蘇州大學
SOOCHOW UNIVERSITY

硕士学位论文

论文题目 赋Orlicz范数的Orlicz-Lorentz空间的局部一致凸和全K-凸性

研究生姓名 马翠青

指导教师姓名 王金才

专业名称 基础数学

研究方向 泛函分析

论文提交日期 2011年4月

苏州大学学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得苏州大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

论文作者签名：马翠青　日　期：2011.4.8

苏州大学学位论文使用授权声明

本人完全了解苏州大学关于收集、保存和使用学位论文的规定，即：学位论文著作权归属苏州大学。本学位论文电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。苏州大学有权向国家图书馆、中国社科院文献信息情报中心、中国科学技术信息研究所（含万方数据电子出版社）、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社送交本学位论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存和汇编学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索。

涉密论文□

本学位论文属　　　　　　在____年___月解密后适用本规定。

非涉密论文☑

论文作者签名：马翠青　日　期：2011.4.8

导 师 签 名：王金才　日　期：2011.4.8

摘　要

A.Kamińska 于 1990 年提出并研究了 Orlicz–Lorentz 空间，该空间不仅可作为对称空间的模型，而且在插值理论中也有重要的作用．近年来越来越多的数学家对此空间产生了兴趣．关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何性质已被很多学者所关注．自从 1999 年吴从炘和任丽伟给出了 Orlicz–Lorentz 空间的 Orlicz 范数以来，关于这种赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何研究成果却很少，并且缺乏系统性．本文我们将继续对赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何性质作研究.

全文分三个章节.

第一章，主要叙述了 Orlicz–Lorentz 空间的基本理论.

第二章，给出了赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 序列空间的局部一致凸性的刻画，得到如下定理：

定理 2.1 令权序列是正则的．　$\lambda^{\circ}_{\varphi,w}$ 是局部一致凸的 (LUR) $\Longleftrightarrow$ 下列两个条件满足：

(i) φ 在 $[0,\gamma]$ 上是严凸的，其中 $\gamma = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$;

(ii)$\varphi \in \delta_2$ 和 $\psi \in \delta_2$.

第三章，讨论了赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的全 k- 凸性，并给出该空间里全 k- 凸性的本质刻画，即如下定理：

定理 3.1 赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}(0,\infty)$(或 $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}(0,1)$) 是全 $K-$ 凸的（ $K \geq 2$ ）当且仅当 φ 和 ψ 满足 Δ_2 条件 (或满足较大变量的 Δ_2 条件), φ 是严凸的，且 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$ (或 ω(t)>0 , 0<t<1).

关键词: Orlicz–Lorentz 空间； Orlicz 范数；局部一致凸性；全 k- 凸性.

作　　者：马翠青

指导老师：王金才

The criterion of the fully k-convexity and locally uniform rotundity of Orlicz–Lorentz spaces with the Orlicz norm

Abstract

A.Kamińska gave the notion of Orlicz–Lorentz spaces in 1990. The spaces not only can be used as a model of the symmetric spaces, but also play an important role in the interpolation theory. In recent years, more and more mathematicians became interested in the spaces. Many conclusions about the Orlicz–Lorentz spaces with the Luxemburg norm have been obtained. Since Wu and Ren's giving the Orlicz norm of Orlicz–Lorentz spaces in 1999, the results about the Orlicz–Lorentz spaces with this norm was sporadic, and lack of system.So we will continue to study the Orlicz–Lorentz spaces with the Orlicz norm.

This paper has three chapters:

The first chapter mainly states the fundamental theories of Orlicz–Lorentz spaces.

The second chapter gives the characterization of locally uniform rotundity in sequence spaces with the Orlicz norm, we obtain the following theorem:

Theorem 2.1 $\lambda^{\circ}_{\varphi,w}$ is locally uniform rotundity (LUR) if and only if the following two conditions are satisfied:

(i) φ is strictly convex on $[0,\gamma]$, where $\gamma = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$,

(ii) $\varphi \in \delta_2$ and $\psi \in \delta_2$.

In the last chapter, We mainly research the characterization of fully K-convex in Orlicz-Lorentz spaces with the Orlicz norm, and give the essential characterization of the fully k-convexity in the spaces, and the following theorem is obtained :

Theorem 3.1 Orlicz–Lorentz spaces equipped with Orlicz norm $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}(0,\infty)$ (respectively, $\Lambda^{\circ}_{\varphi,\omega}(0,1)$) is fully K-convex for all $K \geq 2$, if and only if both φ and ψ satisfies the $\triangle_2$ condition (respectively, $\triangle_2$ condition for large values), φ is strictly convex, and $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$ (respectively, ω(t)>0 for all 0<t<1).

Keywords: Orlicz–Lorentz spaces; Orlicz norm; locally uniform rotundity; fully k-convexity.

Written by Ma Cuiqing

Supervised by Prof. Wang Jincai

目　录

引 言

一　背景

早在 1990 年，A.Kamińska 开始对赋 Luxemburg 范数的 Orlicz−Lorentz 空间的几何性质进行研究 (见 [1], [2]), 此后在其论文 (见 [3]) 中，又给出并证明了在 $\gamma=\infty$ 的情况下该空间一致凸性的等价性条件. 1995 年，A.Kamińska 又与 P.Lin 以及 H.Sun 一起，在论文 (见 [4]) 中刻划出一致正规结构的等价条件. 紧接着在 H.Hudzik, A.Kamińska 和 M.Mastylo 1996 年合著的论文 [5] 中，得出了 $\gamma=\infty$ 的情况下 Orlicz−Lorentz 空间的一致非方性的等价条件以及一系列关于该空间性质的结论. 1997 年，吴从炘和任丽伟 (见 [6]) 又给出了 Orlicz−Lorentz 空间局部一致凸的等价刻划. 2007 年在 A.Kamińska 与 C.Lennard, M.Mastylo 以及 S.Mikuska 合著的论文 [7] 中，对 Orlicz−Lorentz 空间的弱一致 Kadec-Klee 性质，弱 * 一致 Kadec-Klee 性质作了研究. 总之关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz−Lorentz 空间的几何性质的研究已是硕果累累.

与函数空间相比，Orlicz−Lorentz 序列空间的研究相对较少, 姚正安等人在 [8] 中给出了 Orlicz−Lorentz 序列空间的构造，得出并证明了该空间自反当且仅当 $\varphi\in\Delta_2\cap\nabla_2$ 的重要结论, 并且讨论了序列空间的子空间的某些问题. 2008 年 P.Foralewski, H.Hudzik 和 L.Szymaszkiewicz 在论文 [9] 中，对 Orlicz−Lorentz 序列空间的几何性质和拓扑性质都做了研究，使得该空间的理论得到补充和完善.

1999 年，吴从炘和任丽伟 (见 [10]) 在 Orlicz−Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\gamma<\infty)$ 上定义了 Orlicz 范数

$$\|f\|^{o}=\sup_{\rho_{\psi}(g)\leq 1}\int_{0}^{\gamma}f^{*}(t)g^{*}(t)\omega(t)dt,$$

并给出了在这个范数下严格凸性的刻划. [11] 中，Cerda, Hudzik, Kamińska 和 Mastylo 研究了赋 Luxemburg 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间的局部一致凸性和严凸性，并且

证明了二者不是等价的. 然而后继的工作很少. 2009 年, 王金才和陈怡把吴从炘和任丽伟关于 Orlicz 范数的定义推广到一般情形 ($\gamma \leq \infty$), 并得到了关于赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 函数空间的一致凸性的等价刻画 ([12]). 2010 年, 王金才和宁哲研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间的严凸性和一致凸性. 宁哲又在其毕业论文中研究了赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 函数空间的局部一致凸性. 本文我们将研究赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间的局部一致凸性和赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 函数空间的全 k- 凸性.

二 基本概念和命题

本文用 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{R}_+$ 、 $\mathbb{N}$ 分别表示实数集, 非负实数集和自然数集.

一个函数 $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 称为 Orlicz 函数, 若它满足: (1)φ 为凸的, 连续的; (2)$\varphi(0) = 0, \varphi(u) > 0(u > 0)$; (3)$\frac{\varphi(u)}{u} \to \infty(u \to \infty)$, $\frac{\varphi(u)}{u} \to 0(u \to 0)$.

