STANISŁAW MAZUR

O ZBIORACH I FUNKCJONAŁACH WYPUKŁYCH W PRZESTRZENIACH LINJOWYCH

L W Ó W

1936

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Zbiór E nazywamy *przestrzenią linjową*, jeżeli dla x, $y \in E$ i każdej liczby α określone są $x+y$, $\alpha x \in E$ w ten sposób, że ($x, y, z \in E$; α, β, liczby): $x+y=y+x$, $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x+y=x+z$ pociąga $y=z$, $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $1x=x$; wtedy istnieje dokładnie jeden element $0 \in E$ taki, że $x+0=x$; kładziemy $-x=(-1)x$, $x-y=x+(-y)$. O zbiorze $W \subset E$ powiada się, że jest *wypukły*, jeżeli dla x, $y \in W$ i $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ jest $\alpha x+(1-\alpha)y \in W$; *funkcjonał*, t. j. funkcję rzeczywistą, $\varphi(x)$ określoną w zbiorze wypukłym $W \subset E$ nazywamy *wypukłą*, jeżeli dla x, $y \in W$ i $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ jest $\varphi(\alpha x+(1-\alpha)y) \leqslant \alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)$.

Teorja zbiorów i funkcjonałów wypukłych w przypadku przestrzeni euklidesowych została zapoczątkowana przez H. Minkowskiego; pomimo prostoty swych pojęć i metod, teorja ta nietylko wykazała wielką użyteczność przy traktowaniu zagadnień innych już rozwiniętych teoryj Analizy, lecz dała również impuls do stworzenia nowych. W niniejszej pracy okazuję, że podstawowe twierdzenia teorji zbiorów i funkcjonałów wypukłych ważne w przypadku przestrzeni euklidesowych, zachowują ważność w przypadku bardzo ogólnych klas przestrzeni linjowych; wynikają stąd różne zastosowania, np. do teorji operacyj linjowych, funkcyj zmiennej rzeczywistej, metod limesowalności i do rachunku warjacyjnego.

1. Niech E będzie przestrzenią linjową. Nazywamy ją *n-wymiarową* (n liczba naturalna), jeżeli istnieją elementy x_1, x_2, ..., $x_n \in E$ takie, że każdy element $x \in E$ możemy w jeden i tylko jeden sposób przedstawić w postaci $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami; w przypadku przeciwnym mówimy, że jest ona ∞-*wymiarową*. O zbiorze $R \subset E$ powiada się, że jest *linjowy*, jeżeli dla $x, y \in R$ i każdej liczby a jest $ax + y \in R$; zbiory, które są obrazami zbiorów linjowych przy odwzorowaniach $U(x) = x + a$ przestrzeni linjowej E na siebie, gdzie $a \in E$, noszą nazwę *rozmaitości linjowych*.

Niech E, F będą przestrzeniami linjowemi, zaś $U(x)$ *operacją*, t. j. funkcją, określoną w E o wartościach z F. Nazywamy ją *addytywną*, jeżeli dla $x, y \in E$ jest $U(x+y) = U(x) + U(y)$; mówimy, że jest ona *jednorodna* względnie *dodatnio-jednorodna*, jeżeli dla $x \in E$ i każdej liczby a względnie każdej liczby $a > 0$ jest $U(ax) = aU(x)$. Jeżeli E, F są ponadto przestrzeniami topologicznemi, to operację $U(x)$ addytywną i ciągłą nazywamy *linjową*; wtedy jest ona jednorodną.

Zbiór E nazywamy *przestrzenią typu* (B^*), jeżeli jest przestrzenią linjową i określony jest w nim funkcjonał $\|x\|$ taki, że ($x, y \in E$; a liczba): $\|x\| \neq 0$ dla $x \neq 0$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\|ax\| = |a|\,\|x\|$; jeżeli liczbę $\|x-y\|$ nazwiemy odległością x od y, to zbiór E stanowi wtedy przestrzeń metryczną.

Niech E będzie przestrzenią typu (B^*). Jeżeli $X(x)$ jest funkcjonałem linjowym $\neq 0$ w E i a liczbą, to zbiór tych punktów $x \in E$, dla których $X(x) - a = 0$ względnie $X(x) - a \geqslant 0$, nazywamy *płaszczyzną* względnie *półprzestrzenią*. Jeżeli $X(x)$, $Y(x)$ są funkcjonałami linjowemi $\neq 0$ w E i a, β liczbami, to na to, by relacje $X(x) - a = 0$, $Y(x) - \beta = 0$ względnie $X(x) - a \geqslant 0$, $Y(x) - \beta \geqslant 0$ określały tę samą płaszczyznę względnie półprzestrzeń, potrzeba i wystarcza, by istniała liczba $\gamma \neq 0$ względnie liczba $\gamma > 0$ taka, że $Y(x) = \gamma X(x)$ dla $x \in E$, $\beta = \gamma a$. Mówimy, że zbiór $A \subset E$ *leży po jednej stronie* płaszczyzny określonej równaniem $X(x) - a = 0$, gdzie $X(x)$ jest funkcjonałem linjowym $\neq 0$ w E i a liczbą, jeżeli funkcjonał $X(x) - a$ nie zmienia w zbiorze A znaku.

Zbiór $K \subset E$ nazywamy *ciałem wypukłem*, jeżeli jest wypukły, zamknięty i zawiera punkty wewnętrzne; brzeg ciała wypukłego nazywamy *powierzchnią wypukłą*.

