ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Е.А.Морозова, Н.Н.Ченцов

СТРУКТУРА СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Москва, 1976г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Изучены аналоги понятия класса существенных сообщающихся состояний цепи Маркова. Дано явное описание семейства стационарных матриц состояний цепи в терминах кронекеровских произведений. Указана идемпотентная стохастическая суперматрица, для которой наперёд заданный расщеп - линейное семейство эрмитовых матриц, содержащее вместе с каждой матрицей её положительную и отрицательную части, является множеством стационарных матриц.

THE STRUCTURE OF FAMILY

OF QUANTUM MARKOV CHAIN STATIONARY STATES (Abstract).

The analogies of class of communicating essential states of Markov chain are studied. The explicit description of stationary matrices of chain states in terms of Kronecker-products is given. The idempotent stochastic supermatrix having the given split - the linear family of Hermitean matrices, containing together with a matrix its positive and negative parts, as the set of all stationary matrices is shown.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

C O N T E N T S

Введение

Связь между строением стохастической матрицы, описывающей классическую цепь Маркова и строением семейства её стационарных распределений вероятностей была указана А.Н. Колмогоровым [1]. Он показал, в частности, что размерность указанного семейства равна числу m классов сообщающихся между собой существенных (чистых) состояний, и что любое стационарное распределение является усреднением m базисных, каждое из которых сосредоточено только на своем классе состояний. Таким образом, семейство всех стационарных распределений изоморфно совокупности всех распределений вероятностей на булевой алгебре подмножеств множества всех существенных классов.

В нашем докладе [2], см.также [3], была поставлена аналогичная задача для квантовых цепей Маркова. Мы показали, что носители стационарных операторов вероятностей образуют йорданову логику, — т.е. решетку $\mathcal{L}_m$ подпространств с некоторыми дополнительными бинарными операциями. Каждое стационарное распределение вероятностей раскладывается во взвешенную ортогональную сумму стационарных вероятностных операторов, сосредоточенных каждый на своем подпространстве — секторе логики $\mathcal{L}_m$. Затем каждый секторный оператор раскладывается (вообще говоря, неоднозначно) во взвешенную ортогональную сумму минимальных стационарных вероятностных операторов. Это разложение естественно описывается эрмитовой квадратичной формой в соответствующем, см.ниже, векторном пространстве над гиперкомплексными числами.

Минимальный стационарный оператор сосредоточен на своем $\mathcal{L}_m$-минимальном подпространстве ($\mathcal{L}_m$-атоме) и единственен на нем. Система всех атомов одного сектора изоморфна связке всех прямых какого-либо из следующих типов евклидовых пространств: а) вещественного пространства $\mathbb{R}^s$, б) комплексного пространства $\mathbb{C}^s$, в) правого кватернионного пространства $\mathbb{Q}^s$, г) двумерной плоскости $\mathbb{H}_p^2$ над йордановой алгеброй гиперкомплексных чисел с p мнимыми единицами, ср. [4]. В последних случаях минимальные операторы должны быть инвариантны относительно $\mathcal{L}_m$-индуцированной группы симметрий. В каждом секторе любые два атома изоклинны (либо ортогональны), а отвечающие им минимальные операторы вероятностей когерентны. Таким образом, в [3] нами дано геометрическое описание искомого семейства.

В настоящей работе мы даем аналитическое описание семейства стационарных операторов вероятностей в терминах кронекеровских произведений матриц относительно специально выбранных базисов. Используя теорию представлений клиффордовых алгебр, порождаемых гиперкомплексными системами $\mathbb{H}_p$, см. [5], [6], [7], мы затем убеждаемся, что каждая из перечисленных в пунктах а) -г) возможностей реализуется при соответствующей стохастической супер-матрице.

Когда все секторы йордановой логики носителей являются в то же время минимальными, йорданова логика оказывается булевой алгеброй, а семейство стационарных операторов вероятности описывается классическими формулами Колмогорова.

§ I. Определения и обозначения.

Мы будем описывать состояния марковской частицы в последовательные моменты времени с помощью абстрактного конечномерного комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Логикой событий будет вся решетка $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$ подпространств $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Распределение вероятностей на $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$ задается неотрицательным эрмитовым оператором со следом единица (оператором состояния).

Таким образом, если в $\mathcal{H}$ фиксирован какой-то ортонормированный базис, то распределение вероятностей на $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$ описывается матрицей $\mathcal{P} = (p^i_j)$ со свойствами

$$p^i_j = \overline{p^j_i} \quad , \qquad \forall \, i,j \; ; \tag{I.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} p^i_j \xi_i \overline{\xi_j} \geqslant 0 \; , \quad \forall \, (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n \; ; \tag{I.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p^i_i = 1 \quad ; \tag{I.3}$$

и обратно. Вероятность события $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{P}\{\mathcal{F}\} = tr\,(F\mathcal{P}) = tr\,(\mathcal{P}F) = tr\,(F\mathcal{P}F),$$

где F – матрица ортопроектора F на $\mathcal{F}$. Так заданная мера обладает свойством аддитивности для попарно ортогональных подпространств:

$$\mathcal{P}\Big\{ \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{F}_k \Big\} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{P}\{\mathcal{F}_k\} \; .$$

Для подпространств общего положения простых законов сложения нет. По знаменитой теореме Глисона свойство аддитивности влечет представление $\mathcal{P}$ в виде оператора с (I.1)–(I.3) при размерностях $n \geqslant 3$. При $n = 2$ добавочным условием характеризации служит формула Малюса, ср. [8].

Марковским супероператором Π мы будем называть линейное отображение пространства $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$ всех линейных операторов на $\mathcal{H}$ в аналогичное пространство $\mathcal{H}_1^* \otimes \mathcal{H}_1$, которое переводит каждый оператор состояния опять-таки в оператор состояния. В координатах относительно ортонормированных базисов четырехиндексная матрица супероператора Π обладает свойствами

$$ {}^{i}_{j}\Pi^{k}_{\ell} = \overline{{}^{j}_{i}\Pi^{\ell}_{k}} \quad , \quad \forall i,j \,, \ \forall k,\ell \,; \tag{I.4} $$

$$ \sum_{i,j,k,\ell} \xi_i \overline{\xi_j} \, {}^{i}_{j}\Pi^{k}_{\ell} \, \eta_k \overline{\eta_\ell} \geqslant 0 \,, \ \forall \vec{\xi} \in \mathbb{C}^{n} \,, \forall \vec{\eta} \in \mathbb{C}^{n_1} ; \tag{I.5} $$

$$ \sum_{k} {}^{i}_{j}\Pi^{k}_{k} = \delta^{i}_{j} \quad , \qquad \forall i,j \,. \tag{I.6} $$

Обратно, всякая матрица $\left({}^{i}_{j}\Pi^{k}_{\ell} \right)$, удовлетворяющая условиям (I.4)-(I.6), - стохастическая суперматрица, - задает марковский супероператор.

Нас будут интересовать цепи Маркова с фиксированным абстрактным пространством $\mathcal{H}$. Поэтому $n = n_1$ в (I.4)-(I.6). Базис пространства $\mathcal{H}$ нам будет удобно менять по ходу дела, подобно тому, как при изучении классической цепи Маркова прибегают к перенумерации состояний, влекущей перестановку столбцов и строк описывающей её стохастической матрицы.

В отличие от классической теории, два последовательных состояния здесь могут не иметь совместного распределения. Мы не будем обсуждать этого факта.

Оператор состояния $\wp$ будет стационарным состоянием цепи Маркова, когда

$$ \wp \, \Pi = \wp \ , \tag{I.7} $$

или, в матричной записи,

$$ p^{k}_{\ell} = \sum_{i,j=1}^{n} p^{i}_{j} \, {}^{i}_{j}\Pi^{k}_{\ell} \quad , \qquad \forall k,\ell \,. \tag{I.8} $$

Таким образом, нас интересует структура семейства решений уравнения (I.7). Одним из ключевых соображений при решении классической задачи Колмогорова является следующее замечание: Пусть $(x_j)_{j=1}^{n}$ - решение системы

$$ x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \, {}_{i}\Pi_{j} \quad , \ \forall j \ ; \tag{I.9} $$

со стохастической матрицей $({}_i\Pi_j)_{i,j=1}^{n}$. Тогда положительная (x_j^+) и отрицательная (x_j^-) части решения (x_j) также будут решениями (I.9), а матрица $({}_i\Pi_j)$ приводима: ${}_i\Pi_j = 0$, когда $x_i < 0$, $x_j > 0$, либо $x_i > 0$, $x_j < 0$. Здесь $x^+ = \max\{x, 0\}$.

В [3] нами доказано, что аналогичными свойствами обладают эрмитовы решения линейного уравнения

$$\mathcal{X}\,\Pi = \mathcal{X}\,. \tag{I.10}$$

Если эрмитов оператор $\mathcal{X}$ со спектральным разложением

$$\mathcal{X} = \sum \varkappa^{(j)} E_j \tag{I.11}$$

есть решение уравнения (I.10), то таковы же его положительные и отрицательные части

$$\mathcal{X}^+ = \sum_{j:\,\varkappa^{(j)}>0} \varkappa^{(j)} E_j\,, \quad \mathcal{X}^- = -\sum_{j:\,\varkappa^{(j)}<0} \varkappa^{(j)} E_j\,; \tag{I.12}$$

а супероператор Π частично приводим. Эти факты вытекают из того, что матрица диагональных членов ${}_i\tilde{\Pi}_k = {}_i\Pi_k^{\,i\,k}$ является стохастической матрицей. Таким образом, наша задача свелась к описанию строения расщепов – линейных пространств Ξ эрмитовых операторов, содержащих с каждым $\mathcal{X}$ его положительную и отрицательную части.

Именно эта последняя задача и была решена в [3] путем описания системы $\mathfrak{L}$ подпространств – носителей неотрицательных операторов. Как обычно, мы называем носителем неотрицательного эрмитова оператора $\mathcal{X}$ со спектральным разложением (I.11) подпространство $\mathcal{F}$ с ортопроектором

$$F = \sum_{j:\,\varkappa^{(j)}\neq 0} E_j\,. \tag{I.13}$$

Легко видеть, что всякое минимальное подпространство $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}$, т.е. подпространство-носитель, не имеющее собственных $\mathfrak{L}$-подпространств, может нести только один вероятностный оператор $\mathcal{P} \in \Xi$. В противном случае носители мер $(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)^+$ и $(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)^-$ были бы для $\mathcal{G}$ собственными подпространствами.

Мы доказали в [3], что система $\mathfrak{L}$ носителей операторов из расщепа образует йорданову логику. Так мы назвали в [8] решетки подпространств с некоторыми дополнительными бинарными операциями. Они тесно связаны с йордановыми алгебрами эрмитовых операторов [4], [9]: для всякой такой замкнутой йордановой алгебры система носителей операторов также образует йорданову логику.

