Punktes $\overline{M}$ von der Bildebene. Analog konstruieren wir von dem Punkte X_0 ausgehend die Punkte X^* und X', wo $X^* X'$ wieder die Entfernung des Raumpunktes X von der Bildebene ist. Es seien endlich in die neue Figur 18c die Punkte H, X' und M' übertragen. Wir legen jetzt die durch $X'M'$ senkrecht zur Bildebene gehende Ebene in jene um und ebenso die Parallelebene durch O, indem wir senkrecht zu $M'X'$ $M_a M' = M^* M'$ und $X_a X' = X^* X'$ und parallel zu $X_a X'$ die Distanz $H O_a = H O^*$ abtragen. Der Schnittpunkt S_1 von $X_a M_a$ mit $X'M'$ ist dann der Spurpunkt der x-Achse und der Schnittpunkt F_1 der Parallelen durch H zu $X'M'$ und der Parallelen durch O_a zu $X_a M_a$ der Fluchtpunkt der x-Achse. Analog sind die beiden anderen Fluchtpunkte F_2 und F_3 zu konstruieren. Somit ist dann das Fluchtpunktdreieck $F_1 F_2 F_3$ erhalten. Also können wir den Satz aufstellen:

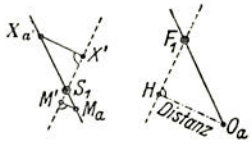

Fig. 18c.

16. Die allgemeine perspektivische Achsonometrie ist in Berücksichtigung des Satzes 15 aus den gegebenen Punkten X, Y, Z, N und der Normalen g, sowie der Einheitsstrecke e bestimmt, wenn die gegebene Gerade g die konstruierte Gerade $O_0 R$ in einem bestimmten Punkte F außerhalb des Halbkreises k^* schneidet. Das Gleiche ist der Fall, wenn beim Zusammenfallen der Geraden g und $O_0 R$ ein bestimmter Punkt F außerhalb des Halbkreises k^* angenommen wird. Es ergibt sich aber keine Lösung, wenn der Punkt F auf oder innerhalb des Halbkreises k^* liegt[10].

Auf die Verallgemeinerung der vorstehenden Untersuchungen für ein schiefwinkliges (x, y, z)-Koordinatensystem gehen wir nicht weiter ein.

---

[10]) Vgl. in der auf S. 333 genannten Arbeit von Herrn Kruppa den Satz 6, S. 33, der in unseren Ausführungen wieder die wünschenswerte Ergänzung findet. Auch die dem Satze 7 des Herrn Kruppa sich anschließende Aufgabe läßt sich nach unseren einfachen Methoden leicht behandeln.

(Eingegangen: 28. VII. 1933.)

Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung I.

Von Stefan Mazurkiewicz in Warszawa.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung enthält den ersten Teil einer neuen Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung (nämlich die Axiome der finiten Wahrscheinlichkeitsrechnung), welche im wesentlichen eine Weiterbildung und Modifikation der von mir in einer früheren Arbeit skizzierten Axiomatik[1]); der Grundunterschied besteht darin, daß ich jetzt die Wahrscheinlichkeit als Funktion von zwei deduktiven Systemen und nicht wie früher als Funktion einer Aussage und eines deduktiven Systems betrachte. Zweck dieser Modifikation ist, den Übergang zur Theorie der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten zu ermöglichen. Gleichzeitig wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr auf die Algebra der Logik, sondern auf eine von Tarski begründete Algebra der deduktiven Systeme gestützt. Diese Algebra der Systeme ist von der gewöhnlichen (Boole-Schröderschen) verschieden, es läßt sich aber zeigen (Rechtfertigungssatz), daß die auf Grund dieser Algebra und unserer Axiome aufgebaute Wahrscheinlichkeitsrechnung — formal mit der klassischen vollständig übereinstimmt.

