

于是

$$\|u(t)\|_{M,p} = \left\| x(t) \cdot \chi_{G/H} \right\|_{M,p} + \|y(t) \chi_H\|_{M,p} < 1 + \varepsilon$$

又

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\|f\| \ge f(u) = {} & \\
& f\left(x(t) \cdot \chi_{G/H} + y(t) \chi_H \right) = \\
& \int_{G/H} v(t) x(t) dt + \int_H v(t) y(t) dt + \langle s, y \chi_H \rangle > \\
& \int_G v(t) x(t) dt - \varepsilon - \varepsilon + \langle s, y \rangle > \\
& \|v\|_{N,q} - \varepsilon - 2\varepsilon + \|s\|_{N,q} - \varepsilon = \\
& \|v\|_{N,q} + \|s\|_{N,q} - 4\varepsilon
\end{aligned}$$

由 ε 任意性，有 $\|f\| \ge \|v\|_{N,q} + \|s\|_{N,q}$。故 $\|f\| = \|v\|_{N,q} + \|s\|_{N,q}$。

定理 **2.7** $\forall s\in S$，$\forall q>1$，$\|s\|_{N,q}=\|s\|_{N,1}=\|s\|_{N,\infty}$。

证明 已知$\|s\|_{N,q}=\sup\limits_{u}\dfrac{s(x)}{\|x\|_{M,p}}$，$\|s\|_{(N)}=\|s\|_{N}$，

$$\|s\|_{(N)}=\|s\|_{N,\infty}=\sup_{u}\frac{s(x)}{\|x\|_{M,1}}\le\sup_{u}\frac{s(x)}{\|x\|_{M,p}}\le\sup_{u}\frac{s(x)}{\|x\|_{M,\infty}}=\|s\|_{N,1}=\|s\|_{N}$$

故$\forall q>1$，$\|s\|_{N,q}=\|s\|_{N,1}=\|s\|_{N,\infty}$。

2.3 本章小结

Orlicz 空间的对偶空间结构对于进一步研究 Orlicz 空间的几何性质起着重要的作用，本章根据赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的对偶空间结构，初步的研究了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构，并发现了两个空间的对偶空间结构是很相似的，而且它们的奇异泛函范数是相等的。

第3章 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的局部凸性

3.1 引言

局部一致凸，弱局部一致凸，紧局部一致凸性是 Banach 几何中重要几何性质，具有鲜明的几何意义。对于赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的局部一致凸，弱局部一致凸，紧局部一致凸，王廷辅，陈述涛等数学工作者做了深入的研究，本文给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间具有局部一致凸性，弱局部一致凸，紧局部一致凸性的充要条件。下面给出一些基本定义：

以 X 表示一个 Banach 空间，$B(X)$，$S(X)$ 分别表示 X 的单位球和单位球面。

定义 3.1 $x\in S(X)$ 称为端点是指若 $x=\dfrac{y+z}{2}$，$y,z\in B(X)$，则 $y=z$。若 Banach 空间单位球面上每一点都是端点，则称 X 是严格凸的。

定义 3.2 $x\in S(X)$ 称为(弱，紧)局部一致凸点是指 X 中元列 $\{x_n\}_1^\infty$ 满足 $\|x_n\|=1$，$\|x_n+x\|\to 2$，则 $\|x_n-x\|\to 0$（$x_n-x\xrightarrow{w}0$，$\{x_n\}_1^\infty$ 是相对紧集）。若 Banach 空间单位球面上每一点都是(弱，紧)局部一致凸点，则称 X 是(弱，紧)局部一致凸的。

定义 3.3 设 M 为任意 N-函数，x 为实数，如果对任何两个不同的实数 v,w，只要 $u=\dfrac{v+w}{2}$ 就有 $M(u)<\dfrac{M(v)+M(w)}{2}$。则称 u 为 M 的一个严格凸点。M 的严格凸点全体记为 $SC(M)$。

定义 3.4 设 $(G,\sum,\mu)$ 是非原子，完备的测度空间，L^0 是所有定义在 G 上的依测度等价的实值可测函数的全体，对 $\forall x\in L^0$，称

$$\rho_M(x)=\int_G M(x(t))dt$$

为 x 关于 M 的模。

Orlicz 空间

$$L_M^*=\left\{x\in L^0:\exists\lambda>0,\rho_M(\lambda x)<\infty\right\}$$

及其闭子空间

$$E_M^* = \left\{ x \in L^0 : \forall \lambda > 0, \rho_M\left(\lambda x\right) < \infty \right\}$$

关于 Orlicz 范数：

$$\|x\|_M = \sup\left\{ \left| \int_G x(t)\, y(t) dt \right| : y \in L_N, \rho_N\left(y\right) \le 1 \right\} = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + \rho_M\left(kx\right)\right)$$

Luxemburg 范数：

$$\|x\|_{(M)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1 \right\}$$

p-Amemiya 范数：

$$\|x\|_{M,p} = \begin{cases} \inf\limits_{k>0} k^{-1}\left(1 + \rho_M^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty \\ \inf\limits_{k>0} k^{-1} \max\left\{1, \rho\left(kx\right)\right\}, p = \infty \end{cases}$$

均称为 Banach 空间，简记

$L_M = \left[L_M^*, \|\cdot\|_M \right]$，　$L_{(M)} = \left[L_M^*, \|\cdot\|_{(M)} \right]$，　$L_{M,p} = \left[L_M^*, \|\cdot\|_{M,p} \right]$，

$E_M = \left[E_M^*, \|\cdot\|_M \right]$，　$E_{(M)} = \left[E_M^*, \|\cdot\|_{(M)} \right]$，　$E_{M,p} = \left[E_M^*, \|\cdot\|_{M,p} \right]$

我们再定义如下函数

$$\alpha_p : L_{M,p} \to [-1, \infty]$$

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} \rho_M^{p-1}(x)\rho_N(p_+(|x|)) - 1, 当 1 \le p < \infty \\ -1, \qquad 当 p=\infty,\ \rho_M(x) \le 1 \\ \rho_N(p_+(|x|)), \qquad 当 p=\infty,\ \rho_M(x) > 1 \end{cases}$$

另外，定义

$$k_p^* : L_{M,p} \to [0, \infty),\ k_p^*(x) = \inf\{k > 0 : \alpha_p(kx) \ge 0\} (\inf \varnothing = \infty)$$

$$k_p^{**} : L_{M,p} \to (0, \infty],\ k_p^{**}(x) = \sup\{k > 0 : \alpha_p(kx) \le 0\}$$

已经证明对于任意的 $1 \le p \le \infty$ 和 $x \in L_{M,p}$，我们有 $k_p^*(x) \le k_p^{**}(x)$。记 $K_p(x)$ 为所有的在 $k_p^*(x)$ 和 $k_p^{**}(x)$ 之间的元素构成的集合，也就是说 $K_p(x) = \{0 < k < \infty : k_p^*(x) \le k \le k_p^{**}(x)\}$，$K_p(x) = \varnothing$ 当且仅当 $k_p^*(x) = k_p^{**}(x) = \infty$。

引理 **3.1**[36] $k_p^{**}(x) < \infty$，$\forall k \in \left[k_p^*(x), k_p^{**}(x)\right]$，$\|x\|_{M,p} = k^{-1}\left(1 + \rho_M^p\left(kx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$。

引理 **3.2**[22]1-2 假设 $M\left(u\right)$ 严格凸，对任何 $\left[a,b\right] \subset \left(0,1\right)$ 和 $L, \sigma > 0$ 存在 $\delta > 0$，使得 $\alpha \in \left[a,b\right]$，$\left|u\right| \le L$，$\left|v\right| \le L$，$\left|u - v\right| \ge \sigma$ 蕴涵

$$M\left[\alpha u+(1-\alpha)v\right]\le(1-\delta)\left[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)\right]$$

引理 **3.3**[37]（Minkowski Inequality）对于任意序列$\{\xi_k\},\{\eta_k\}\subset K$，我们有

$$\left(\sum_k|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_k|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_k|\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

如果我们取$\xi_1=u$，$\eta_1=v$，$\xi_2=1$，$\eta_2=0$那么有

$$\left(1+(u+v)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(1+(u)^p\right)^{\frac{1}{p}}+v\qquad(u,v\ge0)$$