函数 φ 的 *Young* 共轭函数 (余函数) 定义为: $\psi(v) = \sup\limits_{u>0}\{|uv| - \varphi(u)\}$. 在整篇文章中我们假设 φ 为 Orlicz 函数. 如果 φ 为 Orlicz 函数, 则它的 *Young* 共轭函数 ψ 也是 Orlicz 函数. 设 $p(u)$ 和 $q(u)$ 分别是 $\varphi(u)$ 和 $\psi(u)$ 的右导数, 则 $p(u)$ 和 $q(u)$ 是非降的, 右连续的, 且满足: $\varphi(u) = \int_0^u p(t)dt, \psi(u) = \int_0^u q(t)dt$, 并且有 $p(0) = q(0) = 0$, $p(\infty) = q(\infty) = \infty$. 由 $q(t) = \sup\{s : p(s) \leq t\}$, 我们容易得到 $p(q(t) - \varepsilon) \leq t$ 及 $t \leq q(p(t))$. 众所周知 φ 和其余函数 ψ 满足 *Young* 不等式, 即对任意的 $u, v \geq 0$ 都有 $uv \leq \varphi(u) + \psi(v)$ 成立, 并且该式等号成立当且仅当 $v = p(u)$. Orlicz 函数的进一步性质见 [13], [15] 和 [19].

由于 Orlicz 函数 $\varphi(u)$ 是凸的, 故有 (a) 对 $0 < \alpha \leq 1$, 有 $\varphi(\alpha x) \leq \alpha\varphi(x)$; 对 $\alpha \geq 1$, 有 $\varphi(\alpha x) \geq \alpha\varphi(x)$. (b) 对任意的实数 u, v, $\alpha \in [0, 1]$, 都有 $\varphi(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha\varphi(u) + (1 - \alpha)\varphi(v)$(见 [13]).

函数 φ 称为严格凸的, 如果对 $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$ 都有

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}.$$

函数 φ 称为在 $[0,\gamma]$ 上是一致凸的，如果对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $[0,\gamma]$ 上满足 $|u-v|\geq\varepsilon\max\{|u|,|v|\}$ 的 u,v 都有

$$\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)<(1-\delta)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}.$$

我们称 φ 满足 Δ_2 条件，若存在 $k>1$, 使得对任意的 $u\geq 0$ 都有 $\varphi(2u)\leq k\varphi(u)$, 记为 $\varphi\in\Delta_2$.

称 φ 满足较大变量的 Δ_2 条件，若存在 $k>1$, $u_0\geq 0$ 使得对任意的 $u\geq u_0$ 都有 $\varphi(2u)\leq k\varphi(u)$, 记为 $\varphi\in\Delta_2(\infty)$.

称 φ 满足较小变量的 Δ_2 条件，若存在 $k>1$, $u_0\geq 0$ 使得对任意的 $0\leq u\leq u_0$, 都有 $\varphi(2u)\leq k\varphi(u)$, 记为 $\varphi\in\delta_2$.

若 $\varphi\in\Delta_2(\varphi\in\Delta_2(\infty);\varphi\in\delta_2)$, 则称 $\psi\in\nabla_2(\psi\in\nabla_2(\infty);\psi\in\nabla_2(0))$.

关于 Δ_2 条件，我们有以下有用的性质 (见 [13]):

$\varphi\in\Delta_2\Leftrightarrow$ 存在 $l>1,x_0>0,K>1$, 对任意的 $x>x_0$, 都有 $\varphi(lx)\leq K\varphi(x)$.

定义 φ 的模 $\rho_\varphi:L^0\to[0,\infty]$ 如下：

$$\rho_\varphi(f):=\int_0^\gamma\varphi(f^*)\omega=\int_0^\gamma\varphi(f)^*\omega=\int_0^\gamma\varphi(f(t))^*\omega(t)dm(t).$$

它有下列性质： (i)$\rho_\varphi(f)=0$ 当且仅当 $f=0$; (ii)$\rho_\varphi(f)=\rho_\varphi(-f)$; (iii)(次可加性) 若 $\mathrm{supp}f\cap\mathrm{supp}g=\emptyset$, 则 $\rho_\varphi(f+g)\leq\rho_\varphi(f)+\rho_\varphi(g)$; (iv) $\rho_\varphi(\alpha f+\beta g)\leq\alpha\rho_\varphi(f)+\beta\rho_\varphi(g)$, 其中 $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\beta\geq 0$.

一个函数 $\sigma:[0,\gamma)\to[0,\gamma)$ 被称作保测变换，若对于任意可测集 $E\subset[0,\gamma)$, $\sigma^{-1}(E)$ 是可测的，并且有 $mE=m(\sigma^{-1}(E))$.

令 X 是一个 Banach 空间， B 是 X 的单位球. 称 X 是全 k- 凸的，若 B 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n_1\to\infty}\lim\limits_{n_2\to\infty}\cdots\lim\limits_{n_k\to\infty}\|x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}\|=k$, 则 $\{x_n\}$ 必收敛.

第一章　Orlicz–Lorentz 空间的基本理论

起源于上世纪三十年代形成于上世纪五十年代的 Orlicz 空间理论已形成了一个较为完整的理论体系. 特别地, 几何理论已近乎完美. 自从 1990 年 A.Kamińska 提出并研究了 Orlicz–Lorentz 空间以来, 关于赋 Luxemburg 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何性质的研究已硕果累累 (见 [1], [2]), 而关于赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何性质的研究却很少, 这里我们将继续研究赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的几何性质. 为叙述方便, 我们将 Orlicz–Lorentz 空间的基本定义叙述如下.

令 L^0 为所有关于 Lebesgue 测度 m 可测的函数 $f:[0,\gamma)\to\mathbb{R}$ 组成的函数集. 一个函数 $\omega(t):[0,\gamma)\to\mathbb{R}$ $(\gamma\le\infty)$ 被称作权函数, 如果它是非增并且局部可积的.

对于任意的 $f\in L^0$ 定义其分布函数为:

$$d_f(\theta)=m\{t\in[0,\gamma):|f(t)|>\theta\},$$

其中 $\theta\ge 0$. 它的右逆函数

$$f^*(t)=\inf\{\theta>0:d_f(\theta)\le t\},t\in[0,\gamma)$$

称为 f 的非增等可测重排. 显然 $\varphi(f^*(t))=\varphi(f(t))^*$.

Orlicz–Lorentz 空间 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 定义为

$$\Lambda_{\varphi,\omega}=\{f\in L^0:存在\lambda>0,使\rho_\varphi(\lambda f)<\infty\}.$$

l^0 定义为所有 $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 这样的序列构成的集合. 对于每一个 $x=(x(i))_{i=1}^\infty\in l^0$, 定义 $\mathrm{supp}x=\{i\in\mathbb{N}:x(i)\ne 0\}$, 且记 $|x|(i)=|x(i)|$, 这里 $i\in\mathbb{N}$.

对于任意的 $x\in l^0$, 定义其分布函数为 $\mu_x:\mathbb{R}_+\to\{\infty\}\cup\mathbb{N}$, 其中 $\mu_x(\lambda)=m\{i\in\mathbb{N}:|x(i)|>\lambda\}$. 定义其非增重排序列 $x^*=(x^*(i))_{i=1}^\infty$, 其中 $x^*(i)=\inf\{\lambda:\mu_x(\lambda)<i\}$.

一个序列 $\omega:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ 被称为权序列, 若它满足: $(1)\omega(1)\ge\omega(2)\ge\cdots\ge\omega(n)\ge$

$\omega(n+1) \geq \cdots$; (2)$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\omega(i) = +\infty$. 称权序列是正则的，如果 $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\omega(k)$, 则对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 存在与 n 无关的数 $K > 1$, 使得 $S(2n) \geq KS(n)$.

对于 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty} \in l^0$, 令 $\rho_\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x^*(i))\omega(i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi(x(i))^*\omega(i)$. $\lambda_{\varphi,\omega}$ 表示由模 ρ_φ 生成的 Orlicz–Lorentz 序列空间，即

$$\lambda_{\varphi,\omega} = \{x = (x(i)) : \text{存在 } \lambda > 0, \text{使得 } \rho_\varphi(\lambda x) < \infty\},$$

且 $\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : \rho_\varphi(\frac{x}{\lambda}) \leq 1\}$(见 [17]), 这里 "$\|\cdot\|$" 即之为序列空间中的 Luxemburg 范数． $\lambda_{\varphi,\omega}$ 的性质与 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 的性质类似 (见 [2], [3], [7], [11] 和 [18]).