Характеристики взаимного расположения двух подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ евклидова пространства были изучены еще К.Жорданом [10]. Полную систему инвариантов задает система собственных чисел и их кратностей у ортопроекторов F на $\mathcal{F}$ и G на $\mathcal{G}$ и произведений FGF и GFG. В частности, подпространства $\mathcal{F}=F(\mathcal{G})$ и $\mathcal{G}=G(\mathcal{F})$ изоклинны [11], т.е. все векторы одного подпространства наклонены к другому под одним и тем же углом (отличным от прямого), если оператор FGF (и, автоматически, GFG) имеет только одно положительное собственное число. Собственное подпространство $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ оператора FGF, отвечающее максимальному собственному числу $\rho^2=\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})$, можно назвать контактом $\mathcal{F}|\cap\mathcal{G}$. Оно образовано векторами $|x\rangle \in \mathcal{F}$, образующими с $\mathcal{G}$ минимальный возможный угол $\varphi = \arccos \rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Когда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ пересекаются, $\mathcal{F}|\cap\mathcal{G} = \mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \mathcal{F}\cap|\mathcal{G}$, но при $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=0$ имеем $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}|\cap\mathcal{G} \neq \mathcal{F}\cap|\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$. Контакты $\mathcal{F}|\cap\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}\cap|\mathcal{G}$, очевидно, изоклинны друг другу. Операторы F и G ортопроектирования устанавливают каноническое изометричное соответствие подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ni |x\rangle &\longrightarrow \rho^{-1} G|x\rangle = |y\rangle \in \mathcal{G} \\ &\downarrow\uparrow \\ \mathcal{G} \ni |y\rangle &\longrightarrow \rho^{-1} F|y\rangle = |x\rangle \in \mathcal{F} . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Йордановы логики подпространств конечномерного пространства $\mathcal{H}$ удобно охарактеризовать как системы, устойчивые относительно операций:

I. Собственного ортогонального вычитания, определенного только для пар $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$

$$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E} \ominus \mathcal{F} .$$

II. Векторного сложения подпространств

$$(\mathcal{F},\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F} + \mathcal{G} ,$$

III. Выделения контакта

$$(\mathcal{F},\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{F} \Cap \mathcal{G}$$

где $\mathcal{F} \Cap \mathcal{G} = 0$ при $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.

IУ. Когерентного $\mathbb{R}$ – линейного комбинирования изоклинных подпространств

$$\mathcal{K}_{a:b}\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} := \{ |u\rangle = a|x\rangle + bI|x\rangle, \ \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \}, \quad (1.15)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $a:b \neq 0:0$.

У. $\mathcal{H} \in \mathfrak{L}$.

Если условие У не выполнено, то система $\mathfrak{L}$ будет квазилогикой. Однако, для конечномерного $\mathcal{H}$ квазилогика $\mathfrak{L}$ будет логикой подпространств своего максимального элемента $\mathcal{H}'$. Поэтому, для краткости мы будем называть их также логиками.

В бесконечномерном пространстве $\mathcal{H}$ спектр операторов FGF и GFG не обязан быть дискретным. Поэтому, вместо операций III и IУ надо ввести единую более сложную операцию, зависящую еще от спектральной переменной. Кроме того, нужно потребовать замкнутости $\mathfrak{L}$. Мы выбрали здесь систему более простых операций с тем, чтобы она была ближе к системе операций Бирктофа – фон Неймана [12] .

Всякая логика подпространств является решеткой относительно операций $+$ и $\cap$, см [8] , [13] . Если для сокращения ввести операцию

$$\mathcal{F} \urcorner \mathcal{G} := (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G} ,$$

то операция пересечения выразится как

$$(\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \left[(\mathcal{F} \urcorner \mathcal{G}) + (\mathcal{G} \urcorner \mathcal{F}) \right]$$

в силу тождества де Моргана $(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^{\perp} = \mathcal{F}^{\perp} + \mathcal{G}^{\perp}$. Сходным образом для операции ортогонального проектирования

$$F\{\mathcal{G}\} = \mathcal{G} \urcorner (\mathcal{G} \urcorner \mathcal{F})$$

Опишем коротко принципы классификации [13] , йордановых логик, на которые нам придется опираться. Два минимальных подпространства (дальше мы их будем называть атомами) логики ортогональны, либо изоклинны, так как их контакты – либо нулевые, либо совпадают с ними самими. Назовем два атома $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ логики $\mathfrak{L}$ связанными, если они контактируют, или если они ортогональны, но существует третий $\mathfrak{L}$-атом $\mathcal{E}$, контактирующий с ними обоими. Как доказано в [13] , отношение связанности транзитивно. Поэтому, все $\mathfrak{L}$ -атомы разбиваются на непересекающиеся классы связанных между собой. Сумма всех подпространств одного класса будет факторным пространством логики – её сектором. По построению, любые два различные $\mathcal{L}$ -сектора $\mathcal{H}_j$ и $\mathcal{H}_k$, $j \neq k$, ортогональны, и любое $\mathcal{L}$ -подпространство разлагается в ортогональную сумму своих ортопроекций на секторы.

$\mathcal{L}$ – подпространства сектора $\mathcal{H}_j$, очевидно, также образуют логику – факторную логику $\mathcal{L}_j = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}_j$. Обратно, пусть задано ортогональное разложение $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{H}_j$ и в каждом "секторе" $\mathcal{H}_j$ имеется своя логика $\mathcal{L}_j$ подпространств $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}_j$. Совокупность $\mathcal{L}$ подпространств вида

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{A}_j \quad ; \quad H_j\{\mathcal{A}\} = \mathcal{A}_j \in \mathcal{L}_j \quad , \forall j \, ,$$

как нетрудно показать, тоже будет йордановой логикой, $\mathcal{L} = \oplus \mathcal{L}_j$. Таким образом, описание строения йордановой логики сводится к описанию структур её факторов. А ввиду того, что каждое $\mathcal{L}$ -подпространство конечномерного $\mathcal{H}$ раскладывается в ортогональную сумму $\mathcal{L}$ -атомов, достаточно описать строение связки минимальных подпространств каждого сектора, т.е. каждого класса связанности.

Все $\mathcal{L}$ -атомы одного класса изометричны, так как либо изоклинны, либо ортогональны, но связаны через изоклинное им обоим. Привлекая к рассмотрению возникающие между ними изометрии, их связку удается координатизовать.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — два изоклинных подпространства, $\mathcal{B} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$. Тогда для всякого $|x\rangle \in \mathcal{F}$ имеет место связь

$$\mathcal{G} \ni |y\rangle = I\,|x\rangle = \cos\varphi \cdot |x\rangle + \sin\varphi \cdot |z\rangle \, , \ |z\rangle \in \mathcal{B} \, , \tag{1.16}$$

где I — каноническая изометрия, $\varphi = \arccos \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Таким образом, изометрия $I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$ изоклинных подпространств индуцирует изометрию V подпространства $\mathcal{F}$ и ортогонального ему $\mathcal{B} = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$. Нетрудно, далее, подсчитать, что

$$V_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} \, I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} \, . \tag{1.17}$$

Семейство подпространств

$$\mathcal{G}_\psi := \{ |y\rangle = \cos\psi \cdot |x\rangle + \sin\psi \cdot V|x\rangle \ , \ \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \} \ . \qquad (I.18)$$

определяет целый пучок изоклинных друг другу подпространств, который мы будем называть $\mathbb{R}$ -пучком. Все они являются когерентными $\mathbb{R}$ -линейными комбинациями (I.15) изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ и исчерпывают их. При $0<\psi<\pi/2$ они задают то же каноническое соответствие $V = V_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$ между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{G}_{\pi/2}$, что и $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\varphi$, а при $-\pi/2 < \psi < 0$ соответствие $-V: |x\rangle \to -V|x\rangle$. Обратно, пусть заданы два изометричных ортогональных подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ и указана какая-то связывающая их изометрия V. Тогда формула (I.18) задает некоторый $\mathbb{R}$ -пучок изоклинных друг другу подпространств $\mathcal{G}_\psi$, проходящий через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$, причем каждое из $\mathcal{G}_\psi$ порождает V или $-V$ по (I.17).

Каждый вектор $\mathcal{G}_\psi$ является линейной комбинацией отвечающих ему векторов из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$. Ортопроекторы G_ψ образуют квадратичное семейство. Их ограничение на $\mathcal{F} \oplus \mathcal{B}$ имеет вид

$$G_\psi = \begin{pmatrix} \cos^2\psi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{F}} & \sin\psi\cos\psi \cdot V^* \\ \sin\psi\cos\psi \cdot V & \sin^2\psi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} . \qquad (I.19)$$

Здесь V^* — изометрия $\mathcal{B}$ на $\mathcal{F}$, обратная к изометрии V подпространства $\mathcal{F}$ на $\mathcal{B}$. В ортонормированном базисе $\mathcal{F} \oplus \mathcal{B}$, состоящем из пар V-связанных векторов, матрицы V и V^* будут взаимно-обратными унитарными матрицами.

