УДК 513.88

Г. Я. ЛОЗАНОВСКИЙ, *канд. физ.-мат. наук*

О СОПРЯЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ РЕШЕТКЕ

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с вполне σ-конечной мерой; S — пространство всех конечных вещественных измеримых функций на нем (μ — эквивалентные функции, как обычно, отождествляются). Пусть X есть банахово идеальное пространство на (Ω, Σ, μ), т. е. X есть банахово пространство, являющееся векторным подпространством в S и удовлетворяющее условию: если $x \in X$, $y \in S$, $|y| \leqslant |x|$, то $y \in X$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$.

Будем считать, что носитель X есть все Ω. Дуальное пространство X' к X состоит из всех $y \in S$ таких, что $\|y\|_{X'} = \sup\left\{\int\limits_\Omega |xy|\,d\mu : x \in X,\ \|x\|_X \leqslant 1\right\} < \infty$. Из теоремы 6 [1] как частный случай вытекает следующее утверждение.

Теорема А. *Каждый* $z \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *представим в виде* $z = xy$, *где* $x \in X$, $y \in X'$. *При этом* $\|z\|_{L^1} = \inf\{\|x\|_X \|y\|_{X'} : x \in X,\ y \in X',\ xy = z\}$.

Основная цель настоящей заметки — обобщение теоремы 6 из [1]. Для $f \in X^*$, $u \in X$ через $f_{(u)}$ обозначим функционал на действующей по формуле $f_{(u)}(x) = f(ux)$, $x \in L^\infty$. Положим $K = \{f_{(u)} : f \in X^*,\ u \in X\}$.

Следующая теорема, обобщающая теорему А, является частным случаем основного результата настоящей заметки.

Теорема Б. *K есть компонента (т. е. полоса по терминологии Бурбаки) в пространстве* $(L^\infty)^*$, *сопряженном к* L^∞, *причем для любого* $g \in K$ *справедливо равенство* $\|g\|_{(L^\infty)^*} = \inf\{\|f\|_{X^*} \times \|u\|_X : f \in X^*,\ u \in X,\ f_{(u)} = g\}$.

Нам кажется, что результаты такого типа могут найти приложения и вне рамок теории векторных решеток (см., например, работу [2], в которой используется один частный случай теоремы А, полученный в [3]).

§ 1. Терминология и обозначения

Сопряженное к нормированному пространству X обозначается X^*. В терминологии и обозначениях из теории полуупорядоченных пространств мы следуем монографии [4]. Для произвольного K-пространства X через $W(X)$ обозначаем его максимальное расширение, $\tilde{X}$ и $\bar{X}$ суть пространства всех регулярных и вполне линейных функционалов на X. Элемент x K-линеала X называется *осколком* элемента $y \in X$, если $(y-x)\, d x$. Элемент **1** K-линеала X называется *единицей* (или слабой единицей), если $x \wedge \mathbf{1} > 0$ $\forall x > 0$. Наконец, вместо терминов «нормальный подлинеал», «нормальное подпространство», принятых в [4], мы используем более короткий термин «идеал».

§ 2. Формулировка основной теоремы

Наш основной результат будет сформулирован для следующих двух ситуаций.

Ситуация 1. X — банахово KN-пространство, $W = W(X)$ — его максимальное расширение. В W фиксируем единицу **1**. Через M обозначаем идеал ограниченных элементов в W, состоящий из всех $x \in W$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda \mathbf{1}\} < \infty$. Напомним, что W с единицей **1** является полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8]).

Ситуация 2. X — KB-линеал с единицей **1**, причем **1** есть квазивнутренняя точка конуса положительных элементов X_+. Последнее означает, что идеал ограниченных элементов плотен по норме в X. Здесь M состоит из всех $x \in X$ таких, что $\|x\|_M = \inf\{\lambda \geqslant 0 : |x| \leqslant \lambda \mathbf{1}\} < \infty$.

Заметим, что KB-линеалы такого типа как в ситуации 2 и несколько более общие изучались в [5] и [6]. В этих работах были построены реализации указанных пространств в виде пространств расширенных непрерывных функций на подходящих топологических пространствах. Нужно, однако, отметить, что к KB-линеалам, изучавшимся в [5] и [6], очевидным образом применима теорема Б. З. Вулиха об условиях внутренней нормальности (см. [7, с. 13]), поэтому основные результаты [5] и [6] по существу суть весьма частные случаи результатов, полученных в [7—9]. Напомним также, что в ситуации 2 X с единицей 1 является обобщенным полуупорядоченным кольцом (см. [4, гл. V, § 8] и [7]).