引理 **3.4**[36]18 若M为任意N-函数，对任意$p>1$，$u\in S(L_{M,p})$是$B(L_{M,p})$的端点的充要条件是

$$\mu\{t\in G,k_u u(t)\notin SC(M)\}=0$$

引理 **3.5**[22]9 $M\in\Delta_2\Leftrightarrow N\in\nabla_2$。

引理 **3.6**[40]218 局部一致凸空间是严格凸的。

引理 **3.7**[40]232 X具有局部一致凸性的充要条件是X具有弱局部一致凸性和 H 性质。

引理 **3.8**[41] $x\in S(X)$是局部一致凸点的充要条件是$x\in S(X)$是紧局部一致凸点和强 U 点。

3.2 赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间的局部凸性

定理 **3.1** 集合$K=\left\{k\in K_p(x).a\le\|x\|_{M,p}\le b\right\}$对任何$b\ge a>0$是一有界集的充要条件是$M(x)\in\nabla_2$，其中$K_p(x)=\left\{0<k<\infty:k_p^*\le k\le k_p^{**}\right\}$。

证明 充分性

记$u_0=M^{-1}\left(\frac{1}{2\mu G}\right)$由$M(x)\in\nabla_2$知存在$p>1,\ l>1$，使得$u\ge u_0$时$M(lu)\ge plM(u)$。对于$b\ge a>0$，$k\in K_p(x)$和$x\in L_{M,p}$满足

$$a\le\|x\|_{M,p}=\frac{1}{k}\left(1+\left(\int_G M(kx(t))dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le b$$

又

$$a \le \|x\|_{M,p} \le \frac{a}{2}\left(1+\left(\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以

$$\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt \ge \left(2^p-1\right)^{\frac{1}{p}}$$

于是

$$\int_{\left\{t\in G:\frac{2}{a}|x(t)|\ge u_0\right\}} M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt \ge \int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt - M(u_0)\mu G \ge \left(2^p-1\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{2}$$

假定 $k>\frac{2}{a}l$，选取自然数 i 使 $l^i<\frac{1}{2}ak\le l^{i+1}$ 于是

$$M\left(l^i u\right) \ge p^i l^i M(u) \qquad (u\ge u_0)$$

有

$$b \ge \|x\|_{M,p} =$$

$$\frac{1}{k}\left(1+\left(\int_G M\left(kx(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge$$

$$\int_{\left\{t\in G:\frac{2}{a}|x(t)|\ge u_0\right\}} \frac{1}{k}M\left(\frac{1}{2}ak\frac{2}{a}x(t)\right)dt >$$

$$\int_{\left\{t\in G:\frac{2}{a}|x(t)|\ge u_0\right\}} \frac{1}{k}p^i l^i M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt >$$

$$\frac{1}{k}p^i l^i\left[\left(2^p-1\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{2}\right] >$$

$$\frac{ap^i}{2l}\left[\left(2^p-1\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{2}\right]$$

说明：$i<\log_p\left(\dfrac{2lb}{a\left[\left(2^p-1\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{2}\right]}\right)$，因而 k 有界。

必要性

假设$M(x)\notin\nabla_2$。存在$l_n\nearrow\infty,u_n\nearrow\infty,l_1\geq 2$，$M(u_1)\mu G\geq\frac{1}{2}$使得

$$M(l_n u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)l_n M(u_n)\quad(n=1,2\cdots)$$

对每个自然数n取G的子集G_n使得$M(u_n)\mu G_n=\frac{1}{2}$。

定义

$$x_n(t)=u_n\chi_{G_n}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}=\rho_M(x_n)\leq\\
&\|x\|_{(M)}\leq\\
&\|x\|_{M,p}\leq\\
&\frac{1}{l_n}\left(1+\left(\int_G M(l_n x(t))dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}<\\
&\frac{1}{l_n}M(l_n u_n)\mu G_n<\\
&\frac{1}{l_n}(1+\frac{1}{n})l_n M(u_n)\mu G_n=\\
&\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

k_n满足$\|x_n\|_{M,p}=\frac{1}{k_n}\left(1+\left(\int_G M(k_n x(t))dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$，由上知$k_n>1$，$n$充分大时

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}>\|x_n\|_{M,p}=\\
&\frac{1}{k_n}\left(1+\left(\int_G M(k_n x(t))dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\\
&\frac{1}{k_n}\left(1+\left(M(k_n u_n)\mu G_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=
\end{aligned}$$

$$\left(\left(\frac{1}{k_n}\right)^p+\left(\frac{1}{k_n}M\left(k_n u_n\right)\mu G_n\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}>$$

$$\left(\left(\frac{1}{k_n}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

令 $n\to\infty$，得 $k_n\to\infty$。得出矛盾。

定理 **3.2** 设 $p(x)$ 连续 $x_0\in S\left(L_{M,p}\right)$，下述命题等价：

(1) x_0 是局部一致凸点；

(2) x_0 是弱局部一致凸点；

(3) $M\in\Delta_2\bigcap\nabla_2$，且 $k_0x_0(t)\in SC(M),\mu-a.e.t\in G$，其中 $k_0\in K_p(x_0)$。

证明 (1) $\Rightarrow$(2) 显然。

(2) $\Rightarrow$(3) x_0 是 WUR 点必为端点有 $k_0x_0(t)\in SC(M),\mu-a.e.t\in G$，其中 $k_0\in K_p(x_0)$。

(Ⅰ)假设 $M\notin\Delta_2$，若存在 $x_0\in S\left(L_{M,p}\setminus E_{M,p}\right)$。令 $G_n=\left\{t\in G,\left|x_0(t)\right|<n\right\}$ 定义 $x_n(t)=x_0(t)\chi_{G_n}$ 则 $x_n\in E_{M,p}\quad(n=1,2\cdots)$ 且 $\|x_n\|_{M,p}\nearrow\|x_0\|_{M,p}\quad(n\to\infty)$

所以

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_{M,p}}+\frac{x_0}{\|x_0\|_{M,p}}\right\|_{M,p}\geq\left(\frac{1}{\|x_n\|_{M,p}}+\frac{1}{\|x_0\|_{M,p}}\right)\|x_n\|_{M,p}\to2\qquad(n\to\infty)$$

另一方面 $x_0\notin E_{M,p}$，存在奇异泛函 s，$s(x_0)\neq0$。

于是

$$s\left(\frac{x_0}{\|x_0\|_{M,p}}-\frac{x_n}{\|x_n\|_{M,p}}\right)=\frac{s(x_0)}{\|x_0\|_{M,p}}\neq0$$

这与(2)矛盾。

若 $x_0\in E_{M,p}$ 取 $G_n\subset G$，$G_{n+1}\subset G_n$ 则 $\mu(G_n)\to0$。取 $u\in S\left(L_{M,p}\setminus E_{M,p}\right)$ 满足 $\int\limits_{G_n}M\left(u(t)\right)dt\to0$。 定义

$$x_n(t)=x_0(t)\chi_{G\setminus G_n}+\frac{1}{k_0}u(t)\chi_{G_n}$$

显然

$$\|x_0+x_n\|_{M,p}\geq2\left\|x_0(t)\chi_{G\setminus G_n}\right\|\to2$$

又

$$\|x_n\|_{M,p} \le \frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_G M\left(k_0 x_n(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_{G\setminus G_n} M\left(k_0 x_0(t)\right)dt+\int_{G_n} M\left(u(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_G M\left(k_0 x_0(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\int_{G_n} M\left(u(t)\right)dt \to 1$$

$u \in S\left(L_{M,p} \setminus E_{M,p}\right)$存在奇异泛函 s，$s(u)\ne 0$，$s(x_n - x_0) = \frac{1}{k_0}s(u) \ne 0$这与(2)矛盾。