Рассмотрим два связанных ортогональных минимальных подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$. Любое отличное от них минимальное $\mathcal{G} \subset (\mathcal{F} \oplus \mathcal{B})$ полностью определяется значением $\cos\varphi = \rho(\mathcal{F};\mathcal{G})$ и изометрией $V_{\mathcal{G}}$, определенной (I.17), см. также (I.19). Поскольку любые такие $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}''$ изоклинны между собой, то изометрии V и W, порожденные двумя разными пучками, обязательно связаны соотношениями

$$W^*V + V^*W = 2\varkappa \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{F}} \ , \ VW^* + WV^* = 2\varkappa \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}} \ , \qquad (I.20)$$

где $\varkappa(V,W)$ – геометрическая характеристика расположения, $-1 \leqslant \varkappa(V,W) \leqslant 1$. Далее, для любого отношения вещественных чисел $a:b \neq 0:0$ удается указать пучок, определяющий изометрию $\alpha V + \beta W$, где $\alpha:\beta = a:b$. Например, чтобы построить изометрию пропорциональную $V + W$, выберем в указанных пучках "средние точки" $\mathcal{G}' = \mathcal{G}'_{\pi/4}$ и $\mathcal{G}'' = \mathcal{G}''_{\pi/4}$, проведем через $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}''$ третий $\mathbb{R}$-пучок и возьмем "середину" $\mathcal{G}$ меньшей из "дуг", соединяющих $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}''$. Проходящий через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ пучок и будет искомым. Таким образом, отображения подобия λV атома $\mathcal{F}$ на атом $\mathcal{B}$ образуют вещественное евклидово пространство со скалярным произведением

$$\left(\lambda_1 V_1 , \lambda_2 V_2\right) = \lambda_1 \lambda_2 \ \varkappa(V_1 , V_2) .$$

Фиксируем какой-либо пучок и порождаемую им изометрию W. Далее, выберем в пространстве подобий ортонормированный базис $V_0 = W$, $V_1, \ldots, W_p$. Операторы вида $X = \lambda W^* V$ задают преобразования подобия $\mathcal{F}$ на себя; они тоже образуют $\mathbb{R}$ – линейное пространство. Для базисных изометрий $X_j = W^* V_j$ по (I.20) справедливы соотношения:

$$X_0 = \mathbb{1} \ ;$$

$$X_j^2 = -\mathbb{1} \ , \qquad X_j = -X_j^* \ , \quad j \geqslant 1 \ ; \tag{I.2I}$$

$$X_j X_k = -X_k X_j \ , \qquad 0 \neq j \neq k \neq 0 \ .$$

т.е. рассматриваемое линейное пространство подобий координатизуется гиперкомплексным числом с p минимыми единицами:

$$X X^* = \Big(\xi_0 + \sum_{j=1}^{p} \xi_j X_j \Big) \Big(\xi_0 - \sum_{j=1}^{p} \xi_j X_j \Big) =$$

$$= \xi_0^2 + \sum_{j=1}^{p} \xi_j^2 = X^* X = \| X \|^2 .$$

Общий же вид ортопроектора G на минимальное $\mathcal{G} \subset (\mathcal{F} + \mathcal{B})$ согласно (I.I9) будет

$$
\begin{pmatrix}
\cos^2\varphi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{F}} & \sin\varphi\cos\varphi\,(\gamma_0 \mathbb{1}_{\mathcal{F}} - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k X_k)W^* \\
\sin\varphi\cos\varphi \cdot W(\gamma_0 \mathbb{1}_{\mathcal{F}} + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k X_k) & \sin^2\varphi \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{B}}
\end{pmatrix} \tag{I.22}
$$

Именно это мы подразумевали, когда утверждали, что связка минимальных подпространств предминимального $\mathbb{C}$ -факторного подпространства изоморфна связке прямых плоскости $\mathbb{H}_p^{\,2}$ над системой гиперкомплексных чисел с p мнимыми единицами.

Следует отметить, что произведение XY двух индуцированных подобий уже не обязано быть индуцированным подобием. Однако обратное X^{-1} при $X \neq 0$ и йорданово произведение $X \circ Y = \frac{1}{2}XY + \frac{1}{2}YX$ таковыми будут, см. [13]. Поэтому, рассмотренную связку прямых в $\mathbb{H}_p^{\,2}$ можно рассматривать как проективную прямую $P\mathbb{H}_p$ с однородными координатами

$$
\lambda\cos\varphi : \lambda\sin\varphi\,(\gamma_0 + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k e_k) = \\
= \lambda\cos\varphi\,(\gamma_0 - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k e_k) : \lambda\sin\varphi \tag{I.23}
$$

где одна из координат обязательно вещественна.

Если же сектор содержит по крайней мере три попарно ортогональных атома, возникают конфигурационные соотношения. Как известно, конфигурации проективной геометрии возникают в трехмерном проективном пространстве, т.е. в связке прямых четырехмерного аффинского пространства. Это обстоятельство было использовано фон Нейманом в его знаменитой работе [14] и легло в основу геометрического подхода Вардараяна к квантовой логике [15]. На самом же деле имеет место более сильный результат. Нам удалось установить его, потому что мы привлекли к рассмотрению конфигурации, куда входят не только предминимальные пространства (аналоги проективных прямых), но и $\mathbb{R}$ -пучки минимальных подпространств (объекты меньшей размерности).

Конфигурация с $\mathbb{R}$ -пучками позволила нам в [13] установить, что в предминимальном подпространстве произведение двух индуцированных логикой изометрий минимального подпространства $\mathcal{F}$ на себя снова является индуцированной изометрией. Это означает, что изоморфное $\mathbb{H}_p$ евклидово пространство индуцированных подобий образует кольцо над $\mathbb{R}$, причем кольцо с делением, т.е. тело. По знаменитой теореме Фробениуса оно тогда может быть либо полем $\mathbb{R}$, либо полем $\mathbb{C}$, либо телом $\mathbb{Q}$ кватернионов. Затем евклидова конфигурация теоремы о трех перпендикулярах позволяет провести координацию связки минимальных подпространств однородными координатами со значениями из тела подобий. Когда тело подобий изоморфно $\mathbb{Q}$, эти координаты должны быть правыми однородными координатами.

§ 2. Симметрии минимальных операторов.

Эрмитовы операторы, образующие расщеп Ξ, должны удовлетворять некоторым условиям симметрии. Их необходимость была установлена в [3] на следующем пути. Система Ξ, ввиду линейности, замкнутости и расщепимости вместе с двумя операторами $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ должна содержать также оператор

$$\mathcal{P} \urcorner \mathcal{Q} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} [\mathcal{Q} - \varepsilon \mathcal{P}]^{(-)} = \lim_{t \to \infty} [\mathcal{P} - t \mathcal{Q}]^{(+)}.$$

Если $\mathcal{P} \geqslant 0$ и $\mathcal{Q} \geqslant 0$, а подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – их носители, то, как вычислено в теореме 9.3 нашей работы [3], $\mathcal{P} \urcorner \mathcal{Q} = (1 - G)\mathcal{P}(1 - G)$. А носителем этого Ξ-оператора $\mathcal{P} \urcorner \mathcal{Q}$ будет подпространство $\mathcal{G}' = (\mathcal{F} + \mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}$, – относительное ортогональное дополнение к $\mathcal{G}$ в $\mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Повторяя указанное рассуждение на этот раз уже к паре $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P} \urcorner \mathcal{Q}$, и прибегая далее к рекуррентному процессу, устанавливаем, что

$$G \mathcal{P} G \in \Xi, \qquad FGF\mathcal{P}FGF = FG\mathcal{P}GF \in \Xi,$$

$$(FGF)^n \mathcal{P} (FGF)^n \in \Xi. \qquad (2.1)$$

Нормируя оператор FGF, т.е. заменяя его на $\rho^{-2}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) FGF$, мы приходим в пределе к равенству

$$(F\wedge G)\,\mathcal{P}\,(F\wedge G)\ \in\ \Xi$$

где $F\wedge G$ – ортопроектор на контакт $\mathcal{F}$ с $\mathcal{G}$, т.е. на собственное подпространство оператора FGF, отвечающее его максимальному собственному числу. Именно из этих фактов вытекает, что система носителей Ξ-операторов образует йорданову логику.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — атомы логики носителей. Тогда они изоклинны либо ортогональны, поскольку либо $\mathcal{F}|\cap\mathcal{G}=\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\cap|\mathcal{G}=\mathcal{G}$, либо $\mathcal{F}|\cap\mathcal{G}=0=\mathcal{F}\cap|\mathcal{G}$ по минимальности. Как уже отмечалось в §1, каждый минимальный носитель несет только один Ξ-оператор вероятностей, откуда необходимо $G\mathcal{P}G=\lambda\mathcal{Q}$, $F\mathcal{Q}F=\mu\mathcal{P}$. Нетрудно подсчитать, что для минимальных Ξ-операторов вероятностей эта связь имеет вид

$$\rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})\,\mathcal{Q}=G\mathcal{P}G\ ;\qquad \rho^2(\mathcal{F},\mathcal{G})\,\mathcal{P}=F\mathcal{Q}F. \tag{2.2}$$

Соотношения (2.2) позволяют перенести понятие когерентности чистых (т.е. векторных) состояний на смешанные состояния. Мы предложили два состояния $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ с носителями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ также называть когерентными, когда выполнены условия (2.2). Для таких пар состояний также имеет смысл говорить о суперпозиции.

Как было отмечено в § 1, см.формулу (1.14), операторы $\rho^{-1}G$ и $\rho^{-1}F$ задают каноническую изометрию изоклинных подпространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Эти изометрии и их композиции были использованы нами, см. §1, для координатизации пучка всех минимальных подпространств. Нам надо проверить, что построенная координатизация позволяет однозначно восстанавливать каждый минимальный оператор вероятностей $\mathcal{Q}$, какова бы ни была цепочка, связывающая его носитель с носителем исходного $\mathcal{P}$. Другими словами, мы хотим проверить, что координаты учитывают всю систему подобных связей, а не только те, которые были использованы при построении координат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{N}$ – предминимальное факторное пространство йордановой логики $\mathbb{L}$, и пусть координатизующие подобия изоморфны системе $\mathbb{H}_p$ гиперкомплексных чисел с p мнимыми единицами.

Пусть, далее, $\mathcal{P}$ – сосредоточенный на минимальном пространстве $\mathcal{F}$ оператор вероятностей, ограничение $\hat{\mathcal{P}}$ которого на $\mathcal{F}$ коммутирует со всеми мнимыми единицами.

$$\hat{\mathcal{P}} X_j = X_j \hat{\mathcal{P}} \;, \quad j = 1, \ldots, p; \tag{2.3}$$

системы $\mathbb{L}$ -индуцированных подобий $\mathcal{F}$ на себя.