1999 年， [10] 中吴从炘和任丽伟定义了 $\Lambda_{\varphi,\omega}(\gamma < \infty)$ 中的 Orlicz 范数为:

$$\|f\|^\circ = \sup_{\rho_\psi(g)\leq 1}\int_0^\gamma f^*(t)g^*(t)\omega(t)dt.$$

论文 [12] 中第一作者和陈怡将 [10] 中的原始定义推广到一般情形 ($\gamma \leq \infty$), 即对 $f \in \Lambda_{\varphi,\omega}[0,\gamma)(\gamma \leq \infty)$, Orlicz 范数定义如下:

$$\|f\|^\circ = \inf_{k>0}\frac{1}{k}(1 + \rho_\varphi(kf)).$$

易见这个定义可以拓展到 Orlicz 序列空间 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 的情形.

为了方便，赋 Orlicz 范数的 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 记为 $\Lambda_{\varphi,\omega}^\circ$. 赋 Luxemburg 范数和 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 序列空间分别记为 $\lambda_{\varphi,\omega}$ 和 $\lambda_{\varphi,\omega}^\circ$. 即 $\lambda_{\varphi,\omega} = (\lambda_{\varphi,\omega}, \|\cdot\|)$, $\lambda_{\varphi,\omega}^\circ = (\lambda_{\varphi,\omega}, \|\cdot\|^\circ)$.

第二章　赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间的局部一致凸性

本章我们将研究赋 Orlicz 范数的 Orlicz−Lorentz 序列空间的局部一致凸性. 我们先给出需要用到的一些基本定义.

一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为严格凸的，如果对于任意 $x, y \in X$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$, 则 $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为局部一致凸的 ($X \in (LUR)$), 如果 $x, y_n \in S(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x + y_n\| = 2$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0$, 其中 $S(X)$ 是 X 的单位球面.

权序列 $\omega = (\omega(k))$ 称为正则的，若存在常数 $K > 1$, 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 均有 $S(2n) \geq KS(n)$, 其中 $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega(k)$. $X \in (LUR^*)$ 表示 X 具有 (LUR) 性质，但仅仅考虑在 (LUR) 定义下的非增、非负元素.

Orlicz 序列空间中的 Orlicz 范数定义如下：

$$\|f\|^\circ = \inf_{k>0} \frac{1}{k}(1 + \rho_\varphi(kf)).$$

[15] 中证明的 Orlicz 函数空间的 Orlicz 范数的性质，对 Orlicz 序列空间也是成立的. 现列举如下：

1° 对任意的 $f \in \lambda_{\varphi,\omega}$, $\|f\| \leq \|f\|^\circ \leq 2\|f\|$;

2° 如果 $\|f\|^\circ \leq 1$, 则 $\rho_\varphi(f) \leq \|f\|^\circ$;

3° $\|f\|^\circ = \sup\limits_{\rho_\psi(g)\leq 1} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f^*(i)g^*(i)\omega(i)$;

4° $\|\chi_{1,n}\|^\circ_{\lambda_{\varphi,w}} = \psi^{-1}\left(\frac{1}{S(n)}\right) \cdot S(n)$, $\|\chi_{1,n}\|_{\lambda_{\varphi,w}} = \frac{1}{\varphi^{-1}\left(\frac{1}{S(n)}\right)}$,

其中 $\chi_{1,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(i)$, $e_i = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{i-1}, 1, 0, \cdots)$;

5° 对任意的 $f \in \lambda_{\varphi,\omega}$, $k \in K(f) = [k^*, k^{**}]$ 当且仅当

$$\|f\|^\circ = \frac{1}{k}(1 + \rho_\varphi(kf)) = \inf_{h>0} \frac{1}{h}(1 + \rho_\varphi(hf)),$$

其中 $k^*=\inf\{h>0:\rho_\psi(p(h|f|))\geq 1\}, k^{**}=\sup\{h>0:\rho_\psi(p(h|f|))\leq 1\}$;

6° (i) $\inf\{k:k\in K(x),\|x\|^\circ=1\}>1 \Longleftrightarrow \varphi\in\delta_2$;

(ii) 集合 $Q=\bigcup\{K(f):a\leq\|f\|^\circ\leq b\}$ 是有界的 $(\forall\, b\geq a>0)$, $\Longleftrightarrow \varphi\in\nabla_2(0)$.

为了证明主要定理，我们给出如下一系列引理.

引理 2.1 令权序列 ω 是正则的, $E=\{j+1,j+2,\cdots\}$, $E'=\{2j+2,2j+3,\cdots\}$. 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\rho_{\varphi,j}(x)<\delta$, 有 $\rho_\varphi(x|_{E'})<\varepsilon$, 其中 $x=x^*, \rho_{\varphi,j}(x)=\sum\limits_{i=j+1}^{\infty}\varphi(x(i))\omega(i)$, δ 与 x 和 j 无关.

证明　因为 ω 是正则的，存在 $k>1$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}$, 有 $S(2n)\geq kS(n)$. 因此, $\sum\limits_{i=j+1}^{2j+2}\omega(i)=S(2(j+1))-S(j)\geq(k-1)S(j)$. 对 $\varepsilon>0$, 选取 $\delta=\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{k-1}}$. 这样，对 $x=x^*$ 满足 $\rho_{\varphi,j}(x)<\delta$, 我们有 $\varphi(x(2(j+1)))\sum\limits_{i=j+1}^{2(j+1)}\omega(i)\leq\sum\limits_{i=j+1}^{2(j+1)}\varphi(x(i))\omega(i)\leq\rho_{\varphi,j}(x)<\delta$. 因此,

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(x|_{E'}) &\leq \sum_{i=1}^{j}\varphi(x(2j+1+i))\omega(i)+\delta\\
&\leq \varphi(x(2j+2))S(j)+\delta\\
&\leq \frac{\delta S(j)}{S(2(j+1))-S(j)}+\delta\\
&\leq (1+\frac{1}{k-1})\delta=\varepsilon.
\end{aligned}$$

引理 2.2 令 $\varphi\in\delta_2$. 则对任意的 $L>0,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\rho_\varphi(u)\leq L, \rho_\varphi(v)\leq\delta\Rightarrow|\rho_\varphi(u+v)-\rho_\varphi(u)|<\varepsilon,$$

其中 $u=u^*, v=v^*$.

证明 类似于 [13, 引理 1.40] 的证明.

引理 2.3　令权序列 ω 是正则的，$\varphi\in\delta_2,\psi\in\delta_2$, $x_n=x_n^*, y_n=y_n^*\in S(\lambda_{\varphi,w}^\circ)$ 且 $\|x_n+y_n\|^\circ\to 2$. 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $n'\in\mathbb{N}$, $\delta>0$, 满足对所有的 $n>n'$,

$$\|y_n|_E\|^\circ<\delta\Rightarrow\|x_n|_{E'}\|^\circ<\varepsilon$$

成立，其中 $E=\{j+1,j+2,\cdots\}$, $E'=\{2j+2,2j+3,\cdots\}$.

证明 假设 $\|x_n\|^\circ = \|y_n\|^\circ = 1$, 且 $k_n^x \in K(x_n), k_n^y \in K(y_n)$. 由 $\psi \in \delta_2$ 和 6° 知, $\{k_n^x\}.\{k_n^y\}$ 是有界的, 即存在 $d > 1$, 使得 $k_n^x \le d$, $k_n^y \le d$. 易见 $\frac{k_n^x}{k_n^x + k_n^y}, \frac{k_n^y}{k_n^x + k_n^y} \in [a,b] \subset (0,1)$, 其中 $a = \frac{1}{1+d}, b = \frac{d}{1+d}$. 由 $\psi \in \delta_2$, 我们断言: 对任意的 $l \in [a,b]$, 存在与 l 无关的 $\beta > 0$, 满足

$$\varphi(lu) \le (l-\beta)\varphi(u), 0 \le u \le \gamma = q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right), \tag{1}$$

其中 q 是 ψ 的右导函数. 事实上, 对固定的 $u \in (0,\gamma]$, 令 $F(t) = \frac{\varphi(tu)}{t\varphi(u)}, t \in [a,b]$, 则右导函数 $F'(t) \ge 0$. 因此 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上是非减的. 对任意的 $l \in [a,b]$, $F(l) \le F(b)$. 由 $\psi \in \delta_2$ 知, 存在 $\eta > 0$ 使得 $\varphi(bu) \le (b-\eta)\varphi(u)$, $u \in [0,\gamma]$, 即 $F(b) \le (1 - \frac{\eta}{b})$. 因此, 对任意的 $l \in [a,b]$,

$$\varphi(lu) \le l(1-\frac{\eta}{b})\varphi(u) = (l - \frac{l}{b}\eta)\varphi(u) \le (l - \frac{a}{b}\eta)\varphi(u), u \in [0,\gamma].$$

取 $\beta = \frac{a}{b}\eta$, 则 (1) 成立.