Można okazać, że zbiór $H \subset E$ jest płaszczyzną wtedy i tylko wtedy, jeżeli jest rozmaitością linjową zamkniętą $\neq E$ taką, że nie istnieje rozmaitość linjowa (zamknięta) $I \subset E$, $I \neq E$ zawierająca H jako część właściwą; zbiór $A \subset E$ leży po jednej stronie płaszczyzny $H \subset E$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla $x, y \in A - H$ i $0 \leqslant a \leqslant 1$ jest $ax + (1-a)y \in E - H$; podobnie można określić „geometrycznie“ wiele innych pojęć występujących w tej pracy.

Niech K będzie ciałem wypukłem, zaś a jego punktem wewnętrznym. Przy $x \in E$ oznaczamy przez $K(x, a)$ kres dolny zbioru wszystkich liczb $a > 0$ takich, że $a + \frac{1}{a} x \in K$; określony tak w E funkcjonał $K(x, a)$ nazywamy *funkcjonałem Minkowskiego* ciała wypukłego K względem punktu a. Dla prostoty oznaczeń przypuścimy, że $a = 0$, kładąc $K(x) = K(x, 0)$; przejście do przypadku ogólnego jest natychmiastowe[1]).

1. Jest $K(x) < 1$, jeżeli x jest punktem wewnętrznym, $K(x) = 1$, jeżeli x jest punktem brzegowym i $K(x) > 1$, jeżeli x jest punktem zewnętrznym ciała wypukłego K.

2. Dla $x, y \in E$ i każdej liczby $a > 0$ jest: $K(x) \geqslant 0$, $K(x+y) \leqslant K(x) + K(y)$, $K(ax) = aK(x)$, $K(x) \leqslant M\|x\|$ (M stała).

W związku z 2. zauważmy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by określony w E funkcjonał wypukły i dodatnio-jednorodny $\varphi(x)$ — a więc taki, że dla $x, y \in E$ i każdej liczby $a > 0$ jest $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ — spełniał warunek $|\varphi(x)| \leqslant M\|x\|$ dla $x \in E$ (M stała), jest zarówno to, by był ciągły, jak i to, by spełniał w E warunek Lipschitz'a.

3. Jeżeli $K(x)$ jest funkcjonałem w E o własnościach z uwagi 2., to jest funkcjonałem Minkowskiego względem

punktu 0 ciała wypukłego utworzonego przez zbiór tych $x \in E$ dla których $K(x) \leqslant 1$.

4. Na to, by ciało wypukłe K było ograniczone, potrzeba i wystarcza, by było $K(x) \geqslant m\|x\|$ dla $x \in E$ (m stała $0 >$).

5. Na to, by ciało wypukłe K leżało po jednej stronie płaszczyzny określonej równaniem $X(x) - 1 = 0$, gdzie $X(x)$ jest funkcjonałem linjowym w E, potrzeba i wystarcza, by było $X(x) \leqslant K(x)$ dla $x \in E$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli rozmaitość linjowa $R \subset E$ nie zawiera punktów wewnętrznych ciała wypukłego $K \subset E$, to istnieje płaszczyzna $H \subset E$ taka, że $R \subset H$ i przytem ciało wypukłe K leży po jednej jej stronie*[2].

Mówimy, że płaszczyzna $H \subset E$ jest *płaszczyzną podpierającą* do zbioru $A \subset E$ (jak i do jego brzegu), jeżeli zbiór A leży po jednej jej stronie i przytem odległość H od A równa się 0. Z twierdzenia 1. wynika w szczególności, że przez każdy punkt brzegowy a ciała wypukłego K przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna podpierająca do K; dla dowodu wystarczy wziąć za R rozmaitość linjową utworzoną z punktu a[3]). Uważajmy np. kulę K_a o środku 0 i promieniu a (a liczba > 0); funkcjonałem Minkowskiego tej kuli względem punktu 0 jest $\frac{1}{a}\|x\|$. Według 5. równanie $X(x) - a = 0$, gdzie $X(x)$ jest funkcjonałem linjowym w E, określa wtedy i tylko wtedy płaszczyznę podpierającą do kuli K_a przechodzącą przez jej punkt brzegowy a, jeżeli $X(x) \leqslant \|x\|$ dla $x \in E$, $X(a) = \|a\|$; twierdzenie 1. implikuje zatem istnienie funkcjonałów linjowych w E o powyższych własnościach.

Twierdzenia 1. nie można uogólnić na przypadek w którym K jest dowolnym zbiorem wypukłym i zamkniętym; tak np. zbiór K wszystkich punktów $x = \{\xi_n\}$ przestrzeni (l^2) dla których $|\xi_n| \leqslant \frac{1}{n}$ jest wypukły i zamknięty, lecz żadna płaszczyzna podpierająca do K nie przechodzi przez punkt 0[4]).

Można udowodnić następujące ogólne twierdzenie: Jeżeli zbiór $K \subset E$ jest wypukły i przez każdy punkt $a \in K$ przechodzi co najmniej jedna płaszczyzna podpierająca do K, to istnieje płaszczyzna $H \subset E$ taka, że $A \subset H$[5]).

2. Niech E będzie przestrzenią typu (B^*)[6]).

6. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcjonałem wypukłym w E oraz $a \in E$, to istnieje skończone $\Phi(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a + \varepsilon x) - \varphi(a)]$ dla $x \in E$ i przytem funkcjonał $\Phi(x)$ jest wypukły, dodatnio jednorodny; jeżeli funkcjonał $\varphi(x)$ jest dodatnio-jednorodny, to $\Phi(x) \leqslant \varphi(x)$ dla $x \in E$; jeżeli funkcjonał $\varphi(x)$ jest ciągły, to $\Phi(x)$ również.