Das hier gegebene aus 4 Axiomen bestehende System genügt selbstverständlich nicht zur Begründung der Theorie der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeiten. Es müssen noch Stetigkeits- bzw. Existenzaxiome hinzukommen; diese Axiome werde ich im 2ten Teil meiner Arbeit behandeln.

---

[1]) C. R. Soc. Sc. Varsovie **25** (1932), p. 1–4. Vgl. auch Keynes, A treatise on Probability London 1921. Reichenbach, Math. Zeit. **34**, p. 568–618. Bruno de Finetti, Fund. Math. **17**, p. 298–330.

Erster Teil.
Die finite Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Die deduktiven Systeme.

Alle Begriffe und Sätze über deduktive Systeme, die ich in diesem § zusammenstelle, stammen von H. Tarski[2]). Allerdings ersetze ich die Tarskische Algebra der Systeme, durch eine duale.

Die Zeichen $\subset$, $+$, $\times$, Σ, Π sind im mengentheoretischen Sinne zu verstehen. Ist X eine Aussagenmenge, so bezeichnet $Fl(X)$ die Menge aller Folgerungen der Menge X. Wenn $X = Fl(X)$, so heißt X ein deduktives System (in Zeichen $X \epsilon \mathfrak{S}$). S bezeichnet die Menge aller Aussagen, L die Logik (Durchschnitt aller System). In $\mathfrak{S}$ wird eine Algebra in folgender Weise definiert.

Die Inclusion: aus X folgt Y bedeutet $Y \subset X$.

Die Logische Addition (Alternative) $X \vee Y = XY$. Die logische Summe von $X_1, X_2 \ldots X_n$ wird mit $\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i$ bezeichnet.

Die logische Multiplikation (Konjunktion) $X \wedge Y = Fl(X+Y)$. Das logische Produkt von $X_1, X_2 \ldots X_n$ wird mit $\overset{n}{\underset{i=1}{K}} X_i$ bezeichnet.

Die logische Null $0 = S$; die logische Eins $1 = L$.

Die Negation $N(X) = \prod_{x \epsilon X} Fl(n(x))$ wo $n(x) =$ Negation der Aussage x.

In dieser Algebra gelten alle Axiome der gewöhnlichen (Boole-Schröderschen) Algebra der Logik mit Ausnahme von $X \wedge N(X) = 0$. Es gilt nur eine de Morgansche Formel, nämlich:

(1, 1) $$N(Y \wedge Y) = N(X) \vee N(Y).$$

Es ist $X \subset N^2(X)$, also $N(X) = N^3(X)$.

Wenn für ein System $X \wedge N(X) = 0$, so heißt es konservativ. Axiomatisierbare Systeme, d. h. Systeme von der Form $Fl(x)$, wo x eine Aussage, sind konservativ.

Eine Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$ heißt Systemkörper, wenn:

(1, 2) $$X \epsilon \mathfrak{M} \rightarrow N(X) \epsilon \mathfrak{M}.$$

(1, 3) $$X, Y \epsilon \mathfrak{M} \rightarrow (X \vee Y \epsilon \mathfrak{M})(X \wedge Y \epsilon \mathfrak{M}).$$

[2]) Tarski, C. R. Société d. Sc. Varsovie Cl. III, 23, p. 22—29 (1930); Monatsh. f. Math. Phys. 37, p. 361—404 (1931), sowie eine demnächst zu erscheinende Arbeit deren Inhalt am 6. X. 1933 der polnischen mathematischen Gesellschaft mitgeteilt wurde.

Ist $B \epsilon \mathfrak{M}$, so nenne ich Relativkörper mit Anfangssystem B und bezeichne mit $\mathfrak{M}(B)$ die Menge aller $X \epsilon \mathfrak{M}$ für die $B \subset X$.

§ 2. Die Axiome der finiten Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Systemkörper, $\mathfrak{M}(B)$ ein Relativkörper mit Anfangssystem B.