（Ⅱ）假设 $M \notin \nabla_2$

设 $x_0(t)\ge 0$ 由 $M\in\Delta_2$ 知 x_0 的支撑泛函 $y_0 \in S\left(L_{N,q}\right)$，不妨设 $y_0(t)\ge 0$，$\rho_N(y_0)<\infty$。取 $G_n \subset G$，$G_{n+1}\subset G_n$ 则 $\mu(G_n)\to 0$ 且 $\rho_N\left(y_0\chi_{G_n}\right)=\frac{1}{n}$。$M\notin\nabla_2$ 有 $u_n \nearrow \infty$，$u_n p(u_n)\mu G_n > 1$ 且 $\frac{u_n p(u_n)}{N\left(p(u_n)\right)} > n$ $(n=1,2\cdots)$ 取 $G_n' \subset G_n$ 满足 $u_n p(u_n)\mu G_n' = 1$ 则 $N\left(p(u_n)\right)\mu G_n' < \frac{1}{n}$。

定义

$$x_n'(t) = x_0(t)\chi_{G\setminus G_n} + \frac{1}{k_0}u_n\chi_{G_n'} \quad , \quad y_n(t) = y_0(t)\chi_{G\setminus G_n} + p(u_n)\chi_{G_n'}$$

由

$$\rho_N\left(p(u_n)\chi_{G_n'}\right)=N\left(p(u_n)\right)\mu G_n' < \frac{1}{n} \to 0$$

知

$$\|y_n\|_{N,q} \to \|y_0\|_{N,q}$$

$$\|x_n'\|_{M,p} \ge \int_G x_n'(t)\,y_n(t)dt = \int_{G\setminus G_n} x_n'(t)\,y_0(t)dt + \frac{1}{k_0}u_n p(u_n)\mu G_n' \to 1+\frac{1}{k_0}$$

又

$$\|x_n'\|_{M,p} \le \frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_G M\left(k_0 x_n'(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_{G\setminus G_n} M\left(k_0 x_0'(t)\right)dt+\int_{G_n'} M\left(u_n\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1+\left(\int_G M\left(k_0 x_0(t)\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k_0}\int_{G_n'} M\left(u_n\right)dt \le$$

$$\frac{1}{k_0}u_n p\left(u_n\right)\mu G_n'+1=\frac{1}{k_0}+1$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n'\|_{M,p}=1+\frac{1}{k_0}$。

取

$$x_n(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{k_0}}x_n'(t)$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_{M,p}=1$。

又

$$2\ge\|x_0+x_n\|_{M,p}\ge$$

$$\int_G\left(x_0(t)+x_n(t)\right)y_0(t)dt\ge$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{k_0}}\int_G x_n'(t)\,y_n(t)dt+\int_{G\setminus G_n}x_0(t)\,y_0(t)dt\to$$

$$1+1=2$$

现在取 n_0 使 $\int_{G\setminus G_{n_0}}x_0(t)dt>0$ 那么，当 $n>n_0$ 时

$$\int_G\left(x_0(t)-x_n(t)\right)\chi_{G\setminus G_{n_0}}dt=\int_{G\setminus G_{n_0}}\left(x_0(t)-\left(1+\frac{1}{k_0}\right)x_0(t)\right)dt=\frac{1}{1+k_0}\int_{G\setminus G_{n_0}}x_0(t)dt>0$$

这与 $x_n\xrightarrow{w}x_0$ 矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $\|x_n\|_{M,p}=\frac{1}{k_n}\left(1+\rho_M^P\left(k_n x_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}=1\quad(n=1,2\cdots)$。$\|x_0+x_n\|_{M,p}\to 2$

$(n\to\infty)$，$\|x_n - x_0\|_{M,p} \to 0$ 等价于 $\|x_n - x_0\|_{(M)} \to 0$，因 $M \in \Delta_2$，只须 $x_n - x_0 \xrightarrow{\mu} 0 \quad (n\to\infty)$。

第一步证明 $k_n x_n - k_0 x_0 \xrightarrow{\mu} 0$

若不然，有 $\delta,\sigma > 0$ 使 $\mu\left\{t\in G: \left|k_n x_n(t) - k_0 x_0(t)\right| \ge \sigma\right\} \ge \delta \quad (n=1,2\cdots)$ 取充分大 D 满足

$$\mu\left\{t\in G: \left|k_n x_n(t)\right| \ge D\right\} \ge \frac{\delta}{3} \quad (n=0,1,2\cdots)$$

记

$$G_n = \left\{t\in G: \left|k_n x_n(t) - k_0 x_0(t)\right| \ge \sigma, \left|k_0 x_0(t)\right| \le D, \left|k_n x_n(t)\right| \le D\right\} \quad (n=1,2\cdots)$$

则 $\mu G_n > \frac{\delta}{3}$。

由 $M \in \nabla_2$ 知 $\bar{k} = \sup\limits_n k_n < \infty$。又 $k_0 x_0(t) \in SC(M)$，$0 < \frac{k_n}{k_0 + k_n} \le \frac{\bar{k}}{k_0 + \bar{k}} < 1$，$0 < \frac{k_0}{k_0+\bar{k}} \le \frac{k_0}{k_0+k_n} < 1$。因而必有 $\eta: 0<\eta<1$ 使 $t\in G_n$ 时

$$M\left(\frac{k_0 k_n}{k_0+k_n}\left(x_0(t) + x_n(t)\right)\right) \le (1-\eta)\left(\frac{k_n}{k_0+k_n} M\left(k_0 x_0(t)\right) + \frac{k_0}{k_0+k_n} M\left(k_n x_n(t)\right)\right)$$

这样就得到矛盾

$$\begin{aligned}
&0 \leftarrow 2 - \|x_0 + x_n\|_{M,p} \ge \\
&\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p(k_0x_0)\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{k_n}\left(1+\rho_M^p(k_nx_n)\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left(1+\rho_M^p\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_0+x_n)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \ge \\
&\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p + \left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0) + \frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} - \\
&\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p + \left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p \rho_M^p\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_0+x_n)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \ge \\
&\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p + \left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0) + \frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} - \\
&\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p + \left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0) + \frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n) - \eta\left(\frac{1}{k_0}\int_{G_n} M\left(k_0x_0(t)\right)dt + \frac{1}{k_n}\int_{G_n} M\left(k_nx_n(t)\right)dt\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

其中

$$\eta\left(\frac{1}{k_0}\int_{G_n} M\left(k_0x_0\left(t\right)\right)dt+\frac{1}{k_n}\int_{G_n} M\left(k_nx_n\left(t\right)\right)dt\right)\geq$$

$$\frac{\eta}{\overline{\overline{k}}}2\int_{G_n}\frac{M\left(k_0x_0\left(t\right)\right)+M\left(k_nx_n\left(t\right)\right)}{2}dt\geq$$

$$\frac{\eta}{\overline{\overline{k}}}2\int_{G_n} M\left(\frac{k_nx_n\left(t\right)-k_0x_0\left(t\right)}{2}\right)dt\geq$$

$$\frac{\eta}{\overline{\overline{k}}}2M\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cdot\frac{\delta}{3}\qquad\left(n\to\infty\right)$$

故 $2-\left\|x_0+x_n\right\|_{M,p}>0$，且不收敛于 0。这不可能。

第二步证明 $k_n\to k_0\quad\left(n\to\infty\right)$

不失一般性设 $k_nx_n\left(t\right)-k_0x_0\left(t\right)\to 0\left(a.e\right)$。取 $y_n\in S\left(L_{N,q}\right)$满足

$$\int_G\left(x_0\left(t\right)+x_n\left(t\right)\right)y_n\left(t\right)dt=\left\|x_0+x_n\right\|_{M,p}\to 2$$

由此得 $\int_G x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt\to 1$，$\int_G x_n\left(t\right)y_n\left(t\right)dt\to 1\quad\left(n\to\infty\right)$

$\forall\varepsilon>0$，取 $G_\varepsilon\subset G$，$\mu G_\varepsilon<\varepsilon$。因为 $M\in\Delta_2$，$\left\|x_n\chi_{G_\varepsilon}\right\|_{M,p}\to 0\ \left(\varepsilon\to 0\right)$。再由

$$1\leftarrow\int_G x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt=$$

$$\int_{G\backslash G_\varepsilon} x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt+\int_{G_\varepsilon} x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt\leq$$

$$\left\|x_n\right\|_{M,p}\cdot\left\|y\chi_{G\backslash G_\varepsilon}\right\|_{N,q}+\left\|x_n\chi_{G_\varepsilon}\right\|_{M,p}\cdot\left\|y\right\|_{N,q}$$