Jeżeli przestrzeń E jest n-wymiarowa, to funkcjonał wypukły w niej spełnia w każdej kuli warunek Lipschitz'a; jeżeli przestrzeń E jest ∞-wymiarowa, to istnieją w niej nawet funkcjonały addytywne, jednorodne a przytem nieciągłe. Lecz w przypadku ogólnym funkcjonał wypukły w E i ograniczony w otoczeniu choćby jednego punktu spełnia w otoczeniu każdego punktu warunek Lipschitz'a; o tem, że nie musi spełniać wtedy warunku Lipschitz'a w każdej kuli, poucza następujący przykład: W przestrzeni (l^2) kładziemy $\varphi(x) = \xi_1^1 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^n + \ldots$ dla $x = \{\xi_n\}$.

Niech $\varphi(x)$ będzie funkcjonałem w E oraz $a \in E$. Mówimy, że funkcjonał $\varphi(x)$ posiada w punkcie a *słabą różniczkę* względnie *silną różniczkę*, jeżeli istnieje $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a + \varepsilon x) - \varphi(a)]$ dla $x \in E$ i stanowi funkcjonał linjowy $X(x)$ względnie istnieje funkcjonał linjowy $X(x)$ w E taki, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\|x\|}[\varphi(a + x) - \varphi(a) - X(x)] = 0$; funkcjonał linjowy $X(x)$ nazywamy wtedy słabą różniczką względnie silną różniczką funkcjonału $\varphi(x)$ w punkcie a. Na to, by funkcjonał $\varphi(x)$ posiadał w punkcie a silną różniczkę $= X(x)$ potrzeba i wystarcza, by funkcjonał $X(x)$ był linjowy i przytem by $\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a + \varepsilon x) - \varphi(a)]$

zbiegało przy $\varepsilon \to 0$ do $X(x)$ jednostajnie w kuli o środku 0 i promieniu 1. Jeżeli zatem funkcjonał $\varphi(x)$ posiada w punkcie a silną różniczkę, to posiada również słabą i obie pokrywają się; odwrócenie nie jest prawdziwe nawet w przypadku 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej [7]).

Twierdzenie 2. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, zaś $\varphi(x)$ funkcjonałem wypukłym i ciągłym w niej, to zbiór Z tych punktów $x \in E$, w których funkcjonał $\varphi(x)$ posiada słabą różniczkę, stanowi G_δ wszędziegęstą; zbiór $E-Z$ jest zatem 1-ej kategorji* [8]).

7. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcjonałem wypukłym i dodatnio jednorodnym w E, $a \in E$ oraz $\Phi(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a+\varepsilon x) - \varphi(a)]$ dla $x \in E$. Jeżeli $X(x)$ jest funkcjonałem addytywnym i jednorodnym w E takim, że $X(a) = \varphi(a)$, $X(x) \leqslant \varphi(x)$ dla $x \in E$, to $-\Phi(-x) \leqslant X(x) \leqslant \Phi(x)$ dla $x \in E$; jeżeli $b \in E$ zaś a jest liczbą taką, że $-\Phi(-b) \leqslant \alpha \leqslant \Phi(b)$, to istnieje w E funkcjonał addytywny i jednorodny $X(x)$ taki, że $X(a) = \varphi(a)$, $X(b) = \alpha$, $X(x) \leqslant \varphi(x)$ dla $x \in E$.

Niech $K \subset E$ będzie ciałem wypukłem zawierającem punkt 0 we wnętrzu, a jego punktem brzegowym; połóżmy $L(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon}[K(a+\varepsilon x) - K(a)]$ dla $x \in E$.

8. Jeżeli równanie $X(x) - 1 = 0$, gdzie $X(x)$ jest funkcjonałem linjowym w E, określa płaszczyznę podpierającą do K przechodzącą przez punkt a, to $-L(-x) \leqslant X(x) \leqslant L(x)$ dla $x \in E$; jeżeli $b \in E$ zaś α jest liczbą taką, że $-L(-b) \leqslant \alpha \leqslant L(b)$, to istnieje funkcjonał linjowy $X(x)$ w E taki, że $X(b) = \alpha$ a przytem równanie $X(x) - 1 = 0$ określa płaszczyznę podpierającą do K przechodzącą przez punkt a.

Jeżeli $K \subset E$ jest ciałem wypukłem, a jego punktem brzegowym, to płaszczyznę $H \subset E$, przechodzącą przez punkt a, nazywamy *płaszczyzną styczną* do K (jak i do jego brzegu), jeżeli jest ona jedyną płaszczyzną podpierającą do K przechodzącą przez punkt a.

Twierdzenie 3. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, zaś $F \subset E$ powierzchnią wypukłą, to zbiór W wszystkich tych punktów $x \in F$, w których istnieje płaszczyzna styczna do F stanowi G_δ wszędziegęstą w F; zbiór $F-W$ jest zatem 1-ej kategorji w F* [9]).

Uważajmy np. kulę K_α o środku 0 i promieniu α (α liczba > 0). Według poprzedniego i 8., na to, by w punkcie a brzegu kuli K_α istniała płaszczyzna styczna do niej, potrzeba i wystarcza, by funkcjonał $\|x\|$ posiadał w punkcie a słabą różniczkę; na mocy twierdzenia 3., zbiór tych punktów brzegu F_α kuli K_α, w których to zachodzi, stanowi G_δ wszędziegęstą w F_α, jeżeli tylko przestrzeń E jest ośrodkową.