Die Wahrscheinlichkeit von X im Bezug auf Y ist eine reelle, nichtnegative Zahl $p(X, Y)$, welche definiert ist für alle $X \epsilon \mathfrak{M}$, für $Y = B$, sowie alle $Y \epsilon \mathfrak{M}(B)$ die der Bedingung $p(Y, B) > 0$ genügen. Die Menge dieser Y bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}(B, p)$. Auf die Möglichkeit die Definition von $p(X, Y)$ auf solche $Y \epsilon \mathfrak{M}(B)$ auszudehnen, für die $p(Y, B) = 0$ gehe ich einstweilen nicht ein. — Die Wahrscheinlichkeit erfüllt die folgenden Axiome, die im wesentlichen mit den Bohlmannschen übereinstimmen.

(2, 1) $$p(X, X) = 1.$$

(2, 2) $$p(N(X), X) = 0.$$

(2, 3) $$p(X_1 \vee X_2, Y) = p(X_1, Y) + p(X_2, Y) - p(X_1 \wedge X_2, Y)$$

(2, 4) $$p(X \wedge Y, Z) = p(X, Z)\, p(Y, X \wedge Z) \quad \text{wenn } p(X \wedge Z, B) > 0.$$
$$p(X \wedge Y, Z) = 0 \quad \text{wenn } p(X \wedge Z, B) = 0.$$

§ 3. Die einfachsten Sätze.

(3, 1) $$p(X \wedge Y, Y) = p(X, Y).$$

Es ist $Y \wedge Y = Y$, daher nach (2, 1), (2, 4):

$$p(X \wedge Y, Y) = p(Y, Y)\, p(X, Y \wedge Y) = p(X, Y).$$

(3, 2) $$p(X, B) = 0 \rightarrow p(X \wedge Y, B) = 0.$$

Nach (3, 1) $p(X, B) = 0 \rightarrow p(X \wedge B, B) = 0$, also nach (2, 4): $p(X \wedge Y, B) = 0$.

(3, 3) $$p(X, Y) = 0 \rightarrow p(X \wedge Z, Y) = 0.$$

Wenn $p(X \wedge Y, B) = 0$, so ist nach (2, 4): $p(X \wedge Z, Y) = 0$. Wenn dagegen $p(X \wedge Y, B) > 0$, so ist nach (2, 4):

$$p(X \wedge Z, Y) = p(X, Y)\, p(Z, X \wedge Y) = 0.$$

(3, 4) $$p(X, B) = 0 \rightarrow p(X, Y) = 0.$$

Es ist $Y \epsilon \mathfrak{M}(B, p)$, also $B \subset Y$ und $p(Y, B) > 0$. Andrerseits hat man nach (3, 2) $p(X \wedge Y, B) = 0$, daher nach (2, 1), (2, 4):

$$0 = p(X \wedge Y, B) = p(X, Y)\, p(Y, Y \wedge B) = p(X, Y)\, p(Y, Y) = p(X, Y)$$

(3, 5) $$p(X \wedge N(X), X) = 0.$$

Dies folgt aus (2, 2) und (3, 3).

(3, 6) $$p(X \wedge N(X), B) = 0.$$

Wenn $p(X, B) = 0$, so folgt dies aus (3, 3), wenn $p(X, B) > 0$, so ist nach (3, 1), (2, 4):

$$p(X \wedge N(X), B) = p(X, B)\,p(N(X), X \wedge B) = \\ = p(X, B)\,p(B \wedge X \wedge N(X), X \wedge B).$$

Andrerseits hat man nach (1, 1), (3, 5), (2, 3):

$$0 = p[(B \wedge X) \wedge N(B \wedge X), X \wedge B] = p[(B \wedge X) \wedge (N(B) \vee N(X)), X \wedge B] = \\ = p[B \wedge X \wedge N(B), X \wedge B] + p[B \wedge X \wedge N(X), X \wedge B] - \\ - p[B \wedge X \wedge N(B) \wedge N(X), X \wedge B].$$

Nach (3, 3), (3, 5) ist aber $p[B \wedge X \wedge N(B), B] = 0$, also nach (3, 4):

$$p[B \wedge X \wedge N(B), X \wedge B] = 0,$$
$$p[B \wedge X \wedge N(B) \wedge N(X), X \wedge B] = 0,$$

daher $p[B \wedge X \wedge N(X), X \wedge B] = 0$ und somit $p(X \wedge N(X), B) = 0$ w. z. b. w.