由引理 2.2 知, 对任意的 $\alpha > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $\rho_\varphi(x) \le d$, $\rho_\varphi(y) < \delta$, 推出 $|\rho_\varphi(x+y) - \rho_\varphi(x)| < \alpha$.

定义 $k_n = \frac{k_n^x k_n^y}{k_n^x + k_n^y}$, 则

$$\rho_\varphi(k_n x_n) \le \frac{k_n^y}{k_n^x + k_n^y}\rho_\varphi(k_n^x x_n) = \frac{k_n^y}{k_n^x + k_n^y}(k_n^x - 1) \le d.$$

因此 $\rho_\varphi(k_n y_n|_E) < \delta$, 故

$$|\rho_{\varphi,j}(k_n(x_n+y_n)|_E) - \rho_{\varphi,j}(k_n x_n|_E)| \le |\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n)|_E) - \rho_\varphi(k_n x_n|_E)| < \alpha.$$

易见 $\|y_n|_E\|^\circ < \frac{\delta}{d} \Longrightarrow \rho_\varphi(k_n y_n|_E) \le \|k_n y_n|_E\| \le \|k_n y_n|_E\|^\circ < \delta$. 因此对 y_n 满足 $\|y_n|_E\|^\circ < \frac{\delta}{d}$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in E}\varphi(k_n(x_n+y_n)(i))\omega(i) &\le \sum_{i\in E}\varphi(k_n x_n(i))\omega(i) + \alpha \\ &\le \left(\frac{k_n^y}{k_n^x + k_n^y} - \beta\right)\sum_{i\in E}\varphi(k_n^x x_n(i))\omega(i) + \alpha.\end{aligned}$$

最后一个不等式利用这个事实: 对任意的 $i \in \mathbb{N}$, $k_n^x x_n(i) \le k_n^x x_n(1) \le \gamma$. 事实上, 对任意的 $0 < \varepsilon < k_n^x$, $\psi(p((k_n^x - \varepsilon)x_n(1)))\omega(1) \le \rho_\psi(p((k_n^x - \varepsilon)x_n)) \le 1$, 即 $(k_n^x - \epsilon)x_n(1) \le$

$q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$. 这样，对任意的 $i\in\mathbb{N}$, $k_n^x x_n(i)\le k_n^x x_n(1)\le\gamma$.

注意到：$\rho_\varphi(k_n^x x_n)=k_n^x-1, \rho_\varphi(k_n^y y_n)=k_n^y-1$, 且 $\|x_n+y_n\|^o\to 2$，我们有

$$\begin{aligned}
2 &\ge \|x_n\|^\circ+\|y_n\|^\circ=\frac{1}{k_n^x}[1+\rho_\varphi(k_n^x x_n)]+\frac{1}{k_n^y}[1+\rho_\varphi(k_n^y y_n)]\\
&= \frac{k_n^x+k_n^y}{k_n^x k_n^y}\left[1+\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^x x_n)+\frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^y y_n)\right]\\
&\ge \frac{k_n^x+k_n^y}{k_n^x k_n^y}\left[1+\rho_\varphi\left(\frac{k_n^x k_n^y}{k_n^x+k_n^y}(x_n+y_n)\right)\right]\\
&\ge \|x_n+y_n\|^o\to 2.
\end{aligned}$$

因此存在 $n'\in\mathbb{N}$, 对所有的 $n>n'$, $\frac{1}{k_n}[1+\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n))]>2-\alpha$. 故

$$\begin{aligned}
k_n\alpha &> 2k_n-1-\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n))\\
&= \frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}(k_n^y-1)+\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}(k_n^x-1)-\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n))\\
&= \frac{k_n^x}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^y y_n)+\frac{k_n^y}{k_n^x+k_n^y}\rho_\varphi(k_n^x x_n)-\rho_\varphi(k_n(x_n+y_n))\\
&\ge \beta\sum_{i>j}\varphi(k_n^x x_n(i))\omega(i)-\alpha.
\end{aligned}$$

所以

$$\rho_{\varphi,j}(k_n^x x_n)\le\frac{(k_n+1)\alpha}{\beta}<\frac{d+1}{\beta}\alpha.$$

由 $\varphi\in\delta_2$ 和引理 2.1 知，选取充分小的 α 使得 $\|x_n|_{E'}\|\le\|k_n^x x_n|_{E'}\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 则对 $n>n'$, $\|x_n|_{E'}\|^\circ\le 2\|x_n|_{E'}\|<\varepsilon$.

引理 2.4(G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 G.Pólya [16, page 261]) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_j^*b_j^*=max\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_jb_j: a_j>0,b_j>0\}$, 其中 a_j^* 表示 a_j 的递减重排，b_j^* 表示 b_j 的递减重排.

定理 2.1 令权序列是正则的. $\lambda_{\varphi,w}^\circ$ 是局部一致凸的 (LUR) $\Longleftrightarrow$ 下列两个条件满足：

(i) φ 在 $[0,\gamma]$ 上是严凸的，其中 $\gamma=q\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right)$.

(ii) $\varphi\in\delta_2$ 和 $\psi\in\delta_2$.

证明 充分性. 由 [11, 定理 1 和引理 3], 我们仅证明 $\lambda_{\varphi,\omega}^\circ\in$ (LUR*). 假设 $f,g_n\in S(\lambda_{\varphi,w}^\circ)$, $f=f^*$, $g_n=g_n^*$, $\|f+g_n\|^o\to 2$. 令 $k\in K(f), h_n\in K(g_n)$. 由 $\varphi\in\delta_2,\psi\in\delta_2$ 和 6°

知，我们有 $1 < d = \sup_n\{k, h_n\} < +\infty$. 定义

$$a = \inf_n\left\{\frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n}\right\}, b = \sup_n\left\{\frac{k}{k+h_n}, \frac{h_n}{k+h_n}\right\}.$$

则 $[a,b] \subset (0,1)$.

由 $\sum_{i=1}^{+\infty}\omega(i) = +\infty$, 我们有 $f(i) \to 0$. 因此对 $\varepsilon > 0$, 存在 $j_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|f\chi_A\| < \frac{\varepsilon}{6d}, \tag{2}$$

其中 $A = \{j > j_0 : j \in \mathbb{N}\}$. 由引理 2.3 知，存在 $n' \in \mathbb{N}$, $\delta_1 > 0$, 使得对所有 $n > n'$, 有

$$\|f|_E\|^\circ < \delta_1 \Rightarrow \|g_n|_{E'}\|^\circ < \frac{\varepsilon}{3d}.$$

其中 $E = \{j+1, j+2, \cdots\}$, $E' = \{2j+2, 2j+3, \cdots\}$.

选取一个 $j_1 > j_0$ 和集合 $B = \{j > j_1 : j \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\|f|_B\|^\circ < \delta_1$. 则对 $n > n'$, 我们有

$$\|g_n|_{B'}\|^\circ < \frac{\varepsilon}{3d}. \tag{3}$$

定义 $c = f(2j_1+2)$. 则 $f(j) \le c$, $j \in B'$;$f(j) \ge c$, $j \in \mathbb{N}\backslash B'$. 为了方便，我们记 $D = \mathbb{N}\backslash B'$. 因为 φ 在 $[0,\gamma]$ 上是严凸的，由 [13, 命题 1.4], 对 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $p > 0$ 使得

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) \le (1-p)[\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)],$$

其中 $\lambda \in [a,b]$, $\max\{|u|,|v|\} \in [c,\gamma]$, $|u-v| \ge \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}\max\{|u|,|v|\}$.