Niech $\varphi(x)$ będzie funkcjonałem wypukłym i ciągłym w E. Jeżeli przy danem $a \in E$ istnieje $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(a+\varepsilon x) - \varphi(a)]$ dla $x \in E$, to stanowi funkcjonał linjowy w E; $\varphi(x)$ posiada zatem wtedy słabą różniczkę w punkcie a. Jeżeli przestrzeń E jest n-wymiarową, to z istnienia słabej różniczki funkcjonału $\varphi(x)$ w punkcie a wynika istnienie silnej różniczki w tym punkcie. W szczególności na to, by funkcjonał $\|x\|$ posiadał w punkcie a słabą różniczkę, potrzeba i wystarcza, by istniała płaszczyzna styczna do kuli $K_{\|a\|}$ w punkcie a; jeżeli $X(x)$ jest słabą różniczką funkcjonału $\|x\|$ w punkcie a, to równanie $X(x) - \|a\| = 0$ określa tę płaszczyznę. Inne sformułowanie tej uwagi: Na to, by funkcjonał $\|x\|$ posiadał w punkcie a słabą różniczkę, potrzeba i wystarcza, by istniał dokładnie jeden funkcjonał linjowy $X(x)$ w E taki, że $X(x) \leqslant \|x\|$, $X(a) = \|a\|$; słaba różniczka funkcjonału $\|x\|$ w punkcie a spełnia te warunki.

W przestrzeni (M) funkcjonał $\|x\|$ nie posiada w żadnym punkcie słabej różniczki; ten przykład dowodzi tego, że twierdzenie zarówno 2. jak i 3. nie daje się uogólnić na przypadek dowolnych przestrzeni typu (B^*). W przestrzeniach (L^{α}) i (l^{α}) przy $\alpha > 1$ funkcjonał $\|x\|$ posiada w każdym punkcie $a \neq 0$ słabą a nawet silną różniczkę. Rozpatrzmy kilka innych przykładów, oznaczając przez Z zbiór tych punktów a uważanej przestrzeni, w których istnieje słaba różniczka, t. j. istnieje $\Phi(x, a) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} [\|a + \varepsilon x\| - \|a\|]$ dla $x \in E$; w tych przykładach w punktach zbioru Z istnieje zresztą silna różniczka: 1. Przestrzeń funkcyj rzeczywistych ciągłych określonych w przestrzeni metrycznej zwartej Q; działania zwykłe, $\|x\| = \max\limits_{q \in Q} |x(q)|$. $a \in Z$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $q_0 \in Q$ takie, że $|a(q_0)| > |a(q)|$ dla $q \in Q$, $q \neq q_0$; $\Phi(x, a) = x(q_0) \cdot \operatorname{sgn} a(q_0)$[10]). 2. Przestrzeń funkcyj rzeczywistych ograniczonych określonych w zbiorze abstrakcyjnym Q; działania zwykłe, $\|x\| = \underset{q \in Q}{\text{kres górny}} |x(q)|$. $a \in Z$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $q_0 \in Q$ takie, że $|a(q_0)| > \underset{q_0 \neq q \in Q}{\text{kres górny}} |a(q)|$; $\Phi(x, a) = x(q_0) \operatorname{sgn} a(q_0)$. 3. Przestrzeń (L). $a \in Z$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $a(t) \neq 0$ prawie wszędzie; $\Phi(x, a) = \int_0^1 x(t) \operatorname{sgn} a(t)\, dt$. 4. Przestrzeń (l). $a \in Z$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\alpha_n \neq 0$ przy $a = \{\alpha_n\}$; $\Phi(x, a) = \xi_1 \operatorname{sgn} \alpha_1 + \xi_2 \operatorname{sgn} \alpha_2 + \ldots + \xi_n \operatorname{sgn} \alpha_n + \ldots$ przy $x = \{\xi_n\}$.

Zauważmy, że jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2. i zbiór utworzony z punktów $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ jest wszędziegęsty w przestrzeni E, to zbiór $E - Z$ jest sumą zbiorów $W_1, W_2, \ldots W_n, \ldots$, gdzie W_n jest zbiorem F_σ o tej własności, że przekrój jego z każdą rozmaitością linjową $a + \alpha x_n$ ($a \in E$; α przebiega liczby) jest co najwyżej przeliczalny; wynika stąd, że jeżeli E jest przestrzenią euklidesową, to zbiór $E - Z$ ma miarę 0. Analogiczna uwaga zachodzi w związku z twierdzeniem 3.[11]).

3. Niech E będzie przestrzenią typu (B^*). Zbiór $A \subset E$ nazywamy *słabozamkniętym,* jeżeli z tego, że $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do $x_0 \in E$ wynika, że $x_0 \in A$; ciąg $\{x_n\}$ jest *słabo zbieżny* do x_0, jeżeli przy każdym funkcjonale linjowym $X(x)$ w E, ciąg $\{X(x_n)\}$ jest zbieżny do $X(x_0)$. Zbiór słabozamknięty jest zamknięty, lecz nie naodwrót.

Twierdzenie 4. *Zbiór $W \subset E$ wypukły i zamknięty $\neq E$ jest przekrojem półprzestrzeni*[12]).

Ponieważ półprzestrzeń jest oczywiście zbiorem słabozamkniętym, więc z twierdzenia 4. wynika, że każdy zbiór wypukły i zamknięty jest słabozamkniętym; to daje

Twierdzenie 5. *Jeżeli ciąg punktów $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do punktu x_0, to istnieją liczby α_{nm} takie, że $\alpha_{nm} \geqslant 0$, $\alpha_{nm} = 0$ dla $n < m$, $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_{nm} = 0$, $\alpha_{n1} + \alpha_{n2} + \ldots + \alpha_{nn} = 1$ i przytem ciąg $\{\alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n\}$ jest zbieżny do x_0*[13]).

Punkt $a \in E$ nazywamy *środkiem* zbioru $A \subset E$, jeżeli z tego, że $b \in A$ wynika $2a - b \in A$; zbiór ograniczony posiada conajwyżej jeden środek.