Тогда каждому $\mathbb{L}$-атому $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ отвечает единственный оператор вероятностей $\mathcal{O}\!\!/$ так, что

$$\rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\,\mathcal{O}\!\!/_2 = G_2\,\mathcal{O}\!\!/_1\,G_2 \;, \qquad \forall\; \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{N}, \tag{2.4}$$

совпадающий с $\mathcal{P}$ на $\mathcal{F}$. Если ортопроектор G на $\mathcal{G}$ записан в блочном виде (1.22) относительно разложения $\mathcal{N} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \mathcal{N} \ominus \mathcal{F}$, то $\mathcal{O}\!\!/$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi\,\hat{\mathcal{P}} & \sin\varphi\cos\varphi\,\hat{\mathcal{P}}\left(\gamma_0 1\!\!1 - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k X_k\right)W^* \\ \sin\varphi\cos\varphi\,W\left(\gamma_0 1\!\!1 + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k X_k\right)\hat{\mathcal{P}} & \sin^2\varphi\,W\hat{\mathcal{P}}W^* \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

<u>Доказательство.</u> Подставим в правую часть формулы (2.4) выражение (2.5) для $\mathcal{O}\!\!/_2$ и выражение (1.22) для G_2 и перемножим их поблочно. Для удобства различения угол и изометрию для $\mathcal{G}_2$ обозначим через ψ и Y. По линейности (2.3) оператор $\hat{\mathcal{P}}$ коммутирует со всеми комбинациями $\alpha_0 1\!\!1 + \sum \alpha_k X_k$. Поэтому для левого верхнего блока в правой части (2.4) получаем

$$\cos^2\psi\,[\cos^2\psi\cos^2\varphi + \cos\psi\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\,(Y^*X + X^*Y) +$$

$$+ \sin^2\psi\sin^2\varphi\, Y^*Y\,]\,\hat{\mathcal{P}} = \rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\cos^2\psi\cdot\hat{\mathcal{P}},$$

где последний вывод сделан на основании соотношений (I.20),(I.21) и выражения для $\varkappa(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$, см. [13], формулу (2.8). Для остальных блоков проверка аналогична. Попросту говоря, при подсчете произведения $G_2\,\mathcal{O}\!\!/\,G_2$ с точностью до множителя $\hat{\mathcal{P}}$ блоки оказываются теми же самыми, что и в произведении $G_2 G_1 G_2 = = \rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\, G_2$. ⊠

Обратимся теперь к рассмотрению факторного пространства $\mathcal{N}$, более широкого, чем предминимальное. Система "однородных" координат в связке минимальных подпространств пространства $\mathcal{N}$ вводятся следующим образом. Берется какое-либо ортогональное разложение $\mathcal{N} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{E}_j$ на минимальные, и ещё один атом $\mathcal{F}$, контактирующий со всеми $\mathcal{E}_j$. Канонические изометрии I^o_k и I^k_o подпространства $\mathcal{F}$ на изоклинные базисные $\mathcal{E}_j$ служат для определения равенства изометрий на себя (подобий на себя) разных координатных подпространств. Именно, изометрии U и V пространств $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_\ell$ мы считаем равными (относительно координатоопределяющего набора $\{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m; \mathcal{F}\}$), если

$$V = W^i_\ell\, U\, W^\ell_i\,, \qquad U = W^\ell_i\, V\, W^i_\ell\,, \tag{2.6}$$

$$W^j_k = I^o_k\, I^j_o\,. \tag{2.7}$$

В [13] доказана корректность этого определения.

Каждому $\mathfrak{L}$-атому $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ отвечает определенный с точностью до произвольного правого множителя набор

$$X^{(1)} : X^{(2)} : \ldots : X^{(m)}\;; \qquad X^{(j)} \in \mathbb{X}\,, \quad \forall j\,; \tag{2.8}$$

где тело $\mathbb{X}$ $(\simeq \mathbb{R}$, или $\simeq \mathbb{C}$, или $\simeq \mathbb{Q}$) индуцировано логикой $\mathcal{L}_m \cap \mathcal{N}$. В последних двух случаях среди изометрий пространства $\mathcal{E}_1$, а стало быть, по (2.6) и пространств $\mathcal{E}_j$, $j>1$, выбраны базисные изометрии I , соответственно I , J , K . Набор чисел (2.8) имеет следующую интерпретацию. Пусть $|X_i^{(i)}| \neq 0$, такое i найдется, так как набор $0:0:\ldots:0$ запрещен. Набор (2.8) нормируем умножением справа так, чтобы

$$|X^{(1)}|^2 + |X^{(2)}|^2 + \ldots + |X^{(m)}|^2 = 1 \quad , \qquad (2.9)$$

$$X^{(i)} = \rho_i > 0 \, . \qquad (2.10)$$

За $\mathcal{G}$ принимается подпространство, проекции $\mathcal{G}_{ik}$ которого на $\mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}_k$ образуют с $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_k$ углы φ_{ik} :

$$\cos\varphi_{ik} : \sin\varphi_{ik} = \rho_i : \rho_k \; , \qquad \rho_k = |X^{(k)}|, \; \forall k, \qquad (2.11)$$

и при $\rho_k > 0$ порождают изометрии $\mathcal{E}_i$ на $\mathcal{E}_k$

$$W_k^i \;\; \rho_k^{-1} X^{(k)} \quad , \qquad \forall k : \rho_k > 0 \, . \qquad (2.12)$$

Данные (2.11) и (2.12) однозначно определяют проекции $\mathcal{G}_{ik}$, а последние, как доказано в [13] по теореме о трех перпендикулярах однозначно определяют $\mathcal{G}$. Окончательный итог конструкции не зависит от выбора i , лишь бы $\rho_i > 0$.

Из приведенных рассуждений следует, см. [13] , § 5, что сужение на $\mathcal{N} = \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_m$ ортопроектора G на $\mathcal{G}$ имеет блочный вид

$$G = \left(G^{jk}\right)_{j,k=1}^{m} \quad ; \qquad G^{jk} = W_j^i X^{(j)} X^{(k)*} W_i^k \; ; \qquad (2.13)$$

где предположено, что $\rho_i > 0$, и числа $X^{(\ell)}$ интерпретированы, как изометрии $\mathcal{E}_i$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть сектор $\mathcal{N}$ йордановой логики $\mathfrak{L}$ содержит пред-предминимальное пространство, и пусть координатизующие подобия изоморфны кватернионам (комплексным числам).

Пусть, далее, $\wp$ – сосредоточенный на минимальном пространстве $\mathcal{E}_1$ оператор вероятностей, ограничение $\hat{\wp}$ которого на $\mathcal{E}_1$ коммутирует с мнимыми единицами I, J, K (мнимой единицей I):

$$\hat{\wp} I = I \hat{\wp}, \dots \tag{2.14}$$

системы $\mathfrak{L}$-индуцированных подобий $\mathcal{E}_1$ на себя.

Тогда каждому $\mathfrak{L}$-атому $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ отвечает (единственный) оператор вероятностей $\mathcal{Q}$ так, что выполнены условия когерентности (2.4)

$$\rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\, \mathcal{Q}_2 = G_2 \mathcal{Q}_1 G_2 \quad , \quad \forall\, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{N},$$

и что на $\mathcal{E}_1$ он совпадает с $\wp$ Если ортопроектор G на $\mathcal{G}$ записан в блочном виде (2.13), то ограничение $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{N}$ имеет блочный вид

$$\hat{\mathcal{Q}} = \left(\mathcal{Q}^{jk}\right)_{j,k=1}^{m} \quad , \quad \mathcal{Q}^{jk} = W_j^i X^{(j)} \hat{\wp}_i X^{(k)*} W_i^k , \tag{2.15}$$

$$\hat{\wp}_i = W_i^1 \hat{\wp} W_1^i .$$

<u>Доказательство.</u> Если $\mathcal{G}_1 \perp \mathcal{G}_2$, то соотношение (2.4) тривиально: $\rho(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0$ и $0 \leq G_2 \mathcal{Q}_1 G_2 \leq G_2 G_1 G_2 = 0$. А если $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ контактируют, то найдется $\mathcal{E}_i$, контактирующее с каждым из них: иначе они бы лежали в дизъюнктных координатах подпространствах и были ортогональны. Поэтому, подставим в правую часть формулы (2.4) выражение (2.15) для $\hat{\mathcal{Q}}_1$ и выражение (2.13) для $\hat{G}_2$ с одним и тем же i, и перемножим их. Чтобы не было путаницы, изометрии для $\mathcal{G}_1$ будем обозначать че-

рез X , а для $\mathcal{G}_2$ – через Y . Получим опять блочный оператор с блоками

$$B^{jk} = \sum_{\alpha,\beta} W_j^i Y^{(j)} Y^{(\alpha)*} X^{(\alpha)} \hat{\wp} X^{(\beta)*} Y^{(\beta)} Y^{(k)*} W_i^k =$$

$$= W_j^i Y^{(j)} \Big(\sum_\alpha Y^{(\alpha)*} X^{(\alpha)} \Big) \hat{\wp} \Big(\sum_\beta X^{(\beta)*} Y^{(\beta)} \Big) Y^{(k)*} W_i^k =$$

$$= \rho^2 (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)\, W_j^i Y^{(j)} \hat{\wp} Y^{(k)*} W_i^k ,$$

ибо операторы $\sum\limits_\alpha Y^{(\alpha)*} X^{(\alpha)} = \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle$ и $\sum\limits_\beta X^{(\beta)*} Y^{(\beta)} = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$ коммутируют по условию с $\hat{\wp}$, сопряжены друг с другом и поэтому в произведении дают неотрицательный скалярный оператор $\rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{E}_i}$. Значение числового множителя можно найти, не прибегая к геометрическим соображениям, поскольку все выкладки проходят точно так же, как в тождестве $G_2 G_1 G_2 = \rho^2(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) G_2$. ⊠

Из доказанной теоремы вытекает важное следствие: Если Ξ - оператор $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ сосредоточен на секторе $\mathcal{N}$ логики носителей, то его диагональные блоки имеют вид

$$\mathcal{O}\!\mathcal{l}^{kk} = W_k^1 \lambda_k \hat{\wp}_1 W_1^k \quad , \quad \forall k, \qquad (2.16)$$

где λ_k – вещественное число. Наша ближайшая цель – установить, что недиагональные блоки имеют сходный вид

$$\mathcal{O}\!\mathcal{l}^{k\ell} = W_k^1 A^{(k\ell)} \hat{\wp}_1 W_1^\ell \quad , \quad A^{(k\ell)} = A^{(\ell k)*}, \ \forall k,\ell, \quad (2.17)$$

где $A^{(k\ell)}$ – некоторое подобие координатного пространства $\mathcal{E}_1$, индуцированное логикой носителей и потому коммутирующее с $\wp_1$. Чтобы вывести (2.17) из (2.16) в следующем § мы рассмотрим определяемую $\hat{\mathcal{O}\!\mathcal{l}}$ квадратичную форму на $\mathbb{X}^m$.

§ 3. Описание расщепов эрмитовых операторов.

Пусть задана некоторая логика $\mathfrak{L}$ подпространств конечномерного пространства $\mathcal{H}$. Требуется описать все расщепы, т.е. все линейные семейства Ξ эрмитовых операторов на $\mathcal{H}$, содержащие вместе с каждым оператором его положительную и отрицательную части, для которых логика $\mathfrak{L}$ была бы логикой носителей Ξ-операторов.

