УДК 517.98

А. М. МЕДЖИТОВ

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НА ПОЛУКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работе исследуются порядковые свойства симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к непрерывным полуконечным алгебрам фон Неймана, и описываются все такие пространства с порядково непрерывной нормой. Используются обозначения и терминология из [1—4].

1. Пусть M — алгебра фон Неймана, τ — точный полуконечный нормальный след на M. Обозначим через $C(M, \tau)$ совокупность всех измеримых операторов A, присоединенных к M, для которых $\tau(\mathbf{1}-E(\lambda))<\infty$ для некоторого $\lambda>0$ (здесь $\mathbf{1}$ — единица алгебры M, $E(\lambda)$ — спектральная функция оператора $|A|=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$). Под перестановкой оператора $A\in C(M, \tau)$, как обычно (см. например [3]), понимается функция

$$\widetilde{A}(\alpha)=\inf\{\lambda>0:\tau(\mathbf{1}-E(\lambda))<\alpha\},\ \alpha>0.$$

Линейное подпространство E в $C(M, \tau)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством на M, если из $A\in E$, $B\in C(M, \tau)$ и $\widetilde{B}(\alpha)\leqslant\widetilde{A}(\alpha)$ следует $B\in E$ и $\|B\|_E\leqslant\|A\|_E$. Как и в теории нормированных решеток, норму симметричного пространства E будем называть порядково непрерывной, монотонно полной, порядково полунепрерывной, если выполнено соответственно условие:

(*A*) из $\{A_n\}\subset E$, $A_n\downarrow 0$ следует $\|A_n\|_E\to 0$;

(*B*) из $\{A_n\}\subset E$, $0\leqslant A_n\uparrow$ и $\sup\limits_n\|A_n\|_E<\infty$ следует существование такого $A\in E$, что $A_n\uparrow A$;

(*C*) из A, $A_n\in E$, $0\leqslant A_n\uparrow A$ следует $\|A_n\|_E\to\|A\|_E$.

Всюду далее будем считать, что M — непрерывная полуконечная алгебра фон Неймана счетного типа, E — симметричное пространство на M.

Обозначим через $\widetilde{E}$ совокупность всех вещественных функций на $(0, \infty)$, каждая из которых равноизмерима с $\widetilde{A}(\alpha)$ для некоторого

$A \in E$. Для $\widetilde{f} \in E$ положим $\|f\|_{\widetilde{E}} = \|A\|_E$, если f равноизмерима с $\widetilde{A}$.

Предложение 1. $\left(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}}\right)$ — функциональное симметричное пространство на $(0, \infty)$.

Подалгебру фон Неймана $N \subset M$ назовем правильной, если она непрерывна, и сужение следа τ на положительную часть N есть полуконечный след на N. Если N — правильная подалгебра в M, то $E_N = E \cap C(N, \tau)$ с нормой, индуцированной из E, есть симметричное пространство на N.

Через $C_0(M, \tau)$ обозначается совокупность тех операторов $A \in C(M, \tau)$, для которых $\tau(1 - E(\lambda)) < \infty$ для всех $\lambda > 0$. В силу [3] все пространства E с условием (A) лежат в $C_0(M, \tau)$.

Теорема 1. Пусть $E \subset C_0(M, \tau)$. Следующие условия эквивалентны:

1) норма в E порядково непрерывна (соответственно монотонно полна, порядково полунепрерывна);

2) в M существует правильная коммутативная подалгебра N такая, что норма в E_N порядково непрерывна (соответственно монотонно полна, порядково полунепрерывна);

3) норма в $\widetilde{E}$ порядково непрерывна (соответственно монотонно полна, порядково полунепрерывна).

Следствие. Любое сепарабельное симметричное пространство на M удовлетворяет условию (A).

2. Пусть K — множество всех ограниченных финитных функций на $(0, \infty)$, совпадающих со своими перестановками. Отображение Φ: $K \to [0, \infty)$ назовем симметрическим нормирующим функционалом (с. н. ф.), если для всех $x(t), y(t) \in K$ выполнены следующие условия: 1) $\Phi(x) > 0$ при $x \neq 0$; 2) $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$ для $\lambda \geqslant 0$; 3) $\Phi(x+y) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y)$; 4) из $\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau$ для всех $t > 0$ следует $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$.

Обозначим через G_Φ^* множество всех измеримых функций $x(t)$ на $(0, \infty)$, для которых $x = x^*$ и $\sup\limits_{n, N > 1} \Phi\left(x_n^N\right) < \infty$, где x^* — перестановка x (берутся те x, для которых x^* существует), $x_n^N(t) = x^N(t) \times \chi_{(0, n]}(t)$, $x^N(t) = x(t)$ при $x(t) \leqslant N$ и $x^N(t) = N$ при $x(t) > N$.

Для каждого $x \in G_\Phi^*$ положим $\Phi(x) = \lim\limits_{n, N \to \infty} \Phi\left(x_n^N\right)$. Обозначим через G_Φ множество тех измеримых функций x, для которых $x^* \in G_\Phi^*$, и положим $\Phi(x) = \Phi(x^*)$ для $x \in G_\Phi$.

Теорема 2. Пусть Φ — с. н. ф., причем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Phi\left(\chi_{(0, \varepsilon)}\right) = 0$. Тогда G_Φ с нормой $\Phi(\cdot)$ есть симметричное пространство на $(0, \infty)$ с условиями (B) и (C). Обратно, пусть E — симметричное пространство на $(0, \infty)$ с условиями (B) и (C) и непрерывной в нуле фундаментальной функцией. Тогда $E = G_\Phi$ для некоторого с. н. ф. Φ.

Пусть Φ — с. н. ф. Обозначим через E_Φ пространство всех таких $A \in C(M, \tau)$, что $\widetilde{A}(\alpha) \in G_\Phi$, и положим $\|A\|_\Phi = \Phi\left(\widetilde{A}\right)$. В силу [3]

$(E_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ есть симметричное пространство на M. Пусть $E_\Phi^{(0)}$ — замыкание в E_Φ идеала элементарных операторов]1].

Теорема 3. 1. Симметричное пространство E на M удовлетворяет условиям *(B)* и *(C)* тогда и только тогда, когда $E=E_\Phi$ для некоторого с. н. ф. Φ.

2. Симметричное пространство E на M удовлетворяет условию *(A)* тогда и только тогда, когда $E=E_\Phi^{(\ )}$ для некоторого с. н. ф. Φ с условием $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi(\chi_{(0,\varepsilon)})=0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Segal I. E.//Ann. Math. 1953. V. 57. P. 401—457. [2] Овчинников В. И. //ДАН СССР. 1970. Т. 191. С. 769—771. [3] Yeadon F. J.//Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1980. V. 88. P. 135—147. [4] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенев Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
11. 06. 86 г.