9. Jeżeli zbiór $W \subset E$ jest wypukły, zamknięty i ograniczony, $a \in E - W$, to istnieje ciało wypukłe $K \subset E$ ograniczone i mające środek takie, że $W \subset K$, $a \in E - K$.

10. Na to, by ciąg punktów $\{x_n\}$ był słabo zbieżny do punktu x_0, potrzeba i wystarcza, by był ograniczony i by każde ciało wypukłe $K \subset E$ ograniczone i mające środek, które zawiera nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu zawierało x_0.

Twierdzenie 6. *Na to by ciąg punktów $\{x_n\}$ był słabo zbieżny do punktu x_0, potrzeba i wystarcza, by był ograniczony i by przy każdem odwzorowaniu izomorficznem $U(x)$ przestrzeni E na siebie było $\varliminf\limits_{n \to \infty} \|U(x_n - x)\| \geqslant \|U(x_0 - x)\|$ dla $x \in E$*[14]).

Odwzorowanie $U(x)$ przestrzeni E na siebie nazywamy przytem *izomorficznem*, jeżeli jest addytywne i homeomorficzne. W przypadku przestrzeni euklidesowych uwagi 9., 10. jak i twierdzenie 6. można zaostrzyć; wtedy wystarczy zamiast dowolnych ciał wypukłych, ograniczonych i mających środek rozpatrywać kule a zamiast dowolnych odwzorowań izomorficznych odwzorowanie identyczne. To samo zachodzi w przypadku przestrzeni E spełniających następujące warunki: (a) Funkcjonał $\|x\|$ posiada w każdym punkcie $a \neq 0$ silną różniczkę; (b) Z każdego ciągu punktów ograniczonego można wyrwać podciąg słabo zbieżny do pewnego punktu[15]). Ponieważ np. przestrzenie (L^{α}) przy $\alpha > 1$ posiadają własności (a), (b), przeto zachodzi twierdzenie: Jeżeli $x_n \in (L^{\alpha})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_0 \in (L^{\alpha})$, to na to, by ciąg $\{x_n\}$ był słabo zbieżny do x_0, potrzeba i wystarcza, by $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^{\alpha} dt \geqslant \int_0^1 |x_0(t) - x(t)|^{\alpha} dt$ dla $x \in (L^{\alpha})$, $\int_0^1 |x_n(t)|^{\alpha} dt \leqslant M$ (M stała).

Ograniczenie się do przestrzeni posiadających własności (a), (b) jest istotne; tak np. kładąc $x_n(t) = n$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$, $x_n(t) = 0$ dla $\frac{1}{n} < t \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mamy $x_n \in (L)$ i przytem każda kula w przestrzeni (L) zawierająca nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}$ zawiera kulę o środku 0 i promieniu 1.

T w i e r d z e n i e 7. *Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcjonałem wypukłym i ciągłym określonym w zbiorze wypukłym $W \subset E$, to przy każdym ciągu punktów $x_n \in W$ $(n = 1, 2, \ldots)$ słabo zbieżnym do punktu $x_0 \in W$ jest $\varliminf\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x_0)$.*

4. Niech E będzie przestrzenią typu (B^*)[16]). Zbiór wszystkich funkcjonałów linjowych $X(x)$ w E stanowi przy zwykłych definicjach działań przestrzeń typu (B^*), jeżeli przez $\|X\|$ rozumiemy kres górny zbioru wszystkich liczb $X(x)$, gdzie $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$; oznaczamy ją przez $\bar{E}$, nazywając *przestrzenią sprzężoną* do E. Niech $K \subset E$ będzie zbiorem ograniczonym i oznaczmy przy każdem $X \in \bar{E}$ przez $K(X)$ kres górny zbioru wszystkich liczb $X(x)$, gdzie $x \in K$; określony tak w przestrzeni $\bar{E}$ funkcjonał $K(X)$ nazywamy *funkcjonałem podpierającym* do zbioru K.

11. Dla $X, Y \in \bar{E}$ i każdej liczby $\alpha > 0$ jest: $K(X + Y) \leqslant K(X) + K(Y)$, $K(\alpha X) = \alpha K(X)$, $K(X) \leqslant M \|X\|$ (M stała).

12. Na to by $K(X) \geqslant 0$ dla $X \in \bar{E}$, potrzeba i wystarcza, by punkt 0 należał do każdego zbioru wypukłego i zamkniętego $I \subset E$ zawierającego zbiór K.

Funkcjonał $K(X)$ jest linjowy wtedy i tylko wtedy, jeżeli zbiór K składa się z jednego punktu. Warunkiem koniecznym więc na to, by każdy funkcjonał $K(X)$ określony w przestrzeni $\bar{E}$ o własnościach z uwagi 11. był funkcjonałem podpierającym do pewnego zbioru $K \subset E$, jest to, by każdy funkcjonał linjowy w $\bar{E}$ był postaci $X(a)$, gdzie $a \in E$; zachodzi również

T w i e r d z e n i e 8. *Jeżeli każdy funkcjonał linjowy w $\bar{E}$ jest postaci $X(a)$, gdzie $a \in E$, to każdy funkcjonał $K(X)$ w $\bar{E}$ o własnościach z uwagi 11. jest funkcjonałem podpierającym do zbioru tych punktów $x \in E$, dla których $X(x) \leqslant K(X)$ przy $X \in \bar{E}$.*

Funkcjonał $\Phi(X)$ określony w przestrzeni E nazywamy *słabociągłym*, jeżeli z tego, że $X_n \subset \bar{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $X_0 \in \bar{E}$, $\lim\limits_{n \to \infty} X_n(x) = X_0(x)$ dla $x \in E$ wynika $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(X_n) = \Phi(X_0)$. Funkcjonał słabociągły jest ciągły, lecz nie naodwrót.