Л Е М М А 3.1. Если определяемая Ξ- оператором $\mathfrak{A}$ мера $\mathfrak{A}\{\mathcal{B}\}$ на подпространствах $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}$

$$\mathfrak{A}\{\mathcal{B}\} = \operatorname{tr} B\mathfrak{A} = \operatorname{tr} B\mathfrak{A}B \tag{3.1}$$

такова, что $\mathfrak{A}\{\mathcal{G}\}=0$ на всех атомах $\mathcal{G}$ логики $\mathfrak{L}$ носителей Ξ -операторов, то эрмитов оператор $\mathfrak{A}$ — нулевой, $\mathfrak{A}=0$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathfrak{A}$ отличен от нулевого оператора. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(+)} - \mathfrak{A}^{(-)}$, где из Ξ-операторов $\mathfrak{A}^{(+)}$ и $\mathfrak{A}^{(-)}$ хоть один отличен от нулевого. Пусть $\mathfrak{A}^{(+)} > 0$. Тогда у него есть носитель $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}$, и для всякого $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ имеем $\mathfrak{A}^{(+)}\{\mathcal{B}\} = \mathfrak{A}\{\mathcal{B}\}$. Поскольку носитель разлагается в ортогональную сумму минимальных, $\mathcal{C} = \bigoplus_i \mathcal{F}_i$ то $\mathfrak{A}^{(+)}\{\mathcal{C}\} = \mathfrak{A}\{\mathcal{C}\} = \sum_i \mathfrak{A}\{\mathcal{F}_i\} = 0$, что противоречит нетривиальности $\mathcal{C}$. Аналогично устанавливается, что и $\mathfrak{A}^{(-)} = 0$. ⊠

Л Е М М А 3.2. Пусть $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_s$ – набор всех факторных подпространств логики $\mathfrak{L}$, N_j — соответствующие ортопроекторы. Тогда

$$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^{s} N_j \mathfrak{A} N_j, \qquad \forall \mathfrak{A} \in \Xi, \tag{3.2}$$

каков бы ни был расщеп Ξ, имеющий $\mathfrak{L}$ логикой носителей.

СЛЕДСТВИЕ.

$$\mathfrak{A} N_j = N_j \mathfrak{A}; \qquad \forall j, \quad \forall \mathfrak{A} \in \Xi. \tag{3.3}$$

<u>Доказательство.</u> Согласно свойству (2.1) расщепов, эрмитов оператор $N_j \mathcal{Q} N_j$ принадлежит Ξ, так как $\mathcal{N}_j \in \mathcal{L}$. Заметим, что

$$\mathcal{Q}\{\mathcal{A}\} = (N_j \mathcal{Q} N_j)\{\mathcal{A}\} \quad , \qquad \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}_j \ . \qquad (3.4)$$

В самом деле, в условиях (3.4) будет $A N_j = A = N_j A$, откуда подставляя в (3.1), получаем

$$\mathcal{Q}\{\mathcal{A}\} = \operatorname{tr} A \mathcal{Q} A = \operatorname{tr} A N_j \mathcal{Q} N_j A = (N_j \mathcal{Q} N_j)\{\mathcal{A}\} .$$

Далее, имеет место свойство

$$(N_j \mathcal{Q} N_j)\{\mathcal{B}\} = 0 \quad , \ \forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_k \ , \qquad k \neq j \ ; \qquad (3.5)$$

поскольку $B N_j = 0$ ввиду $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_k \perp \mathcal{N}_j$, так что $\operatorname{tr} B N_j \mathcal{Q} N_j = 0$. Составим теперь Ξ-оператор

$$\mathcal{R} = \mathcal{Q} - \sum_{k=1}^{s} N_k \mathcal{Q} N_k \ .$$

Для любого минимального $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{N}_j$, имеем

$$\mathcal{R}\{\mathcal{G}\} = \mathcal{Q}\{\mathcal{G}\} - \sum_k (N_k \mathcal{Q} N_k)\{\mathcal{G}\} = \mathcal{Q}\{\mathcal{G}\} - (N_j \mathcal{Q} N_j)\{\mathcal{G}\} = 0,$$

по (3.4) и (3.5). Следовательно, $\mathcal{R} = 0$ по лемме 3.1, что дает (3.2). Подставляя (3.2) в обе части (3.3), находим $\mathcal{Q} N_j = N_j \mathcal{Q} N_j = N_j \mathcal{Q}$. $\boxtimes$

Рассмотрим теперь Ξ-оператор $\mathcal{Q}$, носитель которого целиком лежит в факторном подпространстве $\mathcal{N}$. Пусть в $\mathcal{N}$ задана какая-то координатизующая система $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m; \mathcal{F})$, $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_k$. Тогда каждому $\mathcal{L}$-атому $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ отвечает определенный с точностью до фазового множителя Y, $Y Y^* = \mathbb{1}$, набор однородных координат (2.8), нормированных по (2.9) на единицу. Вне зависимости от выбора фазового множителя Y, эти координаты определяют блочную запись (2.13) ортопроектора G на $\mathcal{G}$, отвечающую разложению $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_k$. Записывая $\mathcal{Q}$ в аналогичном блочном виде, получаем,

$$\mathcal{O}\{\mathcal{G}\} = \sum_{k,l=1}^{m} \operatorname{tr} G^{kl} \mathcal{O}^{kl} = \tag{3.6}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{m} \operatorname{tr} X^{(l)*} (W_i^l \, \mathcal{O}^{lk} W_k^i) \, X^{(k)} .$$

Таким образом, значение $\mathcal{O}\{\mathcal{G}\}$ задается эрмитовой "квадратичной формой" от нормированных однородных координат $\mathcal{G}$. Мы покажем, что для квадратичных форм (3.6) справедлива максимальная трактовка собственных чисел, см.напр. [16] .

Л Е М М А 3.3. Пусть носитель Ξ -оператора $\mathcal{O}$ лежит в факторном пространстве $\mathcal{N}$. Тогда определенная на связке минимальных подпространств $\mathcal{G}$ сектора $\mathcal{N}$ функция $\mathcal{O}\{\mathcal{G}\} = \operatorname{tr} G \mathcal{O}$ достигает максимума.

<u>Доказательство.</u> Введем в связке однородные координаты из алгебры $\mathbb{X}$ подобий, а сами элементы X будем представлять вещественными линейными комбинациями какого-либо его стандартного базиса (1.21). На сфере

$$1 = |X^{(1)}|^2 + \ldots + |X^{(m)}|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\xi_{k,0}^2 + \sum_{l=1}^{p_k} \xi_{k,l}^2 \right) \tag{3.7}$$

возникает заданная (3.6) квадратичная функция $\mathcal{O}\{\mathcal{G}(\vec{X})\}$,постоянная на наборах отличающихся (правым) фазовым множителем. Ввиду эрмитовости $\mathcal{O}$ она будет вещественной квадратичной формой от вещественных параметров и потому непрерывна. Сфера (3.7) компактна. Значит, максимум достигается. ⊠

Л Е М М А 3.4. Пусть носитель $\mathcal{C}$ оператора $\mathcal{O} \in \Xi$ принадлежит сектору $\mathcal{N}$ логики $\mathfrak{L}$, и пусть координатизующая система $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m ; \mathcal{F})$ сектора $\mathcal{N}$ такова, что

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{i=k}^{m} \mathcal{E}_i \quad , \quad \mathcal{O}\{\mathcal{E}_k\} = \max_{\mathcal{G}} \mathcal{O}\{\mathcal{G}\} ,$$

где максимум берется по связке всех минимальных $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{N}$. Тогда

$$\mathcal{O} = E_k \mathcal{O} E_k \oplus H_k \mathcal{O} H_k \quad , \quad \mathcal{H}_k = \bigoplus_{i=k+1}^{m} \mathcal{E}_i \ . \tag{3.8}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, для блочной записи $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}^{ij} = 0 = \mathfrak{A}^{ji}, \qquad \forall i < k, \forall j. \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{A}^{kj} = 0 = \mathfrak{A}^{jk}, \qquad \forall j \neq k. \tag{3.10}$$

<u>Доказательство.</u> По определению носителя $\mathfrak{A} = C\mathfrak{A}C$, что приводит к (3.9).

Рассмотрим теперь наряду с $\mathcal{E}_k$ близкие минимальные подпространства $\mathcal{G}^{\varepsilon} = \mathcal{G}(k, i, \varepsilon, Y)$ с ненормированными координатами

$$X^{(k)} = 1; \quad X^{(i)} = \varepsilon Y, \ |Y| = 1; \quad X^{(j)} = 0, \ \forall j \neq k, i.$$

С учетом нормировки по формуле (3.6)

$$(1+\varepsilon^2)\mathfrak{A}\{\mathcal{G}^{\varepsilon}\} = \mathfrak{A}\{\mathcal{G}\} + \varepsilon \operatorname{tr}[\mathfrak{A}^{ki}Y + Y^*\mathfrak{A}^{ik}] + \varepsilon^2 \operatorname{tr} Y^*\mathfrak{A}Y,$$

$$\mathfrak{A}\{\mathcal{G}^{\varepsilon}\} = \mathfrak{A}\{\mathcal{G}\} + \varepsilon \operatorname{tr}[\mathfrak{A}^{ki}Y + Y^*\mathfrak{A}^{ik}] + O(\varepsilon^2).$$

Так как при $\varepsilon = 0$ — максимум, то линейный член обращается в нуль тождественно. Следовательно,

$$\operatorname{tr}[\mathfrak{A}^{ki}Z + Z^*\mathfrak{A}^{ik}] = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}, \quad \forall i \neq k, \tag{3.11}$$

где Z интерпретировано как подобие $\mathcal{E}_i$ на себя.

Возьмем произвольное минимальное $\mathfrak{B} \subset \mathcal{N}$. Пусть его нормированные координаты $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$. Подставляя их в (3.6) и учитывая (3.9) и (3.11), находим

$$\mathfrak{A}\{\mathfrak{B}\} = \operatorname{tr} X^{(k)*}\mathfrak{A}^{kk}X^{(k)} + \sum_{\ell,j=k+1}^{m} \operatorname{tr} X^{(\ell)*}\mathfrak{A}^{\ell j}X^{(j)} +$$

$$+ \sum_{\ell} \operatorname{tr}[X^{(k)}X^{(\ell)*}\mathfrak{A}^{\ell k} + X^{(\ell)}X^{(k)*}\mathfrak{A}^{k\ell}] =$$

$$= (E_k\mathfrak{A}E_k)\{\mathfrak{B}\} + (H_k\mathfrak{A}H_k)\{\mathfrak{B}\}.$$

В выкладке мы для упрощения опустили "согласующие" изометрии W и воспользовались законностью циклической перестановки сомножителей под знаком следа.