定义 $T_n = \{i \in D : |kf(i) - h_n g_n(i)| \ge \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}\max\{|kf(i)|, |h_n g_n(i)|\}\}$. 则

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi((kf - h_n g_n)\chi_{D\backslash T_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi(kf - h_n g_n)\chi_{D\backslash T_n})^*(i)\omega(i) \\
&\le \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi(k(f\chi_{D\backslash T_n})^*(i)) + \varphi(h_n(g_n\chi_{D\backslash T_n})^*(i))\omega(i) \\
&\le \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}(\rho_\varphi(kf) + \rho_\varphi(h_n g_n)) \\
&\quad = \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}(k + h_n - 2) \le \frac{\varepsilon_1}{2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

也有，

$$\begin{aligned}
&2-\|f+g_n\|^\circ=\|f\|^\circ+\|g_n\|^\circ-\|f+g_n\|^\circ\\
&\geq\frac{1}{k}[1+\rho_\varphi(kf)]+\frac{1}{h_n}[1+\rho_\varphi(h_ng_n)]\\
&\quad-\frac{k+h_n}{kh_n}\left[1+\rho_\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f+g_n)\right)\right]\\
&=\frac{k+h_n}{kh_n}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(i))+\frac{k}{k+h_n}\varphi(h_ng_n(i))\right.\\
&\quad\left.-\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f(i)+g_n(i))\right)\right]\omega(i).
\end{aligned}\tag{5}$$

如同引理 2.3 的证明，我们可以证明：对 $i\in\mathbb{N}$, 有 $kf(i)\leq kf(1)\leq\gamma$. 类似地，对任意的 $i\in\mathbb{N}$, 有 $h_ng_n(i)\leq\gamma$. 因此在 T_n 上，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{kh_n}{k+h_n}(f(i)+g_n(i))\right)&=\varphi\left(\frac{h_n}{k+h_n}kf(i)+\frac{k}{k+h_n}h_ng_n(i)\right)\\
&\leq(1-p)\left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(i))+\frac{k}{k+h_n}\varphi(h_ng_n(i))\right].
\end{aligned}\tag{6}$$

现在我们假设 $T_n=\{i_1,i_2,\cdots,i_{t_n}\}$. 定义 T_n 上的一个非增序列 (也称作 T_n 上的非增重排) 为

$$(kf-h_ng_n)^*(i_s)=((kf-h_ng_n)\chi_{T_n})^*(s),$$

其中 $s\in H_n=\{1,2,\cdots,t_n\}$. 显然，存在一个一一映射 $\sigma_n:H_n\to T_n$ 使得 $(kf-h_ng_n)^*(i_s)=((kf-h_ng_n)\chi_{T_n})(\sigma_n(s))$. 这样，由引理 2.4, (5) 和 (6) 得

$$\begin{aligned}
2-\|f+g_n\|^\circ&\geq p\cdot\frac{k+h_n}{kh_n}\sum_{i\in T_n}\left[\frac{h_n}{k+h_n}\varphi(kf(i))+\frac{k}{k+h_n}\varphi(h_ng_n(i))\right]\omega(i)\\
&=p\sum_{i\in T_n}\left[\frac{1}{k}\varphi(kf(i))+\frac{1}{h_n}\varphi(h_ng_n(i))\right]\omega(i)\\
&\geq p\sum_{s\in H_n,i\in T_n}\left[\frac{1}{k}\varphi(kf(\sigma_n(s)))+\frac{1}{h_n}\varphi(h_ng_n(\sigma_n(s)))\right]\omega(i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{2p}{d}\sum_{s\in H_n,i\in T_n}\frac{\varphi(kf(\sigma_n(s)))+\varphi(-h_ng_n(\sigma_n(s)))}{2}\omega(i)\\
&\geq \frac{2p}{d}\sum_{s\in H_n,i\in T_n}\varphi\left(\frac{kf(\sigma_n(s))-h_ng_n(\sigma_n(s))}{2}\right)\omega(i)\\
&= \frac{2p}{d}\sum_{i\in T_n}\varphi\left(\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\right)^*(i)\right)\omega(i).
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 我们有

$$\sum_{i\in T_n}\varphi\left(\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\right)^*(i)\right)\omega(i)\to 0,$$

即存在 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得对所有 $n>n_0$, 满足

$$\sum_{i\in T_n}\varphi\left(\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\right)^*(i)\right)\omega(i)<\frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{7}$$

注意到：对 $i\in T_n$, $j>i$, $j\in D\backslash T_n$, 有

$$\begin{aligned}
|kf(j)-h_ng_n(j)| &< \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}\max\{|kf(j)|,|h_ng_n(j)|\}\\
&\leq \frac{\varepsilon_1}{2(2d-2)}\max\{|kf(i)|,|h_ng_n(i)|\}\\
&\leq |kf(i)-h_ng_n(i)|.
\end{aligned}$$

由 (4) 和 (7) 知，对所有 $n>n_0$,

$$\begin{aligned}
&\rho_\varphi\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\chi_D\right)\\
&=\sum_{i\in T_n}\varphi\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\chi_D\right)^*(i)\omega(i)+\sum_{i\in D\backslash T_n}\varphi\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\chi_D\right)^*(i)\omega(i)\\
&\leq\sum_{i\in T_n}\varphi\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\right)^*(i)\omega(i)+\rho_\varphi((kf-h_ng_n)\chi_{D\backslash T_n})\\
&<\varepsilon_1,
\end{aligned}$$

即

$$\rho_\varphi\left(\frac{kf-h_ng_n}{2}\chi_D\right)\to 0(n\to\infty).$$

因为 $\varphi\in\delta_2$, 我们有 $\|(kf-h_ng_n)\chi_D\|^\circ\to 0$, 即存在 $n_1\in\mathbb{N}$ 使得对所有 $n>n_1$,

$$\|(kf-h_ng_n)\chi_D\|^\circ<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

因此，由 (2), (3) 和 (8) 知，对 $n > n_1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|kf - h_n g_n\|^\circ &\le \|(kf - h_n g_n)\chi_D\|^\circ + \|(kf)\chi_{B'}\|^\circ + \|(h_n g_n)\chi_{B'}\|^\circ \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + d\frac{\varepsilon}{3d} + d\frac{\varepsilon}{3d} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\|k_n f_n - h_n g_n\|^\circ \to 0$. 这样

$$\begin{aligned}|k_n - h_n| &= |k_n\|f_n\|^\circ - h_n\|g_n\|^\circ| \\ &\le \|k_n f_n - h_n g_n\|^\circ \to 0,\end{aligned}$$

故 $k_n - h_n \to 0$. 因此，$\|f_n - g_n\|^\circ \to 0$, 证毕.

必要性. (1) 我们知道 $LUR \Longrightarrow$ 严凸. 由 [14, 定理 1] 知，(i) 成立.

(2) 令 $\varphi \notin \delta_2$. 由 [11, 定理 8] 的证明知，我们可以构造一个递减序列

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i\right) = x^*,$$

满足 $\rho_\varphi(x) \le 1$, $\rho_\varphi(\lambda x) = +\infty$ $(\lambda > 1)$, 且对 $\forall\, j \ge 1$, $\lambda > 1$ 有

$$\sum_{k=j}^{\infty}\left(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \varphi(\lambda u_k)\omega(i)\right) = \infty.$$

易见 $\|x\|^\circ > \|x\| = 1$. 令 $y = \dfrac{x}{\|x\|^\circ}$, 定义 $y_n = \dfrac{1}{\|x\|^\circ}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_k e_i)$. 则对 $l \le \|x\|^\circ$, 有 $\rho_\varphi(ly_n) \to \rho_\varphi(ly)$; 对 $l > \|x\|^\circ$, 有 $\rho_\varphi(ly_n) \to \infty$. 因此

$$1 \ge \|y_n\|^\circ = \inf_{l>0}\frac{1}{l}[1 + \rho_\varphi(ly_n)] \to \inf_{l>0}\frac{1}{l}[1 + \rho_\varphi(ly)] = \|y\|^\circ = 1.$$

显然 $\|\frac{y+y_n}{2}\|^\circ \ge \|y_n\|^\circ \to 1$. 易知 $\rho_\varphi\left(\dfrac{y - y_n}{\frac{1}{\|x\|^\circ}}\right) \le 1$, $\rho_\varphi\left(\lambda\cdot\dfrac{y - y_n}{\frac{1}{\|x\|^\circ}}\right) = \infty$, $\lambda > 1$. 因此 $\|y - y_n\| = \dfrac{1}{\|x\|^\circ}$, 且 $\|y - y_n\|^\circ > \|y - y_n\| = \dfrac{1}{\|x\|^\circ} > 0$, 故 $\lambda_{\varphi,\omega} \notin (LUR)$.