Aus (3, 4), (3, 6) folgt:

(3, 7) $$p(X \wedge N(X), Y) = 0.$$

Wegen $0 = 1 \wedge N(1)$, $1 \wedge Y = Y$ und (3, 1) hat man:

(3, 8) $$p(0, Y) = 0,$$

(3, 9) $$p(1, Y) = 1,$$

(3, 10) $$p(X, Y) + p(N(X), Y) = 1.$$

Es ist $X \vee N(X) = 1$, daher folgt aus (3, 7), (3, 9), (2, 3):

$$1 = p(X \vee N(X), Y) = p(X, Y) + p(N(X), Y) - p(X \wedge N(X), Y) = \\ = p(X, Y) + p(N(X), Y).$$

(3, 11) $$X \subset X_1 \rightarrow p(X, Y) \geqq p(X_1, Y).$$

Wegen $X \subset X_1$ ist $X \vee N(X_1) = 1$. Daher:

$$1 = p(N(X_1), Y) + p(X, Y) - p(X \wedge N(X_1), Y) = 1 - p(X_1, Y) + \\ + p(X, Y) - p(X \wedge N(X_1), Y)$$

also:

$$p(X, Y) - p(X_1, Y) = p(X \wedge N(X_1), Y) \geqq 0 \quad \text{w. z. b. w.}$$

Insbesondere hat man wegen $1 \subset X$.

(3, 12) $$p(X, Y) \leqq 1,$$

(3, 13) $$p(\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) \leqq \sum_{i=1}^{n} p(X_i, Y).$$

Beweis auf Grund von (2, 3) durch vollständige Induktion.

(3, 14) Wenn $p(X_i \wedge X_j, Y) = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ so ist

$$p(\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i, Y).$$

Beweis durch vollständige Induktion. Nach (2, 3) ist der Satz richtig für $n = 2$. Nehmen wir an, er wäre richtig für $n-1$ $(n > 2)$. Man hat:

$$p(\overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = \sum_{i=1}^{n-1} p(X_i, Y),$$
$$\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i = (\overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i) \vee X_n$$

also nach (2, 3):

$$p(\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = p(\overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) + p(X_n, Y) - p(X_n \wedge \overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = \\ = \sum_{i=1}^{n} p(X_i, Y) - p(X_n \wedge \overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y).$$

Nun ist $p(X_n \wedge \overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) \geqq 0$. Andrerseits aber, nach (3, 13):

$$p(X_n \wedge \overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = p(\overset{n-1}{\underset{i=1}{A}} (X_n \wedge X_i), Y) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} p(X_n \wedge X_i, Y) = 0$$

also:

$$p(\overset{n}{\underset{i=1}{A}} X_i, Y) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i, Y) \quad \text{w. z. b. w.}$$

§ 4. Der Rechtfertigungssatz.

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_m$ Variable aus $\mathfrak{M}$. Wir definieren den Begriff des *Systempolynoms k-ter Ordnung der Variablen* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ induktiv, wie folgt.

Systempolynome 1-er Ordnung sind $0, 1, X_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sind Q_1, Q_2 Systempolynome höchstens k-er Ordnung, so sind $N(Q_1)$, $Q_1 \vee Q_2$, $Q_1 \wedge Q_2$ Systempolynome höchstens $k+1$-er Ordnung.