Операторы $E_k \mathcal{O} E_k$ и $H_k \mathcal{O} H_k$ принадлежат Ξ, так как $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{H}_k$ — носители. Составим Ξ -оператор $\mathcal{M} = \mathcal{O} - E_k \mathcal{O} E_k - H_k \mathcal{O} H_k$. Величина $\mathcal{M}\{\mathcal{G}\} = 0$ для всех $\mathcal{L}$ -минимальных $\mathcal{G}$. Значит, $\mathcal{M} = 0$ по лемме 3.1. Это доказывает разложение (3.8). Умножая его на E_j и E_k, чтобы получить $\mathcal{O}^{kj}$ и $\mathcal{O}^{jk}$, приходим к (3.10), ибо $E_j E_k = 0 = E_k E_j$, $E_k H_k = 0 = H_k E_k$. ⊠

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть оператор $\mathcal{O}$ принадлежит расщепу Ξ с логикой $\mathcal{L}$ носителей. Тогда найдется (вообще говоря, неединственное) разложение пространства $\mathcal{H}$ в ортогональную сумму $\mathcal{L}$ -минимальных $\mathcal{F}_{jk}$,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{N}_j = \bigoplus_{j=1}^{s} \bigoplus_{k=1}^{m(j)} \mathcal{F}_{jk}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{N}_j$ — секторы логики, такое что

$$\mathcal{O} = \sum_{j=1}^{s} r_j \sum_{k=1}^{m(j)} \varkappa_{jk} \mathcal{P}_k^{(j)} = \sum_{j,k} \left(F_{jk} \mathcal{O} F_{jk} \right) \tag{3.13}$$

где $\mathcal{P}_k^{(j)}$ — (единственный) Ξ-оператор вероятностей на $\mathcal{F}_{jk}$, $\mathcal{P}_1^{(j)}, \ldots, \mathcal{P}_{m(j)}^{(j)}$ когерентны при каждом j, $\sum_k \varkappa_{jk} = 1, \forall j$. Если $\mathcal{O}$ - оператор вероятностей, то и $\sum_j r_j = 1$.

Доказательство. Как вытекает из леммы 3.2, достаточно доказать теорему для операторов, с носителем, лежащим целиком в одном факторном пространстве $\mathcal{N}$. Предположим сперва, что $\mathcal{O} > 0$. Пусть мы уже построили разложение

$$\mathcal{O} = E_1 \mathcal{O} E_1 + \ldots + E_k \mathcal{O} E_k + H_k \mathcal{O} H_k, \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{N} \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i \right). \tag{3.14}$$

Рассмотрим оператор $H_k \mathcal{O} H_k$. По лемме 3.1 мера $(H_k \mathcal{O} H_k)\{\mathcal{G}\}$ достигает максимума на некотором минимальном $\mathcal{E}_{k+1}$. Его однородные координаты относительно системы $\mathcal{N} = \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_k \oplus \mathcal{E}'_{k+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}'_m$ должны начаться k нулями, поскольку для проекции $H_k(\mathcal{B})$ минимального $\mathcal{B}$ на $\mathcal{H}_k$ имеем

$$\left(H_k \mathcal{O} H_k\right)\left\{H_k(\mathfrak{B})\right\} = \frac{|z^{(1)}|^2 + \ldots + |z^{(m)}|^2}{|z^{(k)}|^2 + \ldots + |z^{(m)}|^2}\left(H_k \mathcal{O} H_k\right)\{\mathfrak{B}\}. \quad (3.15)$$

Поэтому, можно построить новое разложение $\mathcal{N} = \mathcal{E}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}_k \oplus \oplus \mathcal{E}_{k+1} \oplus \mathcal{E}''_{k+2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{E}''_m$ для которого в (3.14) вместо $H_k \mathcal{O} H_k$ по лемме 3.4 будет $E_{k+1} \mathcal{O} E_{k+1} \oplus H_{k+1} \mathcal{O} H_{k+1}$.

Так как на каждом минимальном $\mathcal{E}_k$ существует только один Ξ -оператор вероятностей $\mathcal{P}_k$, то $E_k \mathcal{O} E_k = \mu_k \mathcal{P}_k = \tau \varkappa_k \mathcal{P}_k$, где $\tau = \sum_k \mu_k$. Все $\mathcal{P}'_k$ когерентны. ⊠

В нашем докладе [3], когда мы сжимали текст до отведенного нам объема, несколько предложений слились в одну теорему 10.2 с бессмысленной формулировкой. Правильная формулировка указанного предложения дается только что доказанной теоремой 3.5. Следует отметить, что последующие выводы [3] основаны на верной формуле (10.1), совпадающей с формулой (3.13) настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть носитель Ξ -оператора $\mathcal{O}$ лежит в секторе $\mathcal{N}$ логики $\mathfrak{L}$ носителей. Если в секторе $\mathcal{N}$ задана система $(\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_k \ ; \mathcal{F})$, координатизующая связку всех минимальных подпространств сектора, то ограничение оператора $\mathcal{O}$ на $\mathcal{N}$ имеет следующий блочный вид

$$\mathcal{O}^{k\ell} = W^o_k \ A^{k\ell} \mathcal{P} \, W^\ell_o \quad , \ \forall k, \ell, \tag{3.16}$$

где коэффициенты $A^{k\ell}$, коммутирующие с $\mathcal{P}$, реализованы как подобия атома $\mathcal{E}_o$ на себя, $\mathcal{P}$ — единственный Ξ-оператор вероятностей на $\mathcal{E}_o$. Матрица $A^{k\ell}$ — эрмитова:

$$A^{k\ell} = a^{k\ell}_o \cdot \mathbb{1} + \sum_{\alpha=1}^{p} a^{k\ell}_\alpha X_\alpha = A^{\ell k *} = a^{\ell k}_o \cdot \mathbb{1} - \sum_{\alpha=1}^{p} a^{\ell k}_\alpha X_\alpha , \tag{3.17}$$

где X_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant p$ – мнимые единицы (1.21) алгебры (при $m \geqslant 3$ – тела) подобий.

Если $\mathcal{O}$ – оператор вероятностей, то

$$\mathrm{Tr}\left(A^{k\ell}\right)_{k,\ell=1}^{m} := A^{11} + \ldots + A^{mm} = \mathbb{1}\,. \tag{3.18}$$

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся доказанной формулой (3.13), где возьмем $s=1$. Для каждого слагаемого мы имеем выражение (2.15) теоремы 2.2 с эрмитовой матрицей $\left(A^{jk}\right)=\left(X^{(j)}X^{(k)*}\right)$, где все $X^{(k)}$ коммутируют с $\wp$. Сумма эрмитовых матриц – эрмитова. Формула (3.18) вытекает из последних утверждений теоремы 3.5. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть в каждом секторе $\mathcal{N}_j$ логики $\mathbb{L} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{L}\cap\mathcal{N}_j$ задана своя координатизующая система $\left(\mathcal{N}_j = \bigoplus_{k=1}^{m(j)} \mathcal{E}_{jk}\,;\,\mathcal{F}\right)$, и указан оператор вероятностей $\wp^{(j)}$ с носителем $\mathcal{E}_{j0}$, инвариантный относительно всех изометрий атома $\mathcal{E}_{j0}$ на себя, индуцированных логикой $\mathbb{L}\cap\mathcal{N}_j$.

Пусть Ξ — класс всех линейных операторов, представимых в форме

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{Y}_j \quad ; \qquad \mathcal{Y}_j = N_j\,\mathcal{Y}\,N_j\,, \quad \forall j\,; \tag{3.19}$$

где ограничение $\mathcal{Y}_j$ на $\mathcal{N}_j$ относительно разложения $\mathcal{N}_j = \bigoplus_{k=1}^{m(j)} \mathcal{E}_{jk}$ имеет блоки

$$\mathcal{Y}_j^{\,k\ell} = W_k^{\circ}\, A^{k\ell}\, \wp^{(j)}\, W_{\circ}^{\ell}\,, \tag{3.20}$$

с эрмитовой в смысле (3.17) матрицей $\left(A_j^{k\ell}\right)_{k,\ell=1}^{m(j)}$, элементами которой служат координатизованные по (1.21) индуцированные подобия $\mathcal{E}_{j0}$.

Тогда класс Ξ образует расщеп, для которого $\mathbb{L}$ будет логикой носителей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теореме 5.7 из [13], аналогичное строение имеет класс ортопроекторов B на $\mathbb{L}$-подпространства $\mathcal{B}$:

$$B = \bigoplus_{j=1}^{s} B_j\,, \qquad B_j = N_j\,B\,N_j\,, \tag{3.19$^{\mathrm{I}}$}$$

$$B_j^{kl} = W_k^{o}\ A_j^{kl}\ W_o^{l}\ , \qquad \forall\, k,\, l\ , \tag{3.20$^{\mathrm{I}}$}$$

где эрмитовы в смысле (3.17) матрицы $\left(A_j^{kl}\right)_{k,l=1}^{m(j)}$ идемпотентны.*

Доказательство. Класс Ξ линеен, над $\mathbb{R}$, так как определение (3.17) эрмитовости $\mathbb{R}$-линейно. Далее, $\mathcal{O}\!\!\!/^{(+)} = \oplus\, \mathcal{O}\!\!\!/_j^{(+)}$, поэтому достаточно проверить расщепимость в классе для ограничений $\mathcal{O}\!\!\!/_j$ на $\mathcal{N}_j$.

Для $\mathcal{O}\!\!\!/_j$-мер атомов $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ справедливо представление

$$\mathcal{O}\!\!\!/_j\{\mathcal{G}\} = tr\ G\mathcal{O}\!\!\!/_j = \sum_{k,l=1}^{m(j)} tr\left(X^{(l)*} A^{lk} X^{(k)} \wp\right) \tag{3.21}$$

при евклидовой нормировке однородных координат

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = \sum_k X^{(k)*} X^{(k)} = \sum_k |X^{(k)}|^2 = 1$$

где при поблочном умножении (2.13) или (1.22) на (3.20) мы использовали коммутативность $X^{(k)}$ и $\wp$, а также законность циклической перестановки сомножителей под знаком следа.

Рассмотрим ассоциированную с (3.21) операторную квадратичную форму

$$Q(\vec{X},\vec{X}) = \sum_{k,l} X^{(l)*} A^{lk} X^{(k)}. \tag{3.22}$$

Поскольку она эрмитова в смысле (3.17), то принимает только "вещественные" значения, т.е. является вещественным скалярным оператором

$$Q(\vec{X},\vec{X}) = q(\vec{X},\vec{X}) \cdot 1\!\!1\ . \tag{3.22}$$

Поэтому, для нее справедлива соответствующая максиминная теория. Максимум $q(\vec{X},\vec{X})$ на единичной сфере достижим, ср. доказательство леммы 3.3, а определяющий линейную часть приращения $q(\vec{X}+\varepsilon\vec{Y},\vec{X}+\varepsilon\vec{Y}) - q(\vec{X},\vec{X})$ оператор $Q(\vec{X},\vec{Y}) + Q(\vec{Y},\vec{X})$ обращается в нуль, когда $\vec{X}$ - вектор максимума при всех $\vec{Y}$, таких, что $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$, ср. формулу (3.11) в доказательстве леммы 3.4.