T w i e r d z e n i e 9. *Na to, by funkcjonał $K(X)$ był słabociągły, potrzeba i wystarcza, by zbiór K był zwarty.*

Jeżeli $K \subset E$ jest zbiorem ograniczonym, zaś $K(X)$ funkcjonałem podpierającym tego zbioru, to zbiór wszystkich punktów $X \in \bar{E}$ dla których $K(X) \leqslant 1$ stanowi ciało wypukłe zawierające punkt 0 we wnętrzu; nazywamy je *zbiorem sprzężonym* do K.

T w i e r d z e n i e 10. *Na to, by zbiór sprzężony do zbioru* *wypukłego, zamkniętego i ograniczonego $K \subset E$ był ograniczony, potrzeba i wystarcza, by punkt 0 należał do wnętrza zbioru K.*[17]).

13. Na to, by zbiór sprzężony do zbioru K był ograniczony, potrzeba i wystarcza, by $K(X) \geqslant m \| X \|$ dla $X \in \overline{E}$ (m stała > 0).

T w i e r d z e n i e 11. *Na to, by $K(X) \geqslant m \| X \|$ dla $X \in \overline{E}$ (m stała > 0), potrzeba i wystarcza, by każdy element $x \in E$ dał się przedstawić w postaci $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + \ldots$, gdzie $x_n \in K$ zaś a_n są liczbami takiemi, że szereg $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ jest zbieżny.*

5. Poprzednia teorja daje się uogólnić na przypadek dowolnych przestrzeni linjowo-topologicznych i lokalnie wypukłych. Zbiór E nazywamy *przestrzenią linjowo-topologiczną*, jeżeli jest przestrzenią linjową i topologiczną, przyczem działania $x + y$, ax są ciągłe; o przestrzeni takiej mówimy, że jest *lokalnie wypukłą*, jeżeli każdy zbiór otwarty $A = E$ zawiera zbiór otwarty wypukły[18]).

Niech E będzie przestrzenią linjową zaś Z klasą mocy $\aleph_\vartheta$ funkcjonałów $\varphi(x)$ określonych w E o tej własności, że ($x, y, x_n, x_0 \in E$; a_n, a_0 liczby): $\varphi(x) = 0$ dla każdego funkcjonału $\varphi \in Z$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x = 0$, $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n - x_0) = 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0$ pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(a_n x_n - a_0 x_0) = 0$. Nazywając otoczeniem punktu $a \in E$ zbiór wszystkich punktów $x \in E$ takich, że $\varphi_1(x - a)$, $\varphi_2(x - a), \ldots \varphi_n(x - a) < \varepsilon$, gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \in Z$ zaś ε jest liczbą > 0, uzyskujemy pewną przestrzeń linjowo-topologiczną, którą nazywamy *przestrzenią typu* (F^*_ϑ).

T w i e r d z e n i e 12. *Każda przestrzeń linjowo-topologiczna jest izomorficzna z pewną przestrzenią typu* (F^*_ϑ).

O dwóch przestrzeniach linjowo-topologicznych mówimy przytem, że są *izomorficzne*, jeżeli istnieje odwzorowanie izomorficzne jednej na drugą.

Zbiór E nazywamy *przestrzenią typu* (F^*), jeżeli jest

przestrzenią linjową i określony jest w niej funkcjonał $\| x \|$ taki, że ($x, y, x_n, x_0 \in E$; a_n, a_0 liczby): $\| x \| \neq 0$ dla $x \neq 0$, $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$, $\| -x \| = \| x \|$, $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} \| a_n x_n - a_0 x_0 \| = 0$; stanowi on wtedy przestrzeń metryczną, jeżeli $\| x - y \|$ nazwiemy odległością x od y.

T w i e r d z e n i e 13. *Na to, by przestrzeń linjowo-topologiczna była izomorficzna z pewną przestrzenią typu* (F^*), *potrzeba i wystarcza, by spełniony był w niej 1-szy aksjomat przeliczalności.*

Jeżeli w definicji klasy Z zastąpimy dwa ostatnie warunki przez warunek ($x \in E$; a liczba): $\varphi(ax) = |a| \varphi(x)$, to uzyskana przestrzeń linjowo-topologiczna jest lokalnie wypukła; przestrzenie tego rodzaju nazywamy *przestrzeniami typu* (B^*_ϑ).

T w i e r d z e n i e 14. *Każda przestrzeń linjowo-topologiczna lokalnie wypukła jest izomorficzna z pewną przestrzenią typu* (B^*_ϑ)[19]).

Zbiór A zawarty w przestrzeni linjowo-topologicznej E nazywamy *ograniczonym*, jeżeli przy każdem otoczeniu V punktu 0 istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że zbiór wszystkich punktów εx, gdzie $x \in A$, jest zawarty w V.

T w i e r d z e n i e 15. *Na to, by przestrzeń linjowo-topologiczna była izomorficzna z pewną przestrzenią typu* (B^*), *potrzeba i wystarcza, by istniał w niej zbiór wypukły, otwarty i ograniczony*[20]).

Niech teraz E będzie przestrzenią typu (B^*). Jeżeli weźmiemy za Z klasę wszystkich funkcjonałów postaci $|X(x)|$, gdzie $X \in \overline{E}$, to uzyskamy pewną przestrzeń typu (B^*_ϑ), przyczem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ w tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x_0 w przestrzeni E. Podobnie biorąc za Z klasę wszystkich funkcjonałów w $\overline{E}$ postaci $|X(x)|$, gdzie $x \in E$, dostajemy pewną przestrzeń typu (B^*_ϑ), przyczem $\lim_{n\to\infty} X_n = X_0$ w tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\lim_{n\to\infty} X_n(x) = X_0(x)$ dla $x \in E$.