Zwei Systempolynome Q_1, Q_2 heißen *aequivalent* (in Zeichen $Q_1 \sim Q_2$), wenn sie durch Anwendung der gewöhnlichen Algebra der Logik ineinander überführbar sind. $Q_1 = Q_2 \rightarrow Q_1 \sim Q_2$ aber nicht umgekehrt.

Rechtfertigungssatz. $Q_1 \sim Q_2 \rightarrow p(Q_1, Y) = p(Q_2, Y)$.

Als *Elementarprodukt* der in Variablen $X_1 \ldots X_m$ bezeichnen wir jeden der 2^m Systempolynome $Z_1 \wedge Z_2 \ldots \wedge Z_m$, wo $Z_i = X_i$ oder $Z_i = N(X_i)$. Diese Elementarprodukte bezeichnen wir mit $\Phi_n(X_1 \ldots X_m)$, $n = 1, 2 \ldots 2^m$. Die 2^{2m} Systempolynome $\underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)]$, wo $E_n = 0$ oder $E_n = 1$ nennen wir *Elementarpolynome* der Variablen $X_1 \ldots X_m$.

Nach bekannten Sätzen der gewöhnlichen Algebra der Logik gibt es zu jedem Systempolynom Q von $X_1 \ldots X_m$ ein und nur ein mit ihm aequivalentes Elementarpolynom Q^* derselben Variablen. Offenbar hat man: $Q_1 \sim Q_2 \rightarrow Q_1^* = Q_2^*$, daher reduziert sich der Beweis des Rechtfertigungssatzes auf den Beweis von:

(4, 1) $$p(Q, Y) = p(Q^*, Y).$$

Wir beweisen (4, 1) durch vollständige Induktion. Es ist:

(4, 2) $$0 = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[0 \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)] = 0^*,$$

(4, 3) $$1 = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[1 \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)] = 1^*,$$

(4, 4) $$\begin{aligned} X_i = X_i \wedge \underset{n=1}{\overset{2^{m-1}}{A}}[1 \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_{i-1}, X_{i+1} \ldots X_m)] = \\ = \underset{n=1}{\overset{2^{m-1}}{A}}[1 \wedge X_i \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_{i-1}, X_{i+1} \ldots X_m)] \vee \\ \vee \underset{n=1}{\overset{2^{m-1}}{A}}[0 \wedge N(X_i) \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_{i-1}, X_{i+1} \ldots X_m)] = X_i^*. \end{aligned}$$

Also ist für Polynome Q 1-er Ordnung stets $Q = Q^*$ und somit (4, 1) richtig für alle $Y \in \mathfrak{M}(B, p)$.

Wir nehmen an (4, 1) wäre richtig für alle Systempolynome höchstens k-ter Ordnung und alle $Y \in \mathfrak{M}(B, p)$. Sei G ein Polynom höchstens k-ter Ordnung und:

(4, 5) $$G^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n^{(1)} \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)].$$

Dann ist

(4, 6) $$N(G)^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[N(E_n^{(1)}) \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)],$$

(4, 7) $$\begin{aligned} G^* \vee N(G)^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[(E_n^{(1)} \vee N(E_n^{(1)})) \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)] = \\ = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[1 \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)] = 1, \end{aligned}$$

(4, 8) $$G^* \wedge N(G)^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}} \underset{r=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n^{(1)} \wedge N(E_r^{(1)}) \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m) \wedge \Phi_r(X_1 \ldots X_m)].$$

Alle Glieder der logischen Summe rechts haben im Bezug auf Y die Wahrscheinlichkeit Null auf Grund von (3, 3), (3, 7). In der Tat für $r = n$ enthält das zugehörige Glied den Faktor $E_n^{(1)} \wedge N(E_n^{(1)})$, dagegen für $r \neq n$ einen Faktor $X_s \wedge N(X_s)$. Aus (3, 13) folgt also:

(4, 9) $$p[G^* \wedge N(G)^*, Y] = 0.$$

Nach (2, 3), (4, 9), (4, 7), (4, 9):