现在令 $\psi \notin \delta_2$, $\varphi \in \delta_2$. 则存在 $v_n \to 0$ 使得

$$\psi(v_n) < \min\left(\frac{1}{\omega(1)n}, \psi\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)\right),\quad \psi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}v_n\right) > 2n\psi(v_n).$$

选取一个自然数 m_n, 使得

$$\psi(v_n)\sum_{i=1}^{m_n}\omega(i)\leq\frac{1}{n},\quad \psi(v_n)\sum_{i=1}^{m_n+1}\omega(i)>\frac{1}{n}.$$

取 $I_n\subset\mathbb{N}\backslash\{1\}$ 且 I_n 有 m_n 个元素. 定义 $w_n=v_n\sum\limits_{i\in I_n}e_i$. 则

$$\rho_\psi(w_n)=\psi(v_n)S(m_n)\leq 1,$$

$$\rho_\psi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}w_n\right)>2n\psi(v_n)S(m_n)>n\psi(v_n)S(m_n+1)>1.$$

因此 $1\geq\|w_n\|_{\lambda_{\psi,\omega}}\geq 1-\frac{1}{n}$. 定义 $u_n=\dfrac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{S(m_n)}\right)S(m_n)}$, $x_n=\sum\limits_{i\in I_n}u_ne_i$, 则由 4° 知, $\|x_n\|^\circ=u_n\|\chi_{1,m_n}\|^\circ=1$ 且

$$u_nv_nS(m_n)=\|w_n\|_{\lambda_{\psi,\omega}}\geq 1-\frac{1}{n}. \tag{9}$$

令 $u=\frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\omega(1)}$. 定义 $x=ue_1$, 则 $u\geq u_n$, $\|x\|^\circ=1$. 令 $f_n=t_ne_1$, 其中 $t_n=(1-\frac{1}{n})\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)$. 则

$$\rho_\psi(f_n)=\psi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)\right]\omega(1)\leq 1-\frac{1}{n},$$

且

$$ut_n\omega(1)=1-\frac{1}{n}.$$

定义 $g_n=w_n+f_n$. 则

$$\rho_\psi(g_n)=\psi(t_n)\omega(1)+\psi(v_n)\sum_{i=2}^{m_n+1}\omega(i)\leq(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}=1.$$

故由 3° 和 (9) 知

$$\begin{aligned}\|x_n+x\|^\circ &\geq \sum_{i=1}^{\infty}g_n^*(i)(x_n+x)^*(i)\omega(i)=t_nu\omega(1)+u_nv_n\sum_{i=2}^{m_n+1}\omega(i)\\ &= 1-\frac{1}{n}+u_nv_nS(m_n+1)-u_nv_n\omega(1)\\ &\geq 1-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}-u_nv_n\omega(1)\to 2.\end{aligned}$$

定义 $h_n=w_n-f_n$. 则 $\rho_\psi(h_n)=\rho_\psi(g_n)\leq 1$, 且 $\|x_n-x\|^\circ\geq\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_n^*(i)(x_n-x)^*(i)=t_nu\omega(1)+u_nv_n\sum\limits_{i=2}^{m_n+1}\omega(i)\to 2$.

当 $\omega(n)=1$ 时，我们得到下面的推论.

推论 2.1　l_φ° 是 $LUR \Longleftrightarrow \varphi\in\delta_2,\psi\in\delta_2,\varphi$ 在 $[0,\gamma]$ 上是严凸的，其中 $\gamma=q\left(\psi^{-1}(1)\right)$.

第三章　赋 Orlicz 范数的 Orlicz—Lorentz 函数空间的全 k- 凸性

我们先给出本章需要用到的有关定义.

令 X 是一个 Banach 空间, B 是 X 的单位球. 称 X 是全 k- 凸的, 若 B 中的序列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n_1\to\infty}\lim\limits_{n_2\to\infty}\cdots\lim\limits_{n_k\to\infty}\|x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}\|=k$, 则 $\{x_n\}$ 必收敛.

为了证明主要定理, 我们先给出下面的引理.

引理 3.1　假设 φ 和 ψ 满足 $\triangle_2$ 条件 (或满足较大变量的 $\triangle_2$ 条件), φ 是严凸的, 且 $\int_0^\infty\omega=\infty$(或 ω(t)>0, 0<t<1). 则对任意的 ε>0, 存在 δ>0, 如果 $x,y\in\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,\infty)$(或 $x,y\in\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,1)$), 且 $\|x\|^\circ\le1$, $\|y\|^\circ\le1$, $\|x+y\|^\circ\ge2-\delta$, 有

$$\mathrm{m}\{\mathrm{t}:\ |kx(t)-hy(t)|\ge\varepsilon\ \}\le\varepsilon,$$

其中 k $\in$ K(x), h $\in$ K(y).

证明　因为 φ 和 ψ 满足 $\triangle_2$ 条件, 则

$$1<\sup_{\substack{k\in K(x),\\ h\in K(y)}}\{\mathrm{k},\mathrm{h}\}=\mathrm{d}<+\infty,$$

且 $\frac{k}{k+h},\frac{h}{k+h}\in$ [a, b] $\subset$ [0, 1], 其中 $a=\frac{1}{1+d}, b=\frac{d}{1+d}$.

对 ε >0, 令 γ 是一个正数, 使得

$$\varphi(\gamma)\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\omega>d.$$

令

$$\mathrm{A}=\{\mathrm{t}:|kx(t)|\ge\gamma\ \},\ \mathrm{B}=\{\mathrm{t}:|hy(t)|\ge\gamma\ \},$$

$$\mathrm{E}=\{\mathrm{t}:|kx(t)|<\gamma,\ |hy(t)|<\gamma,\ |kx(t)-hy(t)|\ge\varepsilon\ \}.$$

显然, $mA\le\frac{\varepsilon}{4}, mB\le\frac{\varepsilon}{4}$(因为 $\rho_\varphi(kx)=k-1\le d$, $\rho_\varphi(hy)=k-1\le d$). 我们断言 $mE<\frac{\varepsilon}{2}$. 如果断言成立, 则

$$\mathrm{m}\{\mathrm{t}:\ |kx(t)-hy(t)|\ge\varepsilon\ \}\le\mathrm{mE}+\mathrm{mA}+\mathrm{mB}\le\varepsilon.$$

因为 φ 是严凸的, 则存在 $0<\lambda<1$, 使得 $\varphi(\alpha u+\beta v)\le(1-\lambda)[\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)]$. 其

中 $\alpha, \beta \in [a,b]$, 且 $\alpha+\beta=1$, $|u|, |v| \le \gamma$ 和 $|u-v| > \varepsilon$.

假设 $x, y \in \Lambda_{\varphi,\omega}(0,1))$, 不妨设 $x+y$ 是一个非负函数，则

$$\begin{aligned}
2-\delta &\le \|x+y\|^\circ \le \frac{k+h}{kh}\Big[1+\rho_\varphi\Big(\frac{kh}{k+h}(x+y)\Big)\Big] \\
&= \frac{k+h}{kh}\Big[1+\int_{(0,1)\setminus E}\varphi\Big(\frac{kh}{k+h}(x+y)\Big)\omega+\int_E\varphi\Big(\frac{h}{k+h}(kx)+\frac{k}{k+h}(hy)\Big)\omega\Big] \\
&\le \frac{1}{k}+\frac{1}{h}+\frac{k+h}{kh}\Big[\frac{h}{k+h}\int_{(0,1)\setminus E}\varphi(kx)\omega \\
&+ \frac{k}{k+h}\int_{(0,1)\setminus E}\varphi(hy)\omega\Big]+(1-\lambda)\Big[\int_E\frac{h}{h+k}\varphi(kx)\omega+\int_E\frac{k}{h+k}\varphi(hy)\omega\Big] \\
&\le 2-\lambda\int_E\Big(\frac{h}{k+h}\varphi(kx)+\frac{k}{h+k}\varphi(hy)\Big)\omega \\
&\le 2-a\lambda\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\Big(1-\frac{\varepsilon}{4}\Big)\Big(mE-\frac{\varepsilon}{4}\Big). \qquad (*)
\end{aligned}$$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}a\lambda\varphi(\frac{\varepsilon}{2})\omega(1-\frac{\varepsilon}{4})$, 则有 $mE<\frac{\varepsilon}{2}$.