因 $N\in\Delta_2$ 有 $\left\|y\chi_{G\backslash G_\varepsilon}\right\|_{N,q}\to 1\left(\varepsilon\to 0\right)$ 对于 n 一致成立。从而 $\left\|y\chi_{G_\varepsilon}\right\|_{N,q}\to 0$ 对于 n 一致成立。在 $G\backslash G_\varepsilon$ 上 $k_nx_n\left(t\right)-k_0x_0\left(t\right)\to 0$ 一致成立。

$$\int_G x_n\left(t\right)y_n\left(t\right)dt-1=\left(\int_G\frac{k_0}{k_n}x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt-1\right)+$$

$$\int_{G\backslash G_\varepsilon}\left[x_n\left(t\right)-\frac{k_0}{k_n}x_0\left(t\right)\right]y_n\left(t\right)dt+$$

$$\int_{G_\varepsilon} x_n\left(t\right)y_n\left(t\right)dt-\frac{k_0}{k_n}\int_{G_\varepsilon} x_0\left(t\right)y_n\left(t\right)dt$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$\left|\int_{G_\varepsilon} x_n(t)\, y_n(t) dt\right| \le \left\| y\chi_{G_\varepsilon}\right\|_{N,q} \to 0$$

又

$$\left|\frac{k_0}{k_n}\int_{G_\varepsilon} x_0(t)\, y_n(t) dt\right| \le \frac{k_0}{k_n}\left\| x_n\chi_{G_\varepsilon}\right\|_{M,p} \to 0$$

由于 $n\to\infty$ 时 $\int_G x_n(t)\, y_n(t) dt \to 1$，于是有

$$\int_{G\setminus G_\varepsilon}\left[x_n(t)-\frac{k_0}{k_n}x_0(t)\right] y_n(t) dt \to 0$$

从而 $\int_G \frac{k_0}{k_n}x_0(t)\, y_n(t) dt \to 1$，因 $\int_G x_0(t)\, y_n(t) dt \to 1$，所以 $k_n \to k_0$。

推论 **3.1** 设 $p(x)$ 连续，下列命题等价

(1) $L_{M,p}$ 具有局部一致凸性；

(2) $L_{M,p}$ 具有弱局部一致凸性；

(3) $M \in \Delta_2 \cap \nabla_2 \cap SC$。

定理 **3.3** 设 $p(x)$ 连续 $x \in S(L_{M,p})$ 是紧局部一致凸点的充要条件：

(1) $M \in \Delta_2 \cap \nabla_2$；

(2) $kx(t) \in SC(M), \mu - a.e. t \in G$，其中 $k \in K_p(x)$。

证明“$\Leftarrow$”由(1)，(2)知 $x \in S(L_{M,p})$ 是局部一致凸点，必为紧局部一致凸点。

“$\Rightarrow$” (1) 假设 $M \notin \Delta_2$

(Ⅰ)若存在 $x \in S(L_{M,p} \setminus E_{M,p})$。令 $G_n = \{t \in G, |x(t)| < n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\| x\chi_{G\setminus G_n}\right\|_{M,p} = d(x, E_{M,p}) = d > 0$$

因为 $\|x\|_{M,p} > \frac{d}{2}$，存在 $G_{n_1} \subset G$，使 $\left\| x\chi_{G_{n1}}\right\|_{M,p} > \frac{d}{2}$。又 $\left\| x\chi_{G\setminus G_{n1}}\right\|_{M,p} > \frac{d}{2}$，存在 $G_{n_2} \supset G_{n_1}$，使 $\left\| x\chi_{G_{n_2}\setminus G_{n_1}}\right\|_{M,p} > \frac{d}{2}$；类似的，得到一个序列 $\{G_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset G$，满足 $G_{n_i} \subset G_{n_{i+1}}$，$\left\| x\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\|_{M,p} > \frac{d}{2}$ $(i = 1, 2\cdots)$。令 $x_i = x\chi_{G_{n_i}}$，

显然

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i\|_{M,p}=\lim_{i\to\infty}\left\|x\chi_{G_{n_i}}\right\|_{M,p}=\|x\|_{M,p}=1$$

有

$$\lim_{i\to\infty}\|x+x_i\|_{M,p}\geq 2\lim_{i\to\infty}\left\|x\chi_{G_{n_i}}\right\|_{M,p}=2$$

因此

$$\|x+x_i\|_{M,p}\to 2 \qquad (i\to\infty)$$

又

$$\|x_i-x_j\|_{M,p}=\left\|x\chi_{G_{n_i}}-x\chi_{G_{nj}}\right\|_{M,p}\geq\left\|x\chi_{G_{n_j}\setminus G_{n_{j-1}}}\right\|_{M,p}>\frac{d}{2} \qquad (\forall j>i)$$

这与 x 是紧局部一致凸点矛盾。

若 $x\in E_{M,p}$，取 $y\notin E_{M,p}$，且 $\rho_N(y)<\infty$，$d(y,E_{M,p})=d>0$，令 $G_n=\{t\in G,|y(t)|<n\}$，重复上述过程得到序列 $\{G_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\subset G$，满足 $G_{n_i}\subset G_{n_{i+1}}$ $\left\|y\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\|_{M,p}>\frac{d}{2}$ $(i=1,2\cdots)$。取 $k>1$，满足 $1=\|x\|_{M,p}=\frac{1}{k}\left(1+\rho_M^p(kx)\right)^{\frac{1}{p}}$，令

$$x_i(t)=x(t)\chi_{G\setminus\left(G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}\right)}+\frac{y(t)}{k}\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}} \qquad (i=1,2\cdots)$$

则

$$\|x_i\|_{M,p}\geq\left\|x\chi_{G_{n_i}}\right\|_{M,p}\to\|x\|_{M,p}=1$$

于是有

$$\lim_{i\to\infty}\|x_i\|_{M,p}\geq 1$$

又

$$\begin{aligned}\|x_i\|_{M,p}&\leq\frac{1}{k}\left(1+\rho_M^p(kx_i)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\\&\frac{1}{k}\left(1+\left(\rho_M(kx)+\rho_M\left(y\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\\&\frac{1}{k}\left(1+\rho_M^p(kx)\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k}\rho_M\left(y\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right)\leq\\&\frac{1}{k}\rho_M\left(y\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right)+1\to 1 \qquad (i\to\infty)\end{aligned}$$

因此有 $\lim_{i\to\infty}\|x_i\|_{M,p}=1$，又 $x\in E_{M,p}$，取 $i_0\in N$，满足当 $i>i_0$ 时

$\left\|x\chi_{G\setminus G_{n_{i_0}}}\right\|_{M,p} < \dfrac{d}{4}$。又 $j > i > i_0$ 时

$$\left\|x_i - x_j\right\|_{M,p} \ge \left\|(x-y)\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\| \ge \frac{1}{k}\left\|y\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\|_{M,p} - \left\|x\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\|_{M,p} > \frac{d}{4k} > 0$$

又因为

$$\left\|x + x_i\right\|_{M,p} \ge 2\left\|x\chi_{G_{n_i}}\right\|_{M,p} \to 2$$

有 $\lim\limits_{i\to\infty}\left\|x + x_i\right\|_{M,p} = 2$，但 $\left\|x_i - x_j\right\|_{M,p} > \dfrac{d}{4k}$，这与 x 是紧局部一致凸点矛盾。

（Ⅱ）假设 $M \notin \nabla_2$，则 $N \notin \Delta_2$，$\exists y_0 \in S\left(L_{N,q}\right)$，使 $\left\|y_0\chi_{G\setminus G_n}\right\|_{N,q} = 1$，其中 $G_n = \left\{t \in G, \left|y_0(t)\right| < n\right\}$。因为 $\left\|y_0\chi_{G\setminus G_n}\right\|_{N,q} = 1$，令 G_{n_1} 满足 $\left\|y_0\chi_{G\setminus G_{n_1}}\right\|_{N,q} = 1$，则存在 n_2 满足 $n_2 > n_1$，$\left\|y_0\chi_{G_{n_2}\setminus G_{n_1}}\right\|_{N,q} > \dfrac{1}{2}$，存在 n_3，满足 $n_3 > n_2$，$\left\|y_0\chi_{G_{n_3}\setminus G_{n_2}}\right\|_{N,q} > \dfrac{2}{3}$，重复上述过程得到序列 $\left\{G_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty} \subset G$，满足 $G_{n_i} \subset G_{n_{i+1}}$，且 $1 \ge \left\|y_0\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}\right\|_{N,q} > \dfrac{i}{i+1}$。