(4, 10) $$p(G^*, Y) + p(N(G)^*, Y) = 1.$$

Andrerseits hat man nach Voraussetzung und nach (3, 10):

(4, 11) $$p(G, Y) = p(G^*, Y),$$

(4, 12) $$p(G, Y) + p(N(G), Y) = 1.$$

Aus (4, 10), (4, 11), (4, 12) folgt:

(4, 13) $$p(N(G), Y) = p(N(G)^*, Y).$$

Sei H ein zweites Polynom höchstens k-ter Ordnung. Setzen wir:

(4, 14) $$H^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n^{(2)} \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)].$$

Dann ist:

(4, 15) $$(G \wedge H)^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n^{(1)} \wedge E_n^{(2)} \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)].$$

(4, 16) $$G^* \wedge H^* = \underset{n=1}{\overset{2^m}{A}} \underset{r=1}{\overset{2^m}{A}}[E_n^{(1)} \wedge E_r^{(2)} \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m) \wedge \Phi_r(X_1 \ldots X_m)]$$

also auf Grund von (3, 3), (3, 7), (3, 13), (3, 14):

(4, 17) $$p[G \wedge H^*, Y] = p[G^* \wedge H^*, Y].$$

Wenn für ein Wertsystem der X_i $p(G \wedge Y, B) = 0$, so ist nach (3, 4):

(4, 18) $$p(G \wedge H, Y) = p(G \wedge H^*, Y) = 0,$$

wenn dagegen $p(G \wedge Y, B) > 0$, so ist nach (2, 4):

(4, 19) $$p(G \wedge H, Y) = p(G, Y)\, p(H, G \wedge Y),$$

(4, 20) $$p(G \wedge H^*, Y) = p(G, Y)\, p(H^*, G \wedge Y).$$

Aber nach Voraussetzung:

$$p(H, G \wedge Y) = p(H^*, G \wedge Y), \tag{4, 21}$$

somit in allen Fällen

$$p(G \wedge H, Y) = p(G \wedge H^*, Y). \tag{4, 22}$$

Ersetzt man in (4, 22) G durch H^* und H durch G so folgt:

$$p(G \wedge H^*, Y) = p(G^* \wedge H^*, Y). \tag{4, 23}$$

Nach (4, 17), (4, 22), (4, 23):

$$p(G \wedge H, Y) = p[(G \wedge H)^*, Y]. \tag{4, 24}$$

Schließlich ist:

$$G^* \vee H^* = \mathop{A}_{n=1}^{2^m} [(E_n^{(1)} \vee E_n^{(2)}) \wedge \Phi_n(X_1 \ldots X_m)] = (G \vee H)^*. \tag{4, 25}$$

Also nach (2, 3), (4, 22), (4, 23):

$$\begin{gathered} p(G \vee H, Y) = p(G, Y) + p(H, Y) - p(G \wedge H, Y) = \\ p(G^*, Y) + p(H^*, Y) - p(G^* \wedge H^*, Y) = p(G^* \vee H^*, Y) = p[(G \vee H)^*, Y]. \end{gathered} \tag{4, 26}$$

Aus (4, 10), (4, 24), (4, 26) folgt, daß (4, 1) für Systempolynome höchstens $k+1$-er Ordnung gilt. Also ist (4, 1) und somit der Rechtfertigungssatz bewiesen.

Nach dem Rechtfertigungssatz gelten in unserer Theorie alle Formeln der üblichen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Insb. ist:

$$p(X, Y) = p(X \wedge Z, Y) + p(X \wedge N(Z), Y), \tag{4, 27}$$

$$p[N(X \vee Y), Z] = p[N(X) \wedge N(Y), Z]. \tag{4, 28}$$

§ 5. Die stochastische Entfernung[3]).

Wir werden in diesem und den folgenden §§ statt $p(X, B)$ einfach $p(X)$ schreiben.