6. Podamy tu kilka zastosowań poprzedniej teorji do teorji operacyj linjowych, do zagadnienień teorji metod limesowalności oraz rachunku warjacyjnego.

Niech E będzie przestrzenią typu (B^*). Jeżeli $U(x)$ jest operacją linjową w przestrzeni E o wartościach z pewnej przestrzeni F typu (B^*), to operację $\bar{U}(Y)$, która każdemu funkcjonałowi linjowemu $Y(y)$ w przestrzeni F przyporządkowuje funkcjonał linjowy $Y(U(x))$ w przestrzeni E, nazywamy *sprzężoną* do $U(x)$; $\bar{U}(Y)$ jest zatem operacją linjową w $\bar{F}$ o wartościach z $\bar{E}$. Najważniejsze twierdzenie ogólnej teorji równań linjowych brzmi: Na to by równanie $y = U(x)$ było rozwiązalne przy każdem $y \in F$, potrzeba i wystarcza, by $\|\bar{U}(Y)\| \geqslant m\|Y\|$ dla $Y \in \bar{F}$ (m stała > 0). Znany dowód tego twierdzenia jest uciążliwy; przy pomocy poprzedniej teorji wynika ono natychmiast — z twierdzenia 10. i uwagi 11[21]). Jeżeli przy danym punkcie $y_0 \in F$ jest $\|\bar{U}(Y)\| \geqslant m\,|Y(y_0)|$ dla $Y \in F$ (m stała > 0), to może nieistnieć rozwiązanie równania $y_0 = U(x)$: Wystarczy wziąć za E jak i F przestrzeń (c_0) i położyć $U(x) = \left\{\frac{\xi_n}{n}\right\}$ dla $x = \{\xi_n\}$, $y_0 = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Z twierdzenia 2. można jednak natychmiast wyprowadzić wniosek, że warunek $\|\bar{U}(Y)\| \geqslant m\,|Y(y_0)|$ dla $Y \in \bar{F}$ (m stała > 0) jest konieczny i dostateczny na to, by istniały punkty $x_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ takie, że $\|x_n\| \leqslant \frac{1}{m}$, $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$. Wynika stąd dalej, że jeżeli w przestrzeni E z każdego ciągu ograniczonego punktów można wyrwać podciąg słabo zbieżny do pewnego punktu, to powyższy warunek jest konieczny i dostateczny na to, by równanie $y_0 = U(x)$ posiadało rozwiązania. W przypadku dowolnej przestrzeni E, jeżeli operacja $U(x)$ jest postaci $U(x) = x + V(x)$, gdzie $V(x)$ jest operacją pełnociągłą, t. j. przeprowadzającą zbiory ograniczone w zwarte, warunek ten jest znowu konieczny i dostateczny na rozwiązalność równania $y_0 = U(x)$. W przypadku równania $X_0 = \bar{U}(Y)$ sytuacja jest prostsza: Na to, by równanie to posiadało rozwiązanie, konieczne jest i dostateczne, by $\|U(x)\| \geqslant m\,|X_0(x)|$ dla $x \in E$ (m stała > 0). Podobnie jak twierdzenie 10. łącznie z uwagą 11., względnie twierdzenie 11., pozwalają na uproszczenie teorji równania linjowego, tak te same twierdzenia zastosowane w odpowiednich przestrzeniach typu (B^*_0) dają odrazu następujące twierdzenie: Niech R będzie zbiorem linjowym funkcjonałów linjowych w E; na to, by każdy funkcjonał linjowy w E był granicą ciągu funkcjonałów, należących do R, potrzeba i wystarcza, by istniała liczba $m > 0$ taka, że przy każdym punkcie $x \in E$ istnieje funkcjonał $X(x)$ w R dla którego $\|X\| \leqslant 1$, $|X(x)| \geqslant m\|x\|$. Przytem trzeba zakładać, że przestrzeń E jest ośrodkową. Poprzednia teorja pozwala znowu udowodnić prosto to twierdzenie, jak i analogiczne twierdzenie w przypadku przestrzeni, które nie są ośrodkowe[22]).

W teorji metod limesowalności można z korzyścią stosować wiele z pośród podanych poprzednio twierdzeń. Tak np. przez zastosowanie twierdzenia 5. dostaje się twierdzenie: Jeżeli metody Toeplitza A i B limesują do 0 wszystkie ciągi zbieżne do 0 i każdy ciąg ograniczony limesowalny metodą A do 0 jest limesowalny metodą B, to jest limesowalny metodą B również do 0. Wynika stąd dalej, że jeżeli A, B są metodami permanentnemi i każdy ciąg ograniczony limesowalny metodą A jest limesowalny metodą B, to jest limesowalny metodą B do tej samej liczby, do której jest limesowalny metodą A[23]).