现在，假设 $x, y \in \Lambda_{\varphi,\omega}(0,\infty)$, k $\in$ K(x), h $\in$ K(y), 选一个数 p, 使得 $\varphi(\frac{\varepsilon}{8})\int_0^p\omega(t)dt = 2l-1$, 其中 $l=\frac{kh}{k+h}$.

由注 1(见 [20]) 知，存在一个保测变换 σ, 满足

(vi) $\int_0^\infty\varphi(|x+y|)\omega\circ\sigma=\int_0^\infty\varphi((x+y)^*)\omega$;

(vii) 若 $|x(t)+y(t)|<|x(s)+y(s)|$, 则 $\sigma(t)\ge\sigma(s)$.

令

$$G=E\cap\{t:\omega\circ\sigma\ge\omega(p+\varepsilon)\}.$$

情况 1, $mG\ge\frac{\varepsilon}{4}$. (*) 证明了如果 $\|x+y\|^\circ\ge 2\text{-}\delta$, 则

$$\begin{aligned}
2-\delta\le\|x+y\|^\circ &\le 2-\lambda\int_G\Big(\frac{h}{k+h}\varphi(kx)+\frac{k}{k+h}\varphi(hy)\Big)\omega \\
&\le 2-\lambda a\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(p+\varepsilon)mG \\
&\le 2-\lambda a\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(p+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

取 $\delta=\frac{\lambda a\varepsilon}{8}\varphi(\frac{\varepsilon}{2})\omega(p+\varepsilon)$, 矛盾.

情况 2, $mG<\frac{\varepsilon}{4}$. 假设断言 $(mE<\frac{\varepsilon}{2})$ 不正确. 则 $m(E\setminus G)>\frac{\varepsilon}{4}$. 令 G_1 是 E 的一个子集，使得 $G\subseteq G_1$ 和 $m(E\setminus G_1)=\frac{\varepsilon}{4}$.

令 $H_1 = \sigma^{-1}(0,p)$, $H_2 = \sigma^{-1}((p+\frac{\varepsilon}{4}),\infty)\backslash(E\backslash G_1)$.

注意到:

(viii) 如果 $t \in E\backslash G_1 \subseteq E\backslash G$, 则 $\omega\circ\sigma < \omega(p+\frac{\varepsilon}{4})$ 且 $t \notin H_1$;

(ix) 若 $(0,\infty)\backslash H_1\backslash H_2 = \sigma^{-1}((p,p+\frac{\varepsilon}{4}))\cup(E\backslash G_1)$, 则 $m((0,\infty)\backslash H_1\backslash H_2) \le \frac{\varepsilon}{2}$;

(x) 由 (vii) 知, 若 $t \notin H_1$, 则 $|l(x(t)+y(t))| \le \frac{\varepsilon}{8}$.

[(x) 的证明如下:

如果结论不成立, 则存在 $t_0 \notin H_1$, 使得 $|l(x(t_0)+y(t_0))| > \frac{\varepsilon}{8}$. 由 (vii) 知, $|l(x(t)+y(t))| > \frac{\varepsilon}{8}$, $t \in H_1$(因为 $t \in H_1 \Longrightarrow \sigma(t) < p \le \sigma(t_0)$). 事实上

$$\begin{aligned}
2 &\ge \|x\|^\circ + \|y\|^\circ \\
&= \frac{1}{k}(1+\rho_\varphi(kx)) + \frac{1}{h}(1+\rho_\varphi(hy)) \\
&\ge \frac{k+h}{kh}\left[1 + \frac{h}{k+h}\rho_\varphi(kx) + \frac{k}{k+h}\rho_\varphi(hy)\right] \\
&\ge \frac{1}{l}[1+\rho_\varphi(l(x+y))].
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
2l-1 &\ge \rho_\varphi(l(x+y)) \\
&= \int_0^\infty \rho_\varphi(l(x+y))(t)\omega\circ\sigma(t) \\
&> \int_{H_1} \rho_\varphi(l(x+y))(t)\omega\circ\sigma(t) \\
&> \varphi\Big(\frac{\varepsilon}{8}\Big)\int_0^p \omega(t)dt = 2l-1.
\end{aligned}$$

矛盾. 所以 (x) 成立.]

因此

$$\begin{aligned}
2 &\geq \|x\|^\circ + \|y\|^\circ \geq \frac{1}{l}[1+\rho_\varphi(l(|x|+|y|))] \\
&= \frac{1}{l}+\frac{1}{l}\left[\int_{H_1\cup H_2}\rho_\varphi(l|x+y|)\omega\circ\sigma+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(l(|x|+|y|)|_{E\setminus G_1})^*(t)\omega(t+p)\right] \\
&= \frac{1}{l}+\frac{1}{l}\left[\int_0^{\infty}\rho_\varphi(l|x+y|)(t)\omega\circ\sigma(t)+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(l(|x|+|y|)|_{E\setminus G_1})^*(t)\omega(t+p)\right. \\
&- \left.\int_{(0,\infty)\setminus H_1\setminus H_2}\rho_\varphi(l|x+y|)(t)\omega\circ\sigma(t)\right] \\
&\geq \frac{1}{l}+\frac{1}{l}\rho_\varphi(l(x+y))+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi(\varepsilon)\omega(t+p)-\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\varphi(\frac{\varepsilon}{8})\omega(t+p) \\
&\geq \|x+y\|^\circ+\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(t+p)-2\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{8}\Big)\omega(t+p) \\
&\geq 2-\delta+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega(t+p) \\
&\geq 2-\delta+\frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)\omega\Big(t+\frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

取 $\delta<\frac{\varepsilon}{8}\varphi(\frac{\varepsilon}{2})\omega(t+\frac{\varepsilon}{4})$. 矛盾.

所以 $mE<\frac{\varepsilon}{2}$. 证毕.

定理 3.1 赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,\infty)$ (或 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,1)$) 是全 K- 凸的 ($K\geq 2$) 当且仅当 φ 和 ψ 满足 Δ_2 条件 (或满足较大变量的 Δ_2 条件), φ 是严凸的, 且 $\int_0^\infty\omega(t)dt=\infty$ (或 $\omega(t)>0$, $0<t<1$).

证明 充分性. 我们都知道, 如果 X 是全 2- 凸的, 则 X 是全 k- 凸的, $k\geq 2$. 因此, 我们仅需要证明 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 是 $2R$ 的. 令 $\{x_n\}$ 是 $\Lambda_{\varphi,\omega}$ 的单位球的一个序列, 使得

$$\lim_{n_1\to\infty}\lim_{n_2\to\infty}\|x_{n_1}+x_{n_2}\|=2.$$

φ 满足 Δ_2 条件, 且 $\int_0^\infty\omega=\infty$ (或 φ 满足较大变量的 Δ_2 条件), 则所有具有有限支集的简单函数 f 的集合是 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,\infty)$(或 $\Lambda^\circ_{\varphi,\omega}(0,1)$) 的一个稠密子集. 因此, 不妨假设 $x_n's$ 是简单函数, 满足 $m(supp(x_n))<\infty$.

由 [20 定理 7] 的证明和 (6°)($\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|^\circ$ 等价) 知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 M 和 N, 使得: 若 $n\geq N$, 则

(xi) $\varepsilon>\|x_n\cdot 1_{\{t:|x_n(t)|\leq\frac{1}{M}\}}\|^\circ$;

(xii) $\varepsilon > \|x_n \cdot 1_{\{t:|x_n(t)|\le M\}}\|^{\circ}$.