Die *stochastische Entfernung der Systeme* X_1, X_2 *in Bezug auf* Y ist definiert durch die Gleichung:

$$\begin{gathered} \rho(X_1, X_2; Y) = p[(X_1 \wedge N(X_2) \vee (N(X_1) \wedge X_2), Y] = \\ = p[X_1 \wedge N(X_2), Y] + p[N(X_1) \wedge X_2, Y]. \end{gathered} \tag{5, 1}$$

Statt $\rho(X_1, X_2; B)$ schreiben wir einfach $\rho(X_1, X_2)$. Es gelten folgende Relationen.

$$\rho(X_1, X_2) = \rho(X_2, X_1), \tag{5, 2}$$

[3]) Diese Begriffsbildung geht zurück auf **Fréchet**, vgl. Metron 8 (1930), p. 1—50; Ann. Soc. Polon. de Math. 9 (1931), p. 44—49. **Fréchet** betrachtet Entfernungen zwischen Zufallsvariablen.

$$\textit{Dreiecksaxiom:}\ \rho(X_1, X_3) \leqq \rho(X_1, X_2) + \rho(X_2, X_3). \tag{5, 3}$$

In der Tat hat man nach (4, 27):

$$\begin{gathered} \rho(X_1, X_2) + \rho(X_2, X_3) - \rho(X_1, X_3) = p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge X_3] + \\ + p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge N(X_3)] + p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge X_3] + \\ p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge N(X_3)] + p[X_1 \wedge X_2 \wedge N(X_3)] + p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge N(X_3)] + \\ + p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge X_3] + p[N(X_1) \wedge N(X_2) \wedge X_3] - \{p[X_1 \wedge X_2 \wedge N(X_3)] + \\ p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge N(X_3)] + p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge X_3] + p[N(X_1) \wedge N(X_2) \wedge X_3]\} = \\ = 2p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge X_3] + 2p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge N(X_3)] \geqq 0. \end{gathered}$$

Aus $\rho(X_1, X_2) = 0$ braucht natürlich nicht $X_1 = X_2$ zu folgen. Zwei Systeme X_1, X_2 für die $\rho(X_1, X_2) = 0$ nennen wir kongruent (in Zeichen $X_1 \equiv X_2$).

$$\rho(0, X) = p(X), \tag{5, 4}$$

$$\rho(X_1, X_2) + \rho(N(X_1), X_2) = 1, \tag{5, 5}$$

$$\rho(X_1, N(X)) = 1, \tag{5, 6}$$

$$\rho(X_1, X_2) = 1 \rightarrow N(X_1) \equiv X_2 \tag{5, 7}$$

$$\rho(N(X_1), N(X_2)) = \rho(X_1, X_2) \tag{5, 8}$$

$$\rho(X_1 \vee X_3, X_2 \vee X_3) \leqq \rho(X_1, X_2). \tag{5, 9}$$

In der Tat ist, nach (3, 11), (4, 28):

$$\begin{gathered} \rho(X_1 \vee X_3, X_2 \vee X_3) = p[(X_1 \vee X_3) \wedge N(X_2 \vee X_3)] + \\ p[N(X_1 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee X_3)] = p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge N(X_3)] + \\ + p[N(X_1) \wedge X_2 \wedge N(X_3)] \leqq \rho(X_1, X_2). \end{gathered}$$

$$\rho(X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3) \leqq \rho(X_1, X_2). \tag{5, 10}$$

(5, 11) Sind Q_1, Q_2 zwei Systempolynome der Variablen $X \ldots X_m$, so hat man:

$$Q_1 \sim Q_2 \rightarrow Q_1 \equiv Q_2.$$

In der Tat, aus $Q_1 \sim Q_2$ folgt: $Q_1 \wedge N(Q_2) \sim 0 \sim Q_2 \wedge N(Q_1)$, also $\rho(Q_1, Q_2) = 0$.