令 $y_i = y_0\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}}$，$y_i \in E_{N,q}$，存在 $x_i \in S\left(L_{M,p}\right)$，满足 $\left\langle x_i, y_i\right\rangle = \left\|y_i\right\|_{N,q}$，$\sup p\left(x_i\right) \subset G_{n_{i+1}} \setminus G_{n_i}$，

显然有

$$\left\|x_i - x_j\right\|_{M,p} \ge \left\|x_i\right\|_{M,p} = 1 \qquad \forall i \ne j$$

因为 $M \in \Delta_2$，存在 $y \in S\left(L_{N,q}\right)$，满足 y 是 x 的支撑泛函。令

$$z_i(t) = y(t)\chi_{G\setminus\left(G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}\right)} + y_0(t)\chi_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}} \qquad (i = 1, 2\cdots)$$

于是

$$\begin{aligned}
\left\|x + x_i\right\|_{M,p} &\ge \left\langle x + x_i, z_i\right\rangle = \\
&\left\langle x, z_i\right\rangle + \left\langle x_i, z_i\right\rangle = \\
&\int\limits_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}} x(t)\,y_0(t)d_t + \int\limits_{G\setminus\left(G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}\right)} x(t)\,y(t)d_t + \\
&\int\limits_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}} x_i(t)\,y_0(t)d_t + \int\limits_{G\setminus\left(G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}\right)} x_i(t)\,y(t)d_t >
\end{aligned}$$

$$1-\int_{G_{n_{i+1}}\setminus G_{n_i}} x(t)\,y(t)\,d_t+\frac{i}{i+1}-\varepsilon-\varepsilon\to$$
$$2-3\varepsilon \qquad (i\to\infty)$$

故 $\lim\limits_{i\to\infty}\|x+x_i\|_{M,p}=2$，但 $\|x_i-x_j\|_{M,p}\geq\|x_i\|_{M,p}=1$，这与 x 是紧局部一致凸点矛盾。

(2) 假设 $\mu\{t\in G,kx(t)\in SC(M)\}\neq 0$，即存在 $a>0$，$b>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使 $a<b$ 且在 $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ 上 $M(u)$ 为线性：$M(u)=Au+B \qquad u\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$，

令 $E=\{t\in G,kx(t)\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\}$，把 E 分成两个子集 E_1^1，E_2^1，满足 $\mu E_1^1=\mu E_2^1$，$E_1^1\cap E_2^1=\varnothing$，$E_1^1\cup E_2^1=E$；把 E_1^1 分成两个子集 E_1^2，E_2^2，满足 $\mu E_1^2=\mu E_2^2$，$E_1^2\cap E_2^2=\varnothing$，$E_1^2\cup E_2^2=E_1^1$；把 E_2^1 分成两个子集 E_3^2，E_4^2，满足 $\mu E_3^2=\mu E_4^2$，$E_3^2\cap E_4^2=\varnothing$，$E_3^2\cup E_4^2=E_2^1$，如此下去，我们得到 E 的两个序列 $\{E_{2k-1}^n\}$，$\{E_{2k}^n\}$，满足 $\mu E_{2k-1}^n=\mu E_{2k}^n$，$E_{2k-1}^n\cap E_{2k}^n=\varnothing$，$E_{2k-1}^n\cup E_{2k}^n=E_k^{n-1}$，$(n=1,2\cdots;k=1,2,\cdots,2^{n-1})$。

存在 $k_0>0$，$F\subset G\setminus E$ 使得 $\rho_M^{p-1}(k_0x)\rho_N(p(k_0x))=1$，其中

$$x(t)=\frac{1}{2k_0}(b+a)\chi_E(t)+\chi_F(t)$$

令 $E_n'=\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}}E_{2k-1}^n$，$E_n''=\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}}E_{2k}^n$，定义

$$x_n(t)=\frac{a}{k_0}\chi_{E_n'}(t)+\frac{b}{k_0}\chi_{E_n'}(t)+\chi_F(t)$$

由

$$M\left(\frac{a+b}{2k_0}\right)=\frac{M(a)+M(b)}{2k_0}$$

知

$$\rho_M(k_0x)=\rho_M(k_0x_n)。$$

又 M 在 $[a,b]$ 上是线性的，恒有 $p(u)=M'(u)=A$，知

$$\rho_N(p(k_0x))=\rho_N(p(k_0x_n))$$

故

$$\|x\|_{M,p}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p(k_0x)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p(k_0x_n)\right)^{\frac{1}{p}}=\|x_n\|_{M,p}$$

显然

$$\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_{M,p}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0\frac{x+x_n}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0x_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_{M,p}=1$$

又

$$\|x_n-x_m\|_{M,p}=\frac{a}{k_0}\left\|\chi_{E_n'}-\chi_{E_m'}\right\|_{M,p}+\frac{b}{k_0}\left\|\chi_{E_n'}-\chi_{E_m'}\right\|_{M,p}>0 \qquad (m\neq n)$$

这与 x 是紧局部一致凸点矛盾。

推论 **3.2** 设 $p(x)$ 连续，$L_{M,p}$ 具有紧局部一致凸性的充要条件 $M\in\Delta_2\cap\nabla_2\cap SC$。

3.3 本章小结

本章根据赋 Orlicz 范数 Orlicz 空间的局部一致凸性，弱局部一致凸性，紧局部一致凸性的研究和赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的自身性质，给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间单位球上的点为局部一致凸点，弱局部一致凸性，紧局部一致凸点充要条件，从而给出赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有局部一致凸，局部一致凸性，紧局部一致凸的判别准则。

第4章 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的 H 性质

4.1 引言

H 性质是 Banach 几何中重要几何性质，对于赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的 H 性质，许多学者做了深入的研究，本文给出了赋 p-Amemiya 范数的 Orlicz 空间具有 H 性质充要条件。下面给出一些基本定义：

以 X 表示一个 Banach 空间，$B(X)$，$S(X)$ 分别表示 X 的单位球和单位球面。

定义 **4.1** Banach 空间 X 称为具有 H 性质是指对于任意的 $x, x_n \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\| = 1$ 和 $x_n \xrightarrow{w} x$ 蕴涵 $\|x_n - x\| \to 0$。

定义 **4.2** 设 $(G, \sum, \mu)$ 是非原子，完备的测度空间，L^0 是所有定义在 G 上的依测度等价的实值可测函数的全体，对 $\forall x \in L^0$，称

$$\rho_M(x) = \int_G M(x(t))dt$$

为 x 关于 M 的模。

Orlicz 空间

$$L_M^* = \left\{x \in L^0 : \exists\lambda > 0, \rho_M(\lambda x) < \infty\right\}$$

及其闭子空间

$$E_M^* = \left\{x \in L^0 : \forall\lambda > 0, \rho_M(\lambda x) < \infty\right\}$$

关于 Orlicz 范数：

$$\|x\|_M = \sup\left\{\left|\int_G x(t)y(t)dt\right| : y \in L_N, \rho_N(y) \le 1\right\} = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1 + \rho_M(kx)\right)$$

Luxemburg 范数：

$$\|x\|_{(M)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

p-Amemiya 范数：

$$\|x\|_{M,p}=\begin{cases}\inf\limits_{k>0} k^{-1}\left(1+\rho_M^p(kx)\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \inf\limits_{k>0} k^{-1}\max\{1,\rho(kx)\},\ p=\infty\end{cases}$$

均称为 Banach 空间，简记

$L_M=\left[L_M^*,\|\cdot\|_M\right]$，　$L_{(M)}=\left[L_M^*,\|\cdot\|_{(M)}\right]$，　$L_{M,p}=\left[L_M^*,\|\cdot\|_{M,p}\right]$，

$E_M=\left[E_M^*,\|\cdot\|_M\right]$，　$E_{(M)}=\left[E_M^*,\|\cdot\|_{(M)}\right]$，　$E_{M,p}=\left[E_M^*,\|\cdot\|_{M,p}\right]$