Таким образом, в обеих рассматриваемых ситуациях для $\forall u \in X$ $\forall x \in M$ однозначно определено произведение $ux \in X$. Это дает возможность по $\forall f \in X^*$ $\forall u \in X$ построить функционал $f_{(u)} : \in M^*$, действующий по формуле $f_{(u)} = f(ux)$, $x \in M$. Полагаем $K = \{f_{(u)} : f \in X^*, \ u \in X\}$. В обеих рассматриваемых ситуациях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *K есть компонента в пространстве M^*, причем для* $\forall g \in K$ *справедливо равенство* $\|g\|_{M^*} = \inf\{\|f\|_{X^*}\|u\|_X : f \in X^*, u \in X, \ f_{(u)} = g\}$.

Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству теоремы 1 для обеих указанных ситуаций.

§ 3. Некоторые леммы

1°. В этом пункте рассматривается ситуация 1. Заметим, что M^* есть KB-пространство с аддитивной нормой, т. е. (L)-пространство в смысле Какутани. Для $g \in M^*$ полагаем $J(g) = g(1)$. В пространстве $W(M^*)$ фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_0$, после чего можно говорить об умножении элементов в $W(M^*)$. Если H — произвольный идеал в в $W(M^*)$, то дуальное пространство $H' = \{h' \in H^{dd} : hh' \in M^*$ для $\forall h \in H$. Если $\|\cdot\|$ — монотонная банахова норма на H, то дуальная норма $\|\cdot\|'$ на H' определяется формулой $\|h'\|' = \sup\{J(|hh'|) : h \in H, \quad \|h\| \leqslant 1\}$, $h \in H'$.

Фиксируем какую-нибудь единицу $\mathbf{1}_1$ в $W(X^*)$ и пусть $R : W(X^*) \to W(M^*)$ есть соответствующая *каноническая реализация* (см. [10, теорема 3.1]). Иными словами, R есть изоморфизм $W(X^*)$ на некоторую компоненту пространства $W(M^*)$, удовлетворяющий следующим двум условиям: а) для $\forall f \in X^* \forall g \in M^*$ справедливо $(f_{(u)}\, dg \forall u \in X) \leftrightarrow (Rf \otimes dg)$; б) $R(\mathbf{1}_1)$ есть осколок элемента $\mathbf{1}_0$. Рассмотрим теперь пространство $(R(X^*))'$, дуальное к $R(X^*)$. Каждый $u \in X$ естественным образом порождает вполне линейный функционал на X^* поэтому для $\forall u \in X$ однозначно определен элемент $S(u) \in (R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u) = J(R(f)S(u))$ для $\forall f \in X^*$. Здесь $R(f)S(u)$ есть произведение в смысле умножения в $W(M^*)$.

Аналогично, для каждого $x \in M$ однозначно определен элемент $P(x) \in (M^*)'$, удовлетворяющий условию $g(x) = J(gP(x))$ для $\forall g \in M^*$.

Лемма 2. $(u \in X, \ x \in M, \ udx) \Rightarrow (S(u)\, dP(x))$.

Доказательство. Фиксируем e_0, $e_1 \in W$ такие, что $e_1 x = x$, $e_0 de_1$, $e_0 + e_1 = \mathbf{1}$, $e_0 u = u$. Для $i = 01$ положим $X_i^* = \{f \in X^* : f(v) = f(ve_i) \ \forall v \in X\}$; $M_i^* = \{g \in M^* : g(y) = g(ye_i) \ \forall y \in M\}$.

Ясно, что X_0^*, X_1^* — суть дизьюнктные компоненты, образующие разложение пространства X^*, а M_0^*, M_1^* — суть дизьюнктные компоненты, образующие разложение пространства M^*.

