УДК 519.2

Е.А. Морозова

Субмарковские отображения ультраслабо замкнутых алгебр и структуры семейства стационарных состояний

Структура семейства стационарных распределений вероятностей для классической цепи Маркова П с конечным или счетным числом состояний была установлена А.Н. Колмогоровым [1] и В. Дёблиным [2].

Для квантового аналога конечных цепей результат был получен нами [3, 4]. Строится обобщенное разложение для аналога счетной цепи Маркова в некоммутативной теории вероятностей.

Следуя принятому теперь изложению Невье [5], исследуется более широкий класс субмарковских отображений.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $B(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$, $B^H(\mathcal{H})$ — йорданова алгебра всех ограниченных эрмитовых операторов с умножением

$a \circ b = (ab + ba)/2$, элементы a, b, с этой алгебры определяют случайные величины. Математическое ожидание случайной величины: R — линейный неотрицательный нормированный нормальный (т.е. ультраслабо непрерывный, или, что то же, монотонно непрерывный) функционал φ на $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$. Как известно, такой функционал задается формулой $\varphi(a) = \operatorname{tr} Pa$, $\forall a$ $P \geq 0$ $\operatorname{tr} P = 1$, где P — эрмитов. P и будем называть распределением вероятностей или вероятностной мерой. Как и в классическом случае, вероятностные меры образуют выпуклое множество в линейном пространстве всех зарядов — эрмитовых операторов с конечной следовой нормой.

Определение. Эндоморфизм Π линейного упорядоченного пространства $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ является субмарковским отображением, если

а. $\Pi(\lambda a + \mu b) = \lambda \Pi a + \mu \Pi b$; б. $a \geq 0 \Rightarrow \Pi a \geq 0$;

в. $\{a_n \nearrow a\} = \{\Pi a_n \nearrow a\}$; г. $\Pi \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$.

Определение. Распределение вероятностей P или заряд Q называется Π-стационарным, если $P\Pi = P$, соответственно $Q\Pi = Q$. Заметим, что субмарковское отображение переводит любую слабо сходящуюся последовательность $P_n \Rightarrow P$ в смысле $\operatorname{tr} P_n a \to \operatorname{tr} Pa$, $\forall a \in \mathcal{B}^H$ также в слабо сходящуюся.

Множество $\mathfrak{S}_\Pi$ всех Π-стационарных распределений вероятностей является выпуклым слабо замкнутым подмножеством слабо замкнутого линейного пространства всех стационарных зарядов.

Определение. Наблюдаемая f является инвариантной относительно субмарковского отображения Π, если $f = \Pi f$. Обобщая, назовем наблюдаемую f *гармонической*, если

$$fe = ef = (\Pi f)e = e(\Pi f),$$

где e — ортопроектор на общий носитель $\mathcal{E}$ мажорирующих Π-стационарных распределений вероятностей.

Теорема 1. *Ультраслабо замкнутое линейное пространство J_Π всех Π-гармонических наблюдаемых является йордановой алгеброй. Множество всех гармонических наблюдаемых Π-эквивалентных нулю по любой Π-стационарной мере, образует идеал этой алгебры.*

Определение. Линейное отображение

$$\Lambda : b \to \Lambda b = e(\Pi b)e, \quad \forall b \in \mathcal{B}^H$$

где e — ортопроектор на носитель мажорирующих стационарных распределений вероятностей субмарковского отображения Π, назовем *редукцией* отображения Π.

Редукция Λ является субмарковским отображением $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: $\Lambda \mathbf{1} = e \leq \mathbf{1}$, поглощающим Π: $\Lambda\Pi = \Lambda^2$.

Редукция субмарковского отображения Λ совпадает с самим Λ, поэтому будем называть его *редуктивным*. Эти свойства показывают, что изучение структуры семейства Π-стационарных состояний сводится к аналогичной задаче для редукции отображения Λ, в котором "отбракованы" все несущественные и нулевые состояния. Последняя задача оказывается более простой алгебраически, так н Λ со стационарными распределениями связаны все инвариантные наблюдаемые, и нет необходимости вводить искусственно понятие гармоничности.