定义 **4.3** 称函数 M 满足 Δ_2 条件，如果存在常数 $k\ge 2$ 和 $u_0>0$ 满足 $M(2u)\le kM(u)$，当 $|u|>u_0$ 时。

定义 **4.4** 设 M 为任意 N-函数，x 为实数，如果对任何两个不同的实数 v,w，只要 $u=\dfrac{v+w}{2}$ 就有 $M(u)<\dfrac{M(v)+M(w)}{2}$。则称 u 为 M 的一个严格凸点。

M 的严格凸点全体记为 $SC(M)$。

引理 **4.1**[21] 对任何 G 中有界闭集 E，存在 E 的不交子集 E_n'，E_n''，使 $E=E_n'\bigcup E_n''$，$mesE_n'=mesE_n''\ (n=1,2\cdots)$ 且对任何 E 上可积函数 $v(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_G v(t)\left(\chi_{E_n'}(t)-\chi_{E_n''}(t)\right)dt=0$$

引理 **4.2**[37] M 是 N-函数且存在 $k_0>0$，使得 $\rho_M^{p-1}(k_0x)\rho_N\left(p(k_0x)\right)=1$，则

$$\|x\|_{M,p}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p(k_0x)\right)^{\frac{1}{p}}\quad (p>1)$$

引理 **4.3**[36]3 $\forall x\in L_M^*$，$\|x\|_{(M)}=\|x\|_{M,\infty}\le\|x\|_{M,p}\le\|x\|_{M,1}=\|x\|_M$。

引理 **4.4**[22]1 假设 $M(u)$ 严格凸，对任何 $[a,b]\subset(0,1)$ 和 $L,\sigma>0$ 存在 $\delta>0$，使得 $\alpha\in[a,b]$，$|u|\le L$，$|v|\le L$，$|u-v|\ge\sigma$ 蕴涵

$$M\left[\alpha u+(1-\alpha)v\right]\le(1-\delta)\left[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)\right]$$

4.2 赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有 H 性质

定理 **4.1** M 为任意 N-函数，$u_n,u_0\in L_{M,p}$，且 $u_n\xrightarrow{w}u_0\ne 0$ $(n=1,2\cdots)$，若 $\|u_n\|_{M,p}=\dfrac{1}{k_n}\left(1+\rho_M^p(k_nu_n)\right)^{\frac{1}{p}}$，则 $\{k_n\}$ 有界。

证明 首先证当$u_n,u_0\in L_{M,p}$，$u_n\xrightarrow{w}u_0\neq 0$时，存在正常数$\alpha,\varepsilon$使得$n$充分大时成立

$$mesG\left(\left|u_n\left(t\right)\right|\ge\alpha\right)>\varepsilon$$

因$u_0\neq 0$，取$\beta>0$使得$\delta=mesE>0$，这里$E=G\left(\left|u\left(t\right)\right|\ge\beta\right)$选正整数$n_0$使得$2^{n_0}<\dfrac{2}{\delta}$。如果上命题不真，则存在$\{u_n\}$的子列$\{u_{n_k}\}$满足

$$mesG\left(\left|u_{n_k}\left(t\right)\right|\ge\frac{\beta}{2}\right)<\frac{1}{2^{n_0+k}}\quad\left(k=1,2\cdots\right)$$

记

$$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}G\left(\left|u_{n_k}\left(t\right)\right|\ge\frac{\beta}{2}\right)$$

则$mesF<\dfrac{1}{2^{n_0}}<\dfrac{\delta}{2}$且对所有$t\in G\setminus F$成立$\left|u_{n_k}\left(t\right)\right|<\dfrac{\beta}{2}\quad\left(k=1,2\cdots\right)$。

命

$$v\left(t\right)=\chi_{E\setminus F}\left(t\right)\operatorname{sgn}u\left(t\right)$$

则$v\in\left(L_{M,p}\right)'$且

$$\left|\int_G\left[u_0\left(t\right)-u_{n_k}\left(t\right)\right]v\left(t\right)dt\right|\ge\beta\cdot mesE\setminus F-\frac{\beta}{2}\cdot mesE\setminus F>\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\delta}{2}>0\quad\left(k=1,2\cdots\right)$$

这与$u_n\xrightarrow{w}u_0\neq 0$矛盾，故上命题成立。

再证$\{k_n\}$有界，假设$\{k_n\}$的子列$\{k_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$趋于无穷。由$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{M\left(u\right)}{u}=\infty$，便得到矛盾：

$$\left\|u_{n_i}\right\|_{M,p}\ge\frac{1}{k_{n_i}}\int\limits_{G\left(\left|u_n(t)\right|\ge\alpha\right)}M\left(k_{n_i}u_{n_i}\left(t\right)\right)\ge\frac{\varepsilon}{k_{n_i}}M\left(k_{n_i}\alpha\right)\to\infty$$

定理 **4.2** $L_{M,p}$具有 H 性质的充要条件$M\in\Delta_2$且M严格凸。

证明 必要性

(1) 反证 假设$M\notin\Delta_2$，存在数列$\{u_k\}$和G的一列两两不交子集$\{G_k\}$使得$M\left(\left(1+\dfrac{1}{k}\right)u_k\right)>2^kM\left(u_k\right)$，且$mesG_k\cdot M\left(u_k\right)=\dfrac{1}{2^k}$成立。

定义

$$x\left(t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G_k}\text{，}\quad x_n\left(t\right)=\sum_{k\neq n}u_k\chi_{G_k}-u_n\chi_{G_n}\text{，}\quad n=1,2\cdots$$

显然$\|x\|_{M,p}=\|x_n\|_{M,p}$，$\forall n\in N_+$，$x(t)-x_n(t)=2u_n\chi_{G_n}\in E_{M,p}$处处收敛于零。对$\forall f\in\left(E_{M,p}\right)'$，存在 $v(t)\in L_{N,p}$使得

$$f(u)=\int_G u(t)v(t)dt \qquad (u\in E_{M,p})$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，$f(x-x_n)\to 0$，即$x_n\xrightarrow{w}x\ (n\to\infty)$。

另一方面

$$\rho_M\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\chi_{G_n}\right)>2^n\cdot\rho_M\left(u_n\chi_{G_n}\right)=1$$

由$\|\cdot\|_{(M)}$定义，可知

$$\left\|u_n\chi_{G_n}\right\|_{(M)}\ge\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

故

$$\|x-x_n\|_{M,p}\ge\|x-x_n\|_{(M)}=2\left\|u_n\chi_{G_n}\right\|_{(M)}\ge\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\to 2 \qquad (n\to\infty)$$

因此$L_{M,p}$无 H 性质。

(2) 反证 假设M非严格凸，即存在$a>0$，$b>0$和$\varepsilon>0$使$a<b$且在$[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$上$M$为线性：

$$M(u)=Au+B \qquad u\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$$

选有界闭集$E\subset G$使$0<mesE<mesG$，对此E，选E_n'，E_n''满足引理4.2 条件$(n=1,2\cdots)$。存在$k_0>0$，$F\subset G\setminus E$使得$\rho_M^{p-1}(k_0x)\rho_N\left(p(k_0x)\right)=1$，其中

$$x(t)=\frac{1}{2k_0}(b+a)\chi_E(t)+\chi_F(t)$$

定义

$$x_n(t)=\frac{a}{k_0}\chi_{E_n'}(t)+\frac{b}{k_0}\chi_{E_n''}(t)+\chi_F(t)$$

由

$$M\left(\frac{a+b}{2k_0}\right)=\frac{M(a)+M(b)}{2k_0}$$

知

$$\rho_M\left(k_0 x\right)=\rho_M\left(k_0 x_n\right)$$

又 M 在 $[a,b]$ 上是线性的，恒有 $p(u)=M'(u)=A$，知

$$\rho_N\left(p\left(k_0 x\right)\right)=\rho_N\left(p\left(k_0 x_n\right)\right)$$

故

$$\|x\|_{M,p}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0 x\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0 x_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\|x_n\|_{M,p}$$

显然

$$\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_{M,p}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0\frac{x+x_n}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^p\left(k_0 x_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_{M,p}=1$$