Поэтому, в некотором ортонормированном в смысле $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle$-произведения базисе $\vec{Z}_1, \dots, \vec{Z}_m$ форма (3.22) приводится к диагональному виду, так что в исходном базисе

$$A^{\ell k} = \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i Z_i^{(\ell)} Z_i^{(k)*}, \qquad \forall \ell, k. \tag{3.24}$$

Соответственно, возникает разложение

$$\mathcal{V}_j = \sum_i \varkappa_i \mathcal{V}_{ji} \quad ; \qquad \mathcal{V}_{ji} = W_k^1 Z_i^{(k)} \rho^{(j)} Z_i^{(\ell)*} W_1^{\ell}. \tag{3.25}$$

По теореме 2.2 или теореме 2.1 оператор $\mathcal{V}_{ji}$ будет оператором вероятностей, когерентным $\rho^{(j)}$ и сосредоточенном на минимальном подпространстве $\mathcal{G}_{ji}$ с координатами $Z_i^{(1)} : \dots : Z_i^{(m)}$. Так как $\mathcal{E}_{j0}$ — носитель $\rho^{(j)}$, то по когерентности оператор $\mathcal{V}_{ji}$ строго положителен на $\mathcal{G}_{ji}$, т.е. $\mathcal{G}_{ji}$ — его носитель. Из ортогональности базисных векторов $\langle \vec{Z}_\alpha, \vec{Z}_\beta \rangle = 0$ при $\alpha \neq \beta$ следует по (2.13)

$$\left(G_\alpha G_\beta\right)^{(k\ell)} = \sum_\nu W_k^1 Z_\alpha^{(k)} \left(Z_\alpha^{(\nu)*} Z_\beta^{(\nu)}\right) Z_\beta^{(\ell)} W_1^{\ell} = 0,$$

т.е. $G_\alpha G_\beta = 0 = G_\beta G_\alpha$, откуда $\mathcal{G}_{j\alpha} \perp \mathcal{G}_{j\beta}$ при $\alpha \neq \beta$.

Из строгой положительности $\mathcal{V}_{ji}$ на $\mathcal{G}_{ji}$ и ортогональности $\mathcal{G}_{ji}$ при разных i, вытекает, что представление

$$\mathcal{V}_j = \sum_{i:\varkappa_i>0} \varkappa_i \mathcal{V}_{ji} - \sum_{i:\varkappa_i<0} |\varkappa_i| \mathcal{V}_{ji} \tag{3.26}$$

будет разложением $\mathcal{V}_j$ на $\mathcal{V}_j^{(+)}$ и $\mathcal{V}_j^{(-)}$. Согласно (3.24) $\mathcal{V}_{ji} \in \Xi$. По доказанной ранее линейности тогда $\mathcal{V}_j^{(+)} \in \Xi$, $\mathcal{V}_j^{(-)} \in \Xi$, также, т.е. Ξ — расщеп. Наконец, носитель каждого $\mathcal{V}_j \geq 0$ разлагается в ортогональную сумму $\mathfrak{L}_m$-минимальных подпространств, т.е. принадлежит логике $\mathfrak{L}_m$. Обратно, всякое минимальное, а стало быть, и всякое $\mathfrak{L}_m$-пространство является носителем некоторого Ξ-оператора. Значит, $\mathfrak{L}_m$ — логика носителей. ☒

ТЕОРЕМА 3.8. Для того, чтобы задать расщеп, для которого логика $\mathfrak{L}$ была бы логикой носителей, необходимо и достаточно выбрать в связке минимальных подпространств каждого сектора $\mathcal{N}_j$ логики $\mathfrak{L}$ по представлению $\mathcal{G}^{(j)}$ и указать оператор вероятностей $\wp^{(j)}$ с носителем $\mathcal{G}^{(j)}$, инвариантный относительно всех индуцированных связкой изометрий $\mathcal{G}^{(j)}$ на себя. Конструкция всех операторов расщепа описывается тогда теоремой 3.7.

Доказательство следует из теорем 3.7, 3.6, 2.1 и 2.2. ⊠

§ 4. Индуцированные симметрии и обёртывающая $\mathbb{C}$ -логика.

Когда сектор $\mathcal{N}$ логики носителей имеет вещественный тип, блочное представление (3.16) оператора $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{N}$ имеет следующий простой смысл. Выберем координатное разложение $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_k$ и определяющее знак координаты подпространство $\mathcal{F}$, и выберем в $\mathcal{E}_1$ ортонормированный базис $|e_1\rangle, \ldots, |e_r\rangle$. Тогда в базисе $|e_{k\alpha}\rangle$, где $|e_{k\alpha}\rangle = W_k^1 |e_\alpha\rangle$, W_k^1 — каноническая изометрия $\mathcal{E}_1$ на $\mathcal{E}_k$ через $\mathcal{F}$, матрица оператора $\mathcal{Q}$ разлагается в кронекеровское произведение

$$\left(q^{k\alpha}_{\ell\beta} \right) = \left(a^k_\ell \right) \times \left(p^\alpha_\beta \right) = \left(a^k_\ell \cdot p^\alpha_\beta \right) , \qquad (4.1)$$

где для удобства обозначено $a^k_\ell \cdot 1\!\!1_{\mathcal{E}_1} = A^{k\ell}$, p^α_β - матрица оператора $\wp$ на $\mathcal{E}_1$.

Формула (4.1) заведомо не имеет место в кватернионном и гиперкомплексном случаях, а также в комплексном случае, если мнимая единица поля подобий отлична от скалярного умножения на $\sqrt{-1}$. Между тем, и в этих случаях формула (3.16) имеет сходный смысл, хотя само понятие кронекеровского произведения матриц над некоммутативными числами некорректно. Поэтому, мы хотим получить, во-первых, представление в терминах (настоящего) кронекеровского произведения, и, во-вторых, исключить требование инвариантности оператора $\wp$ относительно $\mathcal{L}$ -симметрий носителя (отсутствующее в вещественном случае). Это, в частности, упростило бы описание расщепов с заданной логикой носителей.

Для достижения этих целей надо, как это было отмечено в конце нашего доклада [3], перейти от исходной йордановой логики $\mathcal{L}$ к обёртывающей логике фон Неймана $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}$, т.е. минимальной $\mathbb{C}$ -логике, см. [17], содержащей $\mathcal{L}$, — этот переход точно соответствует переходу от йордановой алгебры $J_{\mathcal{L}}$ эрмитовых операторов с носителями из $\mathcal{L}$ к обертывающей C^*-алгебре линейных операторов.

Логики фон Неймана определяются той же системой аксион, что и йордановы логики, см. § 1, только в аксиоме IУ операция когерентного $\mathbb{R}$ -линейного комбинирования (1.15) заменяется на операцию $\mathbb{C}$ -линейного комбинирования изоклинных подпространств:

$$\mathcal{K}_{a:b}(\mathcal{F},\mathcal{G}) := \{ |u\rangle = a|x\rangle + b I |x\rangle ,\ \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \}, \quad (4.2)$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, $a : b \neq 0 : 0$, I — каноническая изометрия (1.14) подпространства $\mathcal{F}$ на изоклинное с ним $\mathcal{G}$.

Таким образом, если два изоклинные подпространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ путем $\mathbb{R}$ -комбинирования порождают в пространстве $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ $\mathbb{R}$- **пучок** изоклинных друг другу подпространств (1.18), проходящий через $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{B} = (\mathcal{F}+\mathcal{G}) \ominus \mathcal{F}$ и $\mathcal{G}' = (\mathcal{F}+\mathcal{G}) \ominus \mathcal{G}$ то путем $\mathbb{C}$ -комбинирования они порождают целую связку, которую мы для простоты будем называть $\mathbb{C}$ -пучком:

$$\mathcal{G}_{\psi,\theta} := \{ |y\rangle = \cos\psi \cdot |x\rangle + e^{i\theta} \sin\psi \cdot V|x\rangle ,\ \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \}, \quad (4.3)$$

где $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, $0 \leq \theta < 2\pi$, а изометрия V есть $V_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}\ I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}$, в соответствии с (1.17). $\mathbb{C}$ -пучок порождает семейство изометрий $\mathcal{F}$ на $\mathcal{B}$, отличающихся фазой: $e^{i\theta}V$. Напомним, что для $\mathbb{R}$ -пучка порожденными изометриями будут только $+V$ и $-V$.

Строение $\mathbb{C}$ -логики описывается аналогично строению $\mathbb{R}$ -логики; поскольку они составляют частный случай последних. Однако, они устроены проще, потому что в $\mathbb{C}$ -логике индуцированные изометрии минимального пространства на себя исчерпываются скалярными операторами $c \cdot \mathbb{1}$, где $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Поэтому, все $\mathbb{R}$ -пучки, проходящие в предминимальном $\mathcal{F} \oplus \mathcal{B}$ через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ входят в $\mathbb{C}$ -пучок (4.3), отвечая каждый своему значению параметра θ , $|e^{i\theta}| = 1$; см.теорему 4.10 в [17] .

Связка минимальных подпространств сектора $\mathbb{C}$ -логики изоморфна связке прямых некоторого конечномерного гильбертова пространства, причем координатизующие подобия - скалярные операторы вида $c \cdot \mathbb{1}$, $c \in \mathbb{C}$. Поэтому для сектора $\mathcal{N}$ $\mathbb{C}$ -логики $\mathcal{M}$ задание ортогонального разложения на атомы $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_i$ и еще одного атома $\mathcal{F}$, контактирующего со всеми $\mathcal{E}_i$, полностью задает подлогику $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Для $\mathbb{R}$ -логик (кроме логик вещественного типа) сверх координатизующей системы $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m ; \mathcal{F})$ надо указать ещё йорданову алгебру $\mathbb{X}$ индуцированных логикой подобий подпространства $\mathcal{F}$ на себя.

Перейдем к конструированию обертывающей $\mathbb{C}$ -логики.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{E}$ — атом некоторой $\mathbb{R}$ -логики $\mathcal{L}$, лежащий в её секторе $\mathcal{N}$, и пусть $\mathcal{P}$ — оператор вероятностей с носителем $\mathcal{E}$, коммутирующий с базисными изометриями $X_0 = \mathbb{1}, X_1, \ldots, X_p$ см.(1.21),(2.3),(2.14). Пусть, далее, $\mathcal{M}$ - $\mathbb{C}$ -логика подпространств атома $\mathcal{E}$, порожденная собственными подпространствами унитарных операторов $X_1, \ldots, X_p$, а $\mathcal{B}$ — C^*-алгебра линейных операторов, порожденная всеми $\mathcal{L}$ -индуцированными подобиями $\mathcal{E}$.