Теорема 2. *Всякий класс эквивалентных* Π*-гармонических* $(\mathrm{mod}\ e)$ *наблюдаемых* f *задает инвариантную наблюдаемую* efe *для редукции* Λ *и обратно, каждая* Λ *инвариантная наблюдаемая* g *задает класс эквивалентных* Π*-гармонических* $(\mathrm{mod}\ e)$ *наблюдаемых* $g+(1-e)h(1-e)$, $\forall h \in \mathcal{B}^H(\mathcal{H})$. *В этом классе существует по крайней мере одна* Π*-инвариантная наблюдаемая.*

Определение. Условным квазиожиданием M на алгебре $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ называется идемпотентное (суб)марковское отображение $M^2 = M$.

Условные ожидания и квазиожидания изучались многими авторами (см. [6, 7, 9]). Мы включили их в более широкий класс редуктивных субмарковских отображений и показали, что многие их свойства вытекают лишь из субмарковости и редуктивности.

Теорема 3. *Если* Λ *— редуктивное субмарковское отображение, то для любого* $a \in \mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ *существует ультраслабый предел последовательности* $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Lambda_a^k \to Ma$. *Он является условным квазиожиданием.*

Строение множества неподвижных точек вполне положительного марковского отображения Π, при условии, что существует полное нормальное Π-стационарное состояние, изучалось Эвансом [7]. Здесь освободимся от этого дополнительного ограничения.

Теорема 4. $\mathbb{C}$ *— линейное пространство всех инвариантных относительно вполне положительного редуктивного субмарковского отображения* Λ *линейных операторов из* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *образуют алгебру фон Неймана, обладающую квазиожиданием.*

Теорема 5. *С каждым субмарковским отображением* Π *алгебры* $\mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ *можно связать йорданову алгебру* $J = eJe$ *наблюдаемых, являющихся* Π*-гармоническими, и условное квазиожидание* M, *инвариантные наблюдаемые которого совпадают с* J, *а стационарные распределения вероятностей — с* Π*-стационарными распределениями вероятностей. Единица* e *алгебры* J *определяется как ортопроектор на носитель мажорирующих* Π*-стационарных распределений. Если отображение* Π *вполне положительно, то таково же и* M, *а* J *является самосопряженной частью некоторой алгебры фон Неймана.*

Теорема 6. *Утверждения теоремы 5 остаются справедливыми, если в качестве исходной алгебры наблюдаемых принять любую ультраслабо замкнутую йорданову подалгебру* $\mathcal{A}^H \subset \mathcal{B}^H(\mathcal{H})$ *с квазиожиданием* E *относительно* $\mathcal{B}^H$ *(соответственно, самосопряженную часть алгебры фон Неймана).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-01-01403.

Литература

[1] Колмогоров А.Н. // Бюлл. МГУ(А), 1937. т. 1, № 3.

[2] Doeblin W. // Bull. Math. Soc. Romn, Sci. 1937. V. 39, № 1, p. 57–115.

[3] Морозова Е.А., Ченцов Н.Н. // Препринт ин-та прикл. матем. АН СССР № 1 за 1981 г.

[4] Морозова Е.А. // УМН. т. 50 вып. 6 (306), 1995.

[5] Neven J. // Bases mathematiques du calcul des probabilities, 1964.

[6] Tomijama J. // Proc. Jap. Acad. Sci. 33, 1957, p. 608–612.

[7] Takesaki M. // J. Funct. Anal, 99, №. 3, 1967, p. 306–321.

[8] Arveson W.B. // Amer. J. Math., 99, № 3, 1967, p. 578–642.

[9] Evans D.E. // Comm. Math. Phys., 54, 1977, p. 293–297.