对 $\forall f\in\left(L_{M,p}\right)'$，$f=v+s$，因 $x,x_n\in E_{M,p}$ 有

$$f\left(x-x_n\right)=\int_G\left[x(t)-x_n(t)\right]v(t)\,dt=\frac{b-a}{2}\int_G v(t)\left(\chi_{E_n'}(t)-\chi_{E_n''}(t)\right)dt\to 0$$

故 $x_n\xrightarrow{w}x\ (n\to\infty)$，再由

$$\|x-x_n\|_{M,p}\ge\|x-x_n\|_{(M)}=\frac{b-a}{2}\|\chi_E\|_{(M)}>0$$

知 $L_{M,p}$ 无 H 性质。

充分性

设 $\|x_n\|_{M,p}=\dfrac{1}{k_n}\left(1+\rho_M^p\left(k_n x_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}=1\quad(n=1,2\cdots)$。又 $\|x_n\|_{M,p}=\|x\|_{M,p}=1$ 且 $x_n\xrightarrow{w}x$ 蕴涵 $\|x_n+x\|_{M,p}=2$。$\|x_n-x_0\|_{M,p}\to 0$ 等价于 $\|x_n-x_0\|_{(M)}\to 0$，因 $M\in\Delta_2$，只须 $x_n-x_0\xrightarrow{\mu}0\quad(n\to\infty)$

(1) 证明 $k_n x_n-k_0 x_0\xrightarrow{\mu}0$

若不然，有 $\delta,\sigma>0$ 使 $\mu\left\{t\in G:\left|k_n x_n(t)-k_0 x_0(t)\right|\ge\sigma\right\}\ge\delta\quad(n=1,2\cdots)$取充分大 D 满足

$$\mu\left\{t\in G:\left|k_n x_n(t)\right|\ge D\right\}\ge\frac{\delta}{3}\quad(n=0,1,2\cdots)$$

记

$$G_n=\left\{t\in G:\left|k_n x_n(t)-k_0 x_0(t)\right|\ge\sigma,\left|k_0 x_0(t)\right|\le D,\left|k_n x_n(t)\right|\le D\right\}\quad(n=1,2\cdots)$$

则 $\mu G_n>\dfrac{\delta}{3}$。由定理 4.1 知 $\bar{k}=\sup\limits_n k_n<\infty$。又 $M(u)$ 严格凸，$0<\dfrac{k_n}{k_0+k_n}$

$\le \dfrac{\overline{k}}{k_0+\overline{k}}<1$，$0<\dfrac{k_0}{k_0+\overline{k}}\le\dfrac{k_0}{k_0+k_n}<1$。因而必有$\eta: 0<\eta<1$使$t\in G_n$时

$$M\left(\frac{k_0k_n}{k_0+k_n}\left(x_0(t)+x_n(t)\right)\right)\le(1-\eta)\left(\frac{k_n}{k_0+k_n}M\left(k_0x_0(t)\right)+\frac{k_0}{k_0+k_n}M\left(k_nx_n(t)\right)\right)$$

这样就得到如下矛盾

$$0\leftarrow 2-\|x_0+x_n\|_{M,p}\ge$$

$$\frac{1}{k_0}\left(1+\rho_M^P(k_0x_0)\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{k_n}\left(1+\rho_M^P(k_nx_n)\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\left(1+\rho_M^P\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_0+x_n)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\ge$$

$$\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p+\left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0)+\frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}-$$

$$\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p+\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p\rho_M^P\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_0+x_n)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\ge$$

$$\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p+\left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0)+\frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}-$$

$$\left(\left(\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\right)^p+\left(\frac{1}{k_0}\rho_M(k_0x_0)+\frac{1}{k_n}\rho_M(k_nx_n)-\eta\left(\frac{1}{k_0}\int_{G_n}M\left(k_0x_0(t)\right)dt+\frac{1}{k_n}\int_{G_n}M\left(k_nx_n(t)\right)dt\right)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中

$$\eta\left(\frac{1}{k_0}\int_{G_n}M\left(k_0x_0(t)\right)dt+\frac{1}{k_n}\int_{G_n}M\left(k_nx_n(t)\right)dt\right)\ge$$

$$\frac{\eta}{\overline{k}}2\int_{G_n}\frac{M\left(k_0x_0(t)\right)+M\left(k_nx_n(t)\right)}{2}dt\ge$$

$$\frac{\eta}{\overline{k}}2\int_{G_n}M\left(\frac{k_nx_n(t)-k_0x_0(t)}{2}\right)dt\ge$$

$$\frac{\eta}{\overline{k}}2M\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cdot\frac{\delta}{3}\qquad(n\to\infty)$$

故$2-\|x_0+x_n\|_{M,p}>0$，且不收敛于 0，这不可能。

(2) 证明 $k_n\to k_0\quad(n\to\infty)$

对任给$\varepsilon>0$，取$y\in S\left(E_{N,q}\right)$使$\int_G x_0(t)y(t)dt>1-\varepsilon$。因$x_n\xrightarrow{w}x_0$，所以

当n充分大时$\int\limits_G x_n(t)\,y(t)dt > 1-\varepsilon$。注意到$v$具有绝对连续范数，可选$\delta > 0$使$E \subset G$，$mesE < \delta$蕴涵

$$\int\limits_E x_0(t)\,y(t)dt \le \|v\chi_E\|_{N,q} < \varepsilon$$

又$k_n x_n - k_0 x_0 \xrightarrow{\mu} 0$，知$E_n \subset G$且$mesE_n < \delta$使得当$n$充分大时

$$\left|k_n x_n(t) - k_0 x_0(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\|\chi_G\|_{M,p}} \quad \left(t \in G \setminus E_n\right)。$$

因此当n充分大时

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &< \int\limits_G x_n(t)\,y(t)dt < \\
&\int\limits_{G\setminus E_n}\left(\frac{k_0}{k_n}x_0(t)\,y(t) + \frac{\varepsilon}{k_n\|\chi_G\|_{M,p}}\right)dt + \int\limits_{E_n} x_n(t)\,y(t)dt \le \\
&\frac{k_0}{k_n}\|x_0\|_{M,p} + \varepsilon + \|x_n\|_{M,p}\cdot\|v\chi_E\|_{N,q} \le \\
&\frac{k_0}{k_n}\|x_0\|_{M,p} + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

由ε的任意性，得

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{k_0}{k_n} \ge 1。$$

又当n充分大时

$$\begin{aligned}
1 &\ge \int\limits_G \left|x_n(t)\,y(t)\right|dt \ge \\
&\int\limits_{G\setminus E_n}\left|x_n(t)\,y(t)\right|dt \ge \\
&\int\limits_{G\setminus E_n}\left(\frac{k_0}{k_n}x_0(t)\,y(t) - \frac{\varepsilon}{k_n\|\chi_G\|_{M,p}}\right)dt \ge \\
&\int\limits_{G\setminus E_n}\left(\frac{k_0}{k_n}x_0(t)\,y(t)\right)dt - \varepsilon \ge \\
&\frac{k_0}{k_n}(1-2\varepsilon) - \varepsilon
\end{aligned}$$

有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{k_0}{k_n}\leq 1$$

故 $k_n \to k_0 \quad (n\to\infty)$。

4.3 本章小结

本章根据赋 Orlicz 范数 Orlicz 空间的 H 性质和赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的自身性质，初步讨论了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有 H 性质，并给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有 H 性质的判别准则。

结 论

赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间是经典 Orlicz 空间的一种推广，而且该类空间还包含了 L_p,l_p,c_0 等经典空间，对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的研究将为 L_p,l_p,c_0 等经典空间作为整体研究讨论提供了统一的方法。由于 Orlicz 函数的多样性，赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间还可为抽象 Banach 空间的直观材料，同时赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的证明方法和技巧还可为一般的 Banach 几何问题提供很好的借鉴。

对偶空间对于进一步研究赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的几何性质具有至关重要的作用，对偶空间的结构为许多重要几何性质的研究提供依据，本文第二章根据赋 Orlicz 空间对偶空间的结构，给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的对偶空间结构，并进一步得到空间自反的等价条件。

凸性是 Banach 空间几何学中的基本概念，具有鲜明的几何意义。局部凸性在 Banach 空间几何学中具有重要的作用，局部一致凸蕴含了重要的不动点性质。本文第三章给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有局部一致凸，弱局部一致凸，紧局部一致凸的判别准则。

H 性质是 Banach 空间几何学中的重要概念，许多重要的结果都与 H 性质有关，H 性质与弱局部一致凸蕴涵了局部一致凸。本文第四章给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间具有 H 性质的判别准则。

由于作者水平有限，对赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间几何性质的研究还不够深入，该空间还有许多重要的几何性质还没有研究，本文给出了赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间对偶空间的结构，但并没有得到空间元素的支撑泛函具体形式，这是我们今后努力的方向。对于赋 p-Amemiya 范数 Orlicz 空间的局部凸性，H 性质进行了研究，但是还有很多点态性质和几何性质有待研究如：强 U 点，WM 点，正规结构，非方性等。这有待于我们进一步的研究。

参考文献

[1] ORLICZ W. $\ddot{U}$ ber Eine Gewisse Klasses von Raumen von Typus B[M]. Bulletion, Inst. Acad. Polon. Sci., 1932, A: 207-220.