(5, 12) Ist Q ein Systempolynom der Variablen $X_1 \ldots X_m$, und ist $X_i \equiv X_i'$, $i = 1, 2, \ldots, m$, so hat man: $Q(X_1, X_2, \ldots, X_m) \equiv Q(X_1', X_2', \ldots, X_m')$.

Beweis durch vollständige Induktion, unter Benutzung von (5, 8), (5, 9), (5, 10).

(5, 13) Wenn $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{M}(B, p)$ und $Y_1 \equiv Y_2$, so ist:

$$p(Z, Y_1) = p(Z, Y_2).$$

Es ist nach (5, 3), (5, 4):

$$p(Y_1) = \rho(0, Y_1) \leqq \rho(0, Y_2) + \rho(Y_1, Y_2) = p(Y_2)$$

also aus Symmetriegründen $p(Y_1) = p(Y_2)$. Andrerseits ist nach (5, 12): $p(Z \wedge Y_1) = p(Z \wedge Y_2)$, also nach (2, 4):

$$p(Z, Y_1) = \frac{p(Z \wedge Y_1)}{p(Y_1)} = \frac{p(Z \wedge Y_2)}{p(Y_2)} = p(Z, Y_2).$$

Diese einfachen Sätze lassen sich mutatis mutandis auf $\rho(X_1, X_2; Y)$ übertragen. Übrigens ist:

$$(5, 14) \quad \rho(X_1, X_2; Y) = \frac{p[X_1 \wedge N(X_2) \wedge Y] + p[X_2 \wedge N(X_1) \wedge Y]}{p(Y)} \leqq \frac{\rho(X_1, X_2)}{p(Y)}.$$

Danach ist $X_1 \equiv X_2 \rightarrow \rho(X_1, X_2; Y) = 0$, aber nicht umgekehrt.

(Eingegangen: 4. XI. 1933.)

Eine Homöomorphiebedingung für orientierbare Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen.

Von **Fritz Rothberger** in Wien.

1.

Wir betrachten homogene geschlossene orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, die sich, wie aus Veblens „Analysis situs" bekannt ist, in zwei Ringräume zerlegen lassen.

Unter Ringraum verstehen wir nach Dehn das von einer Kugel mit p Henkeln im R_3 begrenzte endliche Gebiet. Auf der gemeinsamen Oberfläche der beiden hier zu betrachtenden Ringräume gibt es dann p zueinander fremde einfach geschlossene unabhängige Kurven $c_1, \ldots c_p$, welche im einen Ringraum topologische Kreisbilder begrenzen, und p Kurven $d_1 \ldots d_p$, mit denselben Eigenschaften in Bezug auf den anderen Ringraum. Diese Kurven c_i werden dann mit den d_k endlich viele Schnittpunkte gemein haben, $A^1_{ik} \ldots . A^l_{ik}$.

Es soll nun der Satz bewiesen werden,

daß die Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt ist durch: Das System der A^l_{ik}, mit ihren Kroneckerschen Indices als Schnittpunkte der c_i mit den d_k,

die zyklische Ordnung, in der die A^l_{ik} auf den c_i (für jedes i) liegen, und die zyklische Ordnung der A^l_{ik} auf den d_k.

2.

Gegeben seien 4 Ringräume vom selben Geschlecht p: C_3, D_3, C_3', D_3',
mit den entsprechenden Oberflächen: C_2, D_2, C_2', D_2',
so daß $C_3 \rightarrow C_2$ etc., ferner das System von je p Kurven mit denselben Eigenschaften wie oben in Bezug auf den entsprechenden Ringraum: c_i, d_i, c_i', d_i',

ferner eine topologische Abbildung von C_2 auf D_2:

$$f(C_2) = D_2 \tag{1}$$

und eine topologische Abbildung von C_2' auf D_2':

$$g(C_2') = D_2'. \tag{2}$$