Twierdzenie 7. może być użyte przy traktowaniu pewnych zagadnień rachunku warjacyjnego. Upraszcza ono bardzo teorję, którą rozwinął niedawno L. Tonelli[24]) a może być użyte również do dowodu następującego twierdzenia, które uogólnia twierdzenie o istnieniu powierzchni minimalnej w ogólnym przypadku. Niech J będzie krzywą zamkniętą Jordana w przestrzeni, dopuszczającą przedstawienie postaci $x_i = x_i(\vartheta)$, gdzie funkcje $x_i(\vartheta)$ o okresie 2π posiadają pochodne ciągłe. Niech R oznacza klasę wszystkich powierzchni, dających się przedstawić w postaci $x_i = x_i(u, v)$, gdzie funkcje $x_i(u, v)$ określone dla $u^2 + v^2 \leqslant 1$ spełniają warunki: (a) istnieje funkcja ciągła monotoniczna $\vartheta(\tau)$ w przedziale $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ taka, że $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta(2\pi) = 2\pi$, $x_i(\vartheta(\tau)) = x_i(\cos\tau, \sin\tau)$; ($b$) dla prawie każdego u funkcja $x_i(u, v)$ jest absolutnie ciągła względem v i dla prawie każdego v jest ona absolutnie ciągła względem u; (c) funkcja $x_i(u, v)$ jest ciągła; (d) pierwsze pochodne cząstkowe funkcji $x_i(u, v)$ są całkowalne z kwadratem. Niech dalej $F(X_1, X_2, X_3)$ oznacza funkcję określoną w całej przestrzeni taką, że: (α) jest ona dodatnio jednorodna; (β) posiada pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe, poza punktem $(0, 0, 0)$; (γ) forma kwadratowa $\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_k} \lambda_i \lambda_k$ jest dodatnio określona. Przy powyższych założeniach, istnieje w klasie R powierzchnia $x_i = x_i(u, v)$, dla której całka $I = \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} F(X_1(u, v), X_2(u, v), X_3(u, v))\, du\, dv$ wypada nie-większa niż w przypadku każdej innej powierzchni tej klasy; przytem $X_1(u, v)$, $X_2(u, v)$, $X_3(u, v)$ oznaczają Jakobiany funkcyj $x_i(u, v)$[25].

Przypiski.

1) W związku z teorją zbiorów i funkcjonałów wypukłych w przestrzeniach euklidesowych, zob.: H. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächengriffs, Ges. Abh. 2 (1911) p. 131—229; T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934.

2) Zob.: S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Stud. Math. 4 (1933) p. 70—84.

3) W przypadku przestrzeni ośrodkowych twierdzenie to znalazł G. Ascoli: G. Ascoli, Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, Ann. di Mat. 10 (1932) p. 33—81, 203—232. W przypadku ogólnym twierdzenie to było podane przeze mnie na posiedzeniu Oddziału lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego 14. 5. 1932 przed publikacją dowodu przez Ascoliego: S. Mazur: Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego 12 (1934) p. 115.

4) W związku z definicją przestrzeni (l^2), jak i innych występujących dalej, zob.: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

5) W przypadku przestrzeni (l^2) udowodnił to O. H. Keller: O. H. Keller, Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum, Math. Ann. 105 (1931) p. 748—758.

6) Zob. l. c. [2]).

7) Zob.: S. Mazur, Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p), Stud. Math. 4 (1933) p. 128—133.

8) Zob. l. c. [2]); tak samo w związku z uwagami 7., 8.

9) Zob. l. c. [2]).

10) To udowodnił S. Banach, l. c. [4]), p. 168.

11) Wynika to oczywiście również z ogólnego twierdzenia H. Rademachera: H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale, Math. Ann. 79 (1919) p. 340—359 i 81 (1920) p. 52—63.

12) Twierdzenie to jest w zasadzie zawarte w pracy l. c. [2]).

13) W przypadku przestrzeni (L^p) i (l^p) przy $p > 1$, twierdzenie to udowodnili S. Banach i S. Saks: S. Banach et S. Saks, Sur la convergence forte dans les champs L^p, Stud. Math. 2 (1930) p. 51—57; w przypadku przestrzeni (C) udowodnili je niezależnie D. C. Gillespie i W. A. Hurwitz oraz Z. Zalcwasser: D. C. Gillespie und W. A. Hurwitz, On sequences of con-

tinuous functions having continuous limits, Trans. Amer. Math. Soc. 32 (1930) p. 527—543, Z. Zalcwasser, Sur une propriété du champ des fonctions continues, Stud. Math. 2 (1930) p. 63—67; z ostatniego twierdzenia można wyprowadzić twierdzenie 5., jak zauważyłem wspólnie z S. Banachem, korzystając z tego, że przestrzenie ośrodkowe typu (B^*) są równoważne z częściami przestrzeni (C). W związku z uwagami 9., 10. zob. l. c. [2]).

15) Zob. l. c. [7]).

16) Rezultaty podane w tym ustępie nie były publikowane.

17) Twierdzenia 10., 11. oraz uwaga 11. są zawarte w pracy: S. Mazur und W. Orlicz, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, Stud. Math. 6 (1936), w druku.

18) Zob.: A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935) p. 767—776; A. Kolmogoroff, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Stud. Math. 5 (1934) p. 29—33; J. von Neumann, On complete topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 37 (1935) p. 1—20. Rezultaty podane w tym ustępie nie były publikowane; przedstawiałem je na posiedzeniu Oddziału lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego 9. 2. 1935.

19) Twierdzenie to zawiera praca J. von Neumann, l. c. [18]), która ukazała się jednak dopiero w czerwcu 1935.

20) Twierdzenie to zawiera praca A. Kolmogoroffa, l. c. [18]).

21) Zob. pracę l. c. [17]) oraz: S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwów, 1935.

22) Zob. pracę l. c. [17]).

23) Zob.: S. Mazur et W. Orlicz, Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. Acad. Sci. Paris, 196 (1933) p. 32—34.

24) Wyniki te uzyskane przeze mnie wspólnie z J. Schauderem, nie są opublikowane. Były przedstawiane na posiedzeniu Oddziału lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego 26. 5. 1934: S. Mazur und J. Schauder, Über Extreme von mehrfachen Integralen, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 13 (1935) p. 143. Zob.: L. Tonelli, L'estremo assoluto degli integrali doppi, Ann. Pisa, 2 (1933) p. 89—130.

25) Wyniki te uzyskane przeze mnie wspólnie z J. Schauderem, nie są opublikowane. Były przedstawiane na posiedzeniu Oddziału lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego 26. 1. 1935.