[2] ORLICZ W. Uber Raumen(L^M)[M]. Bull. Acad. Polonaise Sci., 1936, A: 93-107.

[3] NAKANO H. Modulared Semi-ordered Linear Spaees[J]. Bull. Acad. Polonaise Sci., 1950, A(5): 10-27.

[4] LUXEMBUR G W A. Banach Function Space[J]. Doctor Thesis. Delfl., 1955, (8): 31-206.

[5] LUXEMBURG W A , ZAANEN A C. Conjugate Spaces of Orlicz Spaces[J]. Indag. Math., 1956, 8(12): 217-228.

[6] NAKANO H. Topology and Topological Linear Spaces[M]. Tokyo. Math. Book Series, 1951: 48-60.

[7] KRASNOSELSKII M A, RUTICKII Y B. Convex Function and Orlicz Spaces[M]. Math. Phy. Literature Publishing Company, 1958: 11-17.

[8] ANDO T. Linear Functionals on Orlicz Space[J]. Nieuw Arch.Wisk., 1960, 8(3): 1-16.

[9] RAO M M. Linear Functionals on Orlicz Space[J]. Nieuw Arch. Wisk., 1964, (12): 77-98.

[10] GAPOSKIN V F. The Existence of Unconditional Base in Orlicz Spaces[J]. Funct Anal. Appl., 1967, 4(1): 278-284.

[11] GAPOSKIN V F. Unconditional Base in Orlicz Spaces[J]. Sibirsk Math. Z., 1986, (9): 280-287.

[12] ORLICZ W. A Note on Modular Spaces[J]. Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 1961, (9): 157-162.

[13] MILNES H W. Convexity of Orlicz Spaces[J]. Pacific J. Math., 1957, (8): 1451-1486.

[14] SCHAFFER J J. Geometry of Sphere in Normed Spaces[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, (84): 71-73.

[15] 郭大钧. P. S. Urysohn 算子的全连续性[J]. 中国科学, 1962, (11): 437-452.

[16] 王廷辅. $B(s)$ 与 $L^M(G)$ 的紧性[J]. 数学进展, 1966, 9(3): 287-290.

[17] 丁夏畦. 一类函数空间的性质和应用[J]. 数学学报, 1960, (10): 316-360.
[18] TRUDINGER N S. On Imbedding into Orlicz Spaces and Some Application[J]. Math., Mech, 1967, (17): 473-483.
[19] 吴从炘, 赵善中, 陈俊澳. 关于 Orlicz 空间范数的计算公式与严格赋范的条件[J]. 哈尔滨工业大学, 1978, 10(2): 1-12.
[20] 吴从炘, 王廷辅. Orlicz 空间及其应用[M]. 哈尔滨: 黑龙江科技出版社, 1983: 1-201.
[21] 吴从炘, 王廷辅, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 空间几何理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1986: 1-200.
[22] CHEN SHOUTAO. Geometry of Orlicz Space[M]. Warzawa: Dissertation Math., 1992: 1-191.
[23] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 空间的强端点[J]. 数学杂志, 1987, (4): 335-340.
[24] 王廷辅, 任重道, 张永林. Orlicz 空间的 UR 点和 WUR 点[J]. 数学杂志, 1993, 13(4): 443-452.
[25] 陈述涛, 王廷辅. Orlicz 空间的 UR 点和 WUR 点[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 1992, 8(3): 5-10.
[26] 吴从炘, 陈述涛, 王玉文. Orlicz 序列空间的 H 性质[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1985, 6: 6-11.
[27] 陈述涛, 王玉文. Orlicz 空间的 H 性质[J]. 数学年刊, 1987, 8A(1): 61-67.
[28] 王廷辅, 崔云安. 关于 Orlicz 空间的 H 性质的注记[J]. 数学物理学报, 1998, 18(2): 217-220.
[29] CUI YUNAN, HUDZIK H, NOWAK M, PLUCIENNIK R. Some Geometric Properties in Orlicz Sequence Spaces Equipped with Orlicz Norm[J]. J. Convex. Analysis, 1999, 6(1): 91-113.
[30] CUI YUNAN, HUDZIK H, PETROT N. Basic Topological and Geometric Properties of Cesaro-Orlicz Spaces[J]. Proc. Indian Acad. Sci., 2005, 115(4): 461-476.
[31] CHEN SHOUTAO, CUI YUNAN, HUDZIK H. Isometric Copies of l^1 and l^∞ in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2003, 132(2): 473-480.
[32] 赵亮, 吴从炘. 赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的暴露点[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006, 23(2): 184-187.
[33] LILI WEI, CHEN SHUTAO. Orlicz Space with Weakly Normal Structure [J].

应用泛函分析学报, 2001, 3(1): 37-51.
[34] CUI YUNAN, HUDZIK H, PLUCIENNIK R. Extreme Points and Strong Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the Orlicz Norm[J]. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 789-817.
[35] 段丽芬, 崔云安. 广义 Orlicz 范数和广义 Luxemburg 范数[J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(2): 131-134.
[36] CUI YUNAN, DUAN L F, HUDZIK H. Basic Theory of p-Amemiya Norm in Orlicz Spaces($1 \le p \le \infty$): Extreme Points and Rotundity in Orlicz Spaces Equipped with These Norm[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69(5-6): 1796-1816.
[37] 段丽芬, 崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的端点[J]. 浙江大学学报, 2007, 34(3): 251-256.
[38] CUI YUNAN, HUDZIK H, LI JJ, WISLA M, Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the p-Amemiya norm[J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications. 2009, 71(12): 6343-6364.
[39] 段丽芬, 崔云安. 广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间强端点[J]. 浙江大学学报, 2009, 36(1): 6-11.
[40] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986:1-300.
[41] CHEN LILI, CUI YUNAN. On the Compactly Locally Uniformly Rotund Points of Orlicz Spaces[J]. Proc.Indian. Acad. Sci. 2007, 117(4): 471-483.
[42] HUDZIK H, KOWALEWSKI W, On Some Local Geometric Properties in Musielak-Orlicz Function Spaces[J]. Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen . 2004, 23(4): 683-712.

攻读学位期间发表的学术论文

[1] 李小彦, 崔云安. 特殊 Orlicz 函数空间的光滑点[J].哈尔滨商业大学学报.(已录用)

致　谢

值此论文完成之际，谨向所有指导过我的老师、帮助过我的同学、朋友和默默支持着我的家人表示深深的感谢！

首先感谢我的导师崔云安教授，本文的工作是在导师的悉心指导下完成的，在这两年半的时间里，从收集资料，到本论文的开题，撰写，一直到论文全部完成无不凝结着老师的心血。我的导师在学术上不断进取、对人生理想执着追求的精神是我学习的榜样。学生丝毫的进步无不凝聚着老师的心血，学生点点滴滴的收获无不浸透着老师的汗水。在此毕业论文即将完成之际，首先对辛勤培育、教诲我的导师表示真诚的感谢！

感谢两年来所有传授我知识的老师，他们勤奋的工作作风、达观的人生态度都深深地感染了我。

感谢我的所有的同学，是他们陪伴我度过了长久的学习，研究阶段，帮助我解决问题，开拓思想。

最后我要真诚地感谢我的父母和亲人，感谢他们给予我的一如既往的关心支持和鼓励，使我得以健康成长并顺利完成学业！