Заметим, что $f(u)=0$ $\forall f \in X_1^*$, $g(x)=0$ $\forall g \in M_0^*$, поэтому $S(u) \in (R(X_0^*))'$, $P(x) \in (M_1^*)'$. Теперь осталось только доказать, что $R(X_0^*)\, dM_1^*$. Возьмем произвольные $f \in X_0^*$, $g \in M_1^*$, $v \in X$. Так как $f_{(v)}(y) = f(vy) = f(e_0 vy)$, $y \in M$, $g(y) = g(e_1 y)$, $y \in M$, то из $e_0 de_1$ следует $f_{(v)}\, dg$. Итак, $R(f)\, dg$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $f \in X^*$, $u \in X$ справедливо равенство $f_{(u)}(e)\, R(f)\, S(u)$, где справа стоит произведение $R(f)$ на $S(u)$ в смысле умножения в $W(M^*)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $R(f)\, S(u) \in M^*$ по самому определению дуального пространства. Обозначим через E множество всех осколков единицы $\mathbf{1}$. Достаточно убедиться, что $f_{(u)}(e) = (R(f)\, S(u))(e)$ для $\forall e \in E$, ибо линейная оболочка E плотна по норме в M. Фиксируем $\forall e_0 \in E$ и положим $e_1 = \mathbf{1} - e_0$. Для $v \in X$ положим $f_0(v) = f(e_0 v)$, $f_1(v) = f(e_1 v)$; $f^\circ(v) = (R(f)\, S(v))(e_0)$, $f^1_{(v)} = (R(f)\, S(v))(e_1)$. Заметим, что $f^0(v) + f^1(v) = (R(f)\, S(v))(\mathbf{1}) = J(R(f(S(v)) = f(v)$, тем самым $f^0 + f^1 = f$. Покажем, что $f^0(v) = 0$ при $v \in X$, vde_0. Действительно, $f^0(v) = (R(f)S(v))(e_0) = J(R(f)\, S(v) \otimes P(e_0)) = J(0) = 0$, ибо $S(v)\, dP(e_0)$ в силу леммы 2. Аналогично убеждаемся, что $f^1(v) = 0$ при $v \in X$, vde_1. Теперь ясно, что $f^0 df^1$, $f_0 df^1$, $f_1 df^0$. Кроме того, f_0, df_1, $f_0 + f_1 = f^0 + f^1 = f$. Следовательно, $f_0 = f^0$, $f_1 = f^1$, откуда $f_{(u)}(e_0) = f(ue_0) = f_0(u) = f^0(u) = R(f)\, S(u))(e_0)$, тем самым $f_{(u)}(e_0) = (R(f)\, S(u))(e_0)$. Лемма доказана.

2°. В этом пункте рассматривается ситуация 2. Пусть $R: X^* \to M^*$ есть оператор сужения, т. е. $R(f) = f|_M$ для $f \in X^*$. Так как M плотно в X по норме, то R иньективен. В $W(M^*)$ фиксируем единицу, вводим функционал $J(g) = g(\mathbf{1})$, $g \in M^*$, после этого можно говорить о дуальных пространствах для идеалов из $W(M^*)$. Для каждого $u \in X$ однозначно определен элемент $S(u) \in (R(X^*))'$, удовлетворяющий условию $f(u) = J(R(f)\, S(u))$ для $\forall f \in X^*$.

Теперь можно убедиться, что лемма 3 справедлива и для ситуации 2. Доказательство этого, которое сходно с рассуждениями п. 1°, мы опускаем.

3°. ***Лемма 4.*** *Пусть V — K-пространство, H — KB-линеал, являющийся линейной подструктурой в V. Обозначим через ψ наименьший идеал в V, содержащий H, и для $\psi \in \psi$ положим $\|\psi\|_\psi = \inf\{\|h\|_H : h \in H,\ |\psi| \leqslant h\}$. Тогда $(\psi, \|\cdot\|_\psi)$ есть банахово KN-пространство,*

Несложное доказательство этой леммы, основанное на результате работы [1], мы опускаем.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Доказательство проводится одновременно для для обеих рассматриваемых ситуаций. Положим для краткости $\Phi = R(X^*)$, $\|\varphi\|_\Phi = \|R^{-1}(\varphi)\|_{X^*}$ для $\varphi \in \Phi$; $H = S(X)$, $\|h\|_H =$

$=\| S^{-1}(h)\|_X$ для $h\in H$. Через $M^*(\Phi)$ обозначим проекцию на компоненту пространства $W(M^*)$, порожденную Φ. В силу леммы 3 для доказательства теоремы 1 достаточно лишь установить справедливость следующих утверждений:

а) справедливо равенство $K=M^*(\Phi)$;

б) для $\forall g\in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\| g\|_{M^*}=\inf\times\times\{\|\varphi\|\cdot\| h\|_H : \varphi\in\Phi,\ h\in H,\ g=\varphi h\}$.

Обозначим через ψ идеал в $W(M^*)$, порожденный H, и для $\psi\in\psi$ положим $\|\psi\|_\psi=\inf\{\| h\|_H : h\in H,\ |\psi|\leqslant h\}$. В силу леммы 4 $(\psi, \|\cdot\|_\psi)$ есть банахово KN-пространство.

Покажем, что

в) $\psi'=\Phi$, $\|\cdot\|'_\psi=\|\cdot\|_\psi$.

Действительно, каждое из трех множеств Φ, ψ, $M^*(\Phi)$ порождает в $W(M^*)$ одну и ту же компоненту. Далее, ясно, что Φ является фундаментом в ψ' и для $\forall\varphi\in\Phi$ имеем $\|\varphi\|=\sup\times\times\sup\{J(|\varphi h|): h\in H,\ \| h\|_H<1\}=\sup\{J\otimes(|\varphi\psi|):\psi\in\psi,\ \ \|\psi\|_\psi<<1\}=\|\varphi\|'_\psi$. Теперь, так как Φ есть фундамент в ψ', $\|\cdot\|_\Phi$ совпадает с сужением нормы $\|\cdot\|'_\psi$ на Φ и обе нормы $\|\cdot\|_\Phi$, $\|\cdot\|'_\psi$ универсально полунепрерывны* и универсально монотонно полны, заключаем, что в) справедливо.

Применим теперь теорему 6 из [1]. В силу этой теоремы имеем:

г) $M^*(\Phi)=\{\varphi\psi:\varphi\in\Phi,\ \psi\in\psi\}$;

д) для $\forall g\in M^*(\Phi)$ справедливо равенство $\| g\|_{M^*}=\inf\times\times\{\|\varphi\|_\Phi\|\psi\|_\psi:\varphi\in\Phi,\ \psi\in\psi,\ g=\varphi\psi\}$.

Остается заметить, что из г) и д) очевидным образом следуют а) и б). Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору Б. З. Вулиху за внимание к настоящей работе и А. И. Бухвалову за проверку доказательств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах.— «Сиб. мат. журн.», 1969, № 3, с. 584—599.
2. Маркус А. С. Задача спектрального синтеза для операторов с точечным спектром.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1970, т. 34, № 3, с. 662—687.
3. Лозановский Г. Я. О банаховых структурах Кальдерона.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 5, с. 1018—1020.
4. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
5. Lotz H. P. Zur Idealstructur von Banachverbünden. Habilitationsschrift. Tübingen, 1969.

---

* Норма в KN-пространстве Y называется универсально полунепрерывной, если $(0\leqslant y_\alpha\uparrow y\in Y)\Rightarrow(\| y_\alpha\|_Y\uparrow\| y\|_Y)$. Норма в Y называется универсально монотонно полной, если $(0\leqslant y_\alpha\uparrow$ в Y и $\sup\| y_\alpha\|_Y<\infty)\Rightarrow(\exists\sup y_\alpha\in Y)$.

6. Schaefer H. H. On the representation of Banach lattices by continuous numerical functions. Math. Z., 1972, vol. 125, p. 215—232.
7. Вулих Б. З. О свойстве внутренней нормальности обобщенных полуупорядоченных колец.— «Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена», 1958, т. 166, с. 3—15.
8. Вулих Б. З. Обобщенные полуупорядоченные кольца.— «Мат. сб.», 1953, т. 33, с. 343—358.
9. Вулих Б. З. Некоторые вопросы теории полуупорядоченных множеств.— «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1953, т. 17, с. 365—388.
10. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах.— «Мат. сб.», 1971, т. 84, № 3, с. 331—352.
11. Amemiya I. A generalization of Riesz—Fischer's theorem.— «T. Math. Soc. Japan», 1953, vol. 5, p. 353—354.

Поступила 8 декабря 1975 г.