Тогда а) все самосопряженные идемпотенты из $\mathcal{B}$ суть ортопроекторы на $\mathcal{M}$ -пространства и обратно; б) все ортопроекторы на $\mathfrak{M}$ -пространства коммутируют с $\wp$; в) ограничения $\wp$ на два контактирующих $\mathfrak{M}$ -атомов $\ni_1$ и $\ni_2$ когерентны по (2.4)

$$\rho^2(\ni_1, \ni_2)\ \ni_2 \wp \ni_2 = \ni_2 \ni_1 \wp \ni_1 \ni_2 \, . \tag{4.5}$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathcal{A}$ — сектор $\mathbb{C}$ -логики $\mathfrak{M}$,$\left(\mathcal{A} = \bigoplus_{k=1}^{n} \ni_k, \ni_0\right)$ - его координатизующая система. Тогда сужение $\wp$ на $\mathcal{A}$ имеет блочный вид

$$\hat{\wp}^{kk} = M_k^o \check{\wp} M_o^k , \ \forall k ; \qquad \hat{\wp}^{k\ell} = 0 , \ \forall k \neq \ell , \tag{4.6}$$

где $\check{\wp}$ — сужение $\wp$ на $\ni_0$, M_k^o - канонические изометрии (1.14) $\ni_0$ на $\ni_k$.

<u>Доказательство.</u> По теореме фон Неймана алгебра $\mathcal{B}$ есть бикоммутант индуцированных подобий, а следовательно, бикоммутант мнимых единиц $X_1, \ldots, X_p$. Каждый её самосопряженный идемпотент есть ортопроектор на унитарный ковариант собственных подпространств операторов $X_1, \ldots, X_p$, и обратно. Но система всех унитарных ковариантов по теореме 5.9 из нашей работы [17] совпадает с порожденной $\mathbb{C}$ -логикой, что дает утверждение а)теоремы. Так как по условию $\wp$ принадлежит коммутанту "мнимых единиц", то ортопроекторы на $\mathfrak{M}$ -пространства коммутируют с $\wp$, как элементы бикоммутанта. Ввиду установленной коммутативности

$$\ni_2 \ni_1 \wp \ni_1 \ni_2 = \wp \ni_2 \ni_1^2 \ni_2 = \wp \cdot \rho^2(\ni_1, \ni_2) \ni_2 = \rho^2 \cdot \ni_2 \wp \ni_2 ,$$

так как атомы $\ni_1$ и $\ni_2$ — изоклинны.

Сектору $\mathcal{A}$ отвечает факторная C^*-алгебра $A \mathcal{B} A$,изоморфная полной матричной алгебре $\mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^n$. По принципу взаимности Веддерберна $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}''$, где операторы из $A \mathcal{B} A$ записываются в виде $Y \otimes 1\!\!1''$, а из коммутанта $(A \mathcal{B} A)' \ni \hat{\wp}$ как $1\!\!1' \otimes \check{\wp}$. ⊠

ТЕОРЕМА 4.2. В условиях теоремы 4.1 унитарные операторы $X_1, \ldots, X_p$, см. (1.21) имеют собственными значениями только $\pm\sqrt{-1}$ и задают точное линейное представление йордановой алгебры $\mathbb{H}_p$ гиперкомплексных чисел в алгебре $\mathcal{B}$. Соответствующая $\mathcal{B}$ $\mathbb{C}$-логика $\mathcal{M}$ содержится в любой $\mathbb{C}$-логике, содержащей $\mathbb{R}$-логику $\mathcal{L}_n \cap \mathcal{N}$.

Доказательство. Унитарный оператор U, где $U^* = -U$, $U^2 = -\mathbb{1}$ может иметь собственными значениями только $\pm\sqrt{-1}$. Поэтому ни одно подобие $X \in \mathbb{X}$, кроме нулевого, не обращается в нулевой оператор. Рассмотрим теперь $\mathbb{R}$-пучок, проходящий через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} \perp \mathcal{E}$, и отвечающий изометрии $V = \mathbb{1} \cdot W_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ и второй $\mathbb{R}$-пучок, отвечающий изометрии $U \cdot W_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = UV$. В объемлющей $\mathbb{C}$-логике $\mathcal{N}$ через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ проходит $\mathbb{C}$-пучок, отвечающий V, а стало быть, и $\mathbb{R}$-пучок подпространств, определяемый значением $\theta = \pi/2$ в (4.3), т.е. $\mathbb{R}$-пучок, отвечающий изометрии iV. Два $\mathcal{N}$-пространства

$$\mathcal{G}' := \{ |y\rangle = \cos\psi \cdot |x\rangle \pm i \sin\psi \cdot V|x\rangle , \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \},$$

$$\mathcal{G}'' := \{ |y\rangle = \cos\psi \cdot |x\rangle + \sin\psi \cdot UV|x\rangle , \quad \forall |x\rangle \in \mathcal{F} \},$$

пересекаются по подпространству

$$\mathcal{G} = \{ |y\rangle = \cos\psi \cdot |x\rangle \pm \sin\psi \cdot V|x\rangle , \ \forall |x\rangle : iV|x\rangle = \pm UV|x\rangle , |x\rangle \in \mathcal{F} \},$$

ортопроектирующемуся в собственное подпространство оператора U, отвечающее значению $\pm i$. Значит, все собственные подпространства принадлежат $\mathcal{N}$. $\boxtimes$

Таким образом, описание конструкции обертывающей $\mathbb{C}$-логики приводится к описанию представлений алгебр вещественных, комплексных и гиперкомплексных числе и кватернионов. Соответствующая теория хорошо известна, см. [5], [6], [7], [18]. Мы сформулируем нужные нам факты в виде леммы.

Л Е М М А 4.3. Представление системы $\mathbb{H}_p$ продолжается в представление обертывающей её алгебры клиффордовых чисел, не не обязательно точное. При этом а) У йордановой алгебры $\mathbb{H}_{2\nu}$ существует только одно точное неприводимое представление. В соответствующем базисе и мнимых единиц оно задается формулами

$$e_{2\alpha-1} \to i\, 1' \times \ldots \times 1' \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times 1 \times \ldots \times 1 = Ъ_{\nu,\,2\alpha-1}\,, \tag{4.7}$$

$$e_{2\alpha} \to i\, 1' \times \ldots \times 1' \times \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \times 1 \times \ldots \times 1 = Ъ_{\nu,\,2\alpha}\,, \tag{4.8}$$

где число множителей равно ν, $i = \sqrt{-1}$, нетривиальные множители стоят на α -ом месте, и

$$1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а образ вещественной единицы e_0 — единичная матрица $1 \times \ldots \times 1$.

б) У йордановой алгебры $\mathbb{H}_{2\nu+1}$ существует только два точных неприводимых представления. Они задаются при помощи формул (4.7) и (4.8), различаясь только знаком

$$e_\beta \to \pm Ъ_{\nu,\beta}\,,\ 0<\beta \leq 2\nu\,; \quad e_{2\nu+1} \to \pm i\, 1' \times \ldots \times 1' = \pm Ъ_{\nu,2\nu+1}. \tag{4.9}$$

в) Поле комплексных чисел имеет два представления в согласии с б).

г) Тело кватернионов имеет одно представление, где в (4.9) надо взять „–".

д) Все остальные неприводимые представления одномерны и вещественны.

е) Образ йордановой алгебры $\mathbb{H}_p$ при её точном неприводимом представлении порождает полную матричную алгебру $\mathbb{C}^{2^\nu *} \otimes \mathbb{C}^{2^\nu}$.

<u>Доказательство</u> для кватернионного случая содержится в [6], §127, пример 2. В общем случае можно аналогично проанализироват возникающие представления конечной группы единиц $\pm \prod_{\alpha \in A} e_\alpha$ алгебры Клиффорда. Утверждение е) следует по теореме Бернсайда, см.напр. [7], § 21. ⊠

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_s$ — секторы $\mathbb{R}$ -логики L, и пусть $\mathcal{N}_j$ — обертывающие $\mathbb{C}$ -логики подлогик $L \cap \mathcal{N}_j$.

а $\mathcal{N}$ — обертывающая логика для $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\mathcal{N} = \bigoplus_j \mathcal{N}_j \ ; \qquad \mathcal{N}_j = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_j \ , \ \forall j . \qquad (4.10)$$

Доказательство. Так как $\oplus \mathcal{N}_j \supseteq \oplus \mathfrak{L}_j = \mathfrak{L}$, то $\oplus \mathcal{N}_j \supseteq \mathcal{N}$. С другой стороны, $\mathcal{N}_j \subseteq \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_j$, ибо $\mathfrak{L}_j = \mathfrak{L} \cap \mathcal{N}_j \subseteq \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_j$, так что $\oplus \mathcal{N}_j = \mathcal{N}$. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $\mathcal{E}$ – атом сектора $\mathcal{N}$ $\mathbb{R}$- логики $\mathfrak{L}$ и пусть $\mathcal{M}$- $\mathbb{C}$-логика подпространств атома $\mathcal{E}$, описанная в теореме 4.1.

В логике $\mathcal{M}$ или А) единственный сектор $\mathcal{E}$, или Б) – два сектора, $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}''$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда нечетно число p базисных единиц (1.21) в йордановой алгебре $\mathbb{X}$ $\mathfrak{L}$ -индуцированных подобий $\mathcal{E}$ (т.е. $\dim \mathbb{X} = 2\nu+2$), а их произведение $X_1 \ldots X_p \neq c\mathbb{1}$. В частности, при $\mathbb{X} \simeq \mathbb{R}$ или $\mathbb{X} \simeq \mathbb{Q}$ распадения нет; при $\mathbb{X} \simeq \mathbb{C}$ распадения нет лишь когда подлогика $\mathfrak{L} \cap \mathcal{N}$ оказывается $\mathbb{C}$-логикой.

Пространство $\mathcal{E}$ в случае А можно так разбить на $\mathcal{M}$-атомы

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{\ell=1}^{2^\nu} \mathcal{D}_\ell \ , \qquad \nu = \text{Ц}\left[\tfrac{p}{2}\right] \ , \qquad (4.11)$$

что базисные операторы $X_\beta \in \mathbb{X}$ будут иметь относительно этого разложения скалярные блоки

$$X_\beta{}^{k\ell} = \tau_{\nu,\beta}{}^{k\ell}\, M_\ell^k \ , \qquad \forall k, \ell \ , \ \forall \beta \ , \qquad (4.12)$$

с теми же изометриями, что в (4.6).

В случае Б существует пара согласованных таких же разложений $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$, для которых

$$X_0{}^{k\ell} = M'^k_\ell \oplus M''^k_\ell$$

$$X_\beta{}^{k\ell} = \tau_{\nu,\beta}{}^{k\ell}\left(M'^k_\ell \oplus (-1) M