因为 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$, 则存在 $\gamma > 0$, 如果 $\|z\|^{\circ} \le 1$ (从而 $\|z\| \le 1$) 有

$$m(t : |z(t)| > \tfrac{1}{M}) \le \gamma.$$

令 $0 < \theta < \frac{1}{2M}$ 是任意一个正数，满足

$\|\theta \cdot 1_{(0,2\gamma)}\|^{\circ} < \varepsilon$, $\|2M \cdot 1_{(0,2\theta)}\|^{\circ} < \varepsilon$.

由引理 3.1 知，存在 $N_1 > N$, 如果 $n, m > N_1$, 则

$$m(\{t : |k_n x_n - k_m x_m| \ge \theta\}) \le \theta,$$

其中 $k_n \in K(x_n), k_m \in K(x_m)$.

对固定的 $n, m > N_1$. 令

$A = \{t : |x_n| > M\}$;

$B = \{t : |x_m| > M\}$;

$C = \{t : |x_n| < \frac{1}{M}\}$;

$D = \{t : |x_m| < \frac{1}{M}\}$;

$E = \{t : |k_n x_n - k_m x_m| \le \theta\}$;

$F = \{t : |k_n x_n - k_m x_m| \ge \theta\}$.

易知：

$(0, \infty)$(或 $(0, 1)$) $= A \cup C \cup ((F \cap B)\backslash A\backslash C)) \cup ((D \cap E)\backslash A\backslash C)) \cup (E\backslash C\backslash D) \cup (F\backslash A\backslash B)$

$= B \cup D \cup ((F \cap A)\backslash B\backslash D) \cup ((C \cap E)\backslash B\backslash D) \cup (E\backslash C\backslash D) \cup (F\backslash A\backslash B)$

注意到：如果 $t \in (D \cap E)\backslash C$ (或 $t \in (C \cap E)\backslash D$), 则

$$|x_n(t)| \ge \frac{1}{2M}, |x_n(t)| \le \frac{3}{2M},$$

或

$$\left(|x_n(t)| \ge \frac{1}{2M}, |x_n(t)| \le \frac{3}{2M}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
\|k_nx_n - k_mx_m\|^\circ &\le \|k_nx_n\cdot 1_A\|^\circ + \|k_mx_m\cdot 1_B\|^\circ + \|k_nx_n\cdot 1_C\|^\circ + \|k_mx_m\cdot 1_D\|^\circ \\
&+ \|(kx_n - kx_m)\cdot 1_{E\setminus C\setminus D}\|^\circ + \|k_nx_n\cdot 1_{(F\cap B)\setminus A\setminus C} \\
&- k_mx_m\cdot 1_{(F\cap A)\setminus B\setminus D} + (k_nx_n - k_mx_m)\cdot 1_{F\setminus A\setminus B}\|^\circ \\
&+ \|k_nx_n\cdot 1_{(D\cap E)\setminus A\setminus C} - k_mx_m\cdot 1_{(C\cap E)\setminus B\setminus D}\|^\circ \\
&\le 4d\varepsilon + \|\theta\cdot 1_{R\setminus(C\cap D)}\|^\circ + \|2dM\cdot 1_{(0,2\theta)}\|^\circ \\
&+ 3d\|x_m\cdot 1_D\|^\circ + 3d\|x_n\cdot 1_D\|^\circ \\
&\le (12d+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n,m\longrightarrow\infty}\|k_nx_n - k_mx_m\|^\circ = 0.$$

故

$$\begin{aligned}
|k_n - k_m| &= |k_n\|x_n\|^\circ - k_m\|x_m\|^\circ| \\
&\le \|k_nx_n - k_mx_m\|^\circ \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|x_n - x_m\|^\circ \longrightarrow 0 (n, m \longrightarrow \infty).$$

所以 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列. 因此 $\wedge_{\varphi,\omega}$ 是 $2R$ 的.

必要性.　我们知道, 如果 X 是 KR 的, 则 X 是自反的和严凸的. 因此由 [20 推论 8] 和 [12] 知, φ 和 ψ 都满足 Δ_2 条件 (或满足较大变量的 Δ_2 条件), φ 是严凸的, 且 $\int_0^\infty \omega(t)dt = \infty$ (或 ω(t)>0, 0<t<1).

参 考 文 献

[1] A. Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces*, Math.Nachr., **147**(1990), 29-38.

[2] A. Kamińska, *Extreme points in Orlicz-Lorentz spaces*, Arch.Math., **55**(1990), 173-180.

[3] A. Kamińska, *Uniform convexity of generalized Lorentz spaces*, Arch. Math., **56**(1991), 181-188.

[4] A. Kamińska, P.Lin, and H.Sun, *Uniformly normal structure of Orlicz-Lorentz spaces*, Lect. Notes in Pure and App. Math., **175**(1995), 229-238 .

[5] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastylo, *Geometric properties of some Calderón-Lozanovskiĭ spaces and Orlicz-Lorentz spaces*, Houston J. Math., **22**, No.3, (1996), 639-663.

[6] 吴从炘，任丽伟， *Orlicz–Lorentz 空间的局部一致凸*, 数学研究， **30**(2)(1997), 146-150.

[7] A. Kamińska, C. Lennard, M. Mastylo and S. Mikuska, *The uniform Kadec-Klee property for Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soci., **143**(2007), 349-374.

[8] 姚正安，程庆平，宋述刚， *Orlicz–Lorentz 序列空间*, 数学年刊， **13**A (增刊)(1992), 80-91.

[9] P. Foralewski, H. Hudzik and L. Szymaszkiewicz, *On some geometric and topological properties of generalized Orlicz-Lorentz sequence spaces*, Math. Nachr., **281**,No.2, 181-198(2008).

[10] 吴从炘，任丽伟， *赋 Orlicz 范数的 Orlicz–Lorentz 空间的严格凸性*, 数学杂志, **19**(1999), 235-240.

[11] J. Cerda, H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastylo, *Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, Positivity Kluwer Academic Publishers, **2**(1998), 311-337.

[12] J. Wang and Y. Chen, *Rotundity and Uniform Rotundity of Orlicz-Lorentz spaces with*

Orlicz norm, to appear in Houston J. Math..

[13] S. T. Chen, *Geometry of Orlicz Spaces,* Dissert. Math., **356**(1996).

[14] J. Wang and Zhe Ning, *Rotundity and Uniform Rotundity of Orlicz-Lorentz Sequence Spaces with Orlicz Norm*, Math. Nachr., 2010.

[15] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[16] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK., 1952.

[17] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastylo, *On geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces*, Canad. Math. Bull. Vol., **40**(3), 1997, 316-329.

[18] A. Kamińska, *Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces*, Math. Nachr., **147**(1990), 15-24.

[19] M. A. Krasnosel'skii and Y. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.

[20] P. Lin and H. Sun, *Some geometric properties of Lorentz-Orlicz spaces.* Arch. Math., **64**(1995), 500-511.

攻读硕士期间发表的论文

1. 马翠青，“一个关于权序列结论的推广”，苏州大学学报，哲学社会科学版，研究生论文集（下）(2009).

致 谢

攻读硕士学位的三年求学时光即将过去．在这三年的学习生活中，有许多老师和同学的帮助与支持，正是在他们的关心下，我的学习以及论文才能顺利完成．在此硕士论文完成之际，我对他们表示诚挚的谢意！

首先，我要对我的导师王金才副教授表示衷心的感谢．本学位论文是在王老师的悉心指导下完成的．三年来，王老师给我热情的关怀和鼓励．他严谨的治学态度和勤奋的敬业精神使我深受感染．他宽厚的为人和高尚的品德更加令我感动．从论文的选题到成文，王老师都倾注了大量的心血．在此衷心感谢导师三年来对我的指导和教诲，没有他的关心，支持和鼓励，就不会有我的这篇论文．在短短的研究生生活即将结束之时，谨让我对敬爱的王老师说声："谢谢"．

其次，感谢严亚强老师给予我的莫大的帮助．严老师所教授的基础知识为我完成论文奠定了良好的基础，并且在平时的学习生活中给我解答了很多学术上的问题，使我受益良多．

再次，感谢苏州大学数学科学学院所有老师和同学的帮助和支持，让我顺利完成研究生阶段的学业．

同时，感谢我的同门吴春燕、侯振涛和师兄宁哲在平时的学习及论文的完成过程中给予我的帮助．

最后，感谢我的父母和亲人，感谢他们在我的求学生涯中一如既往地支持我、鼓励我，给予我无微不至的关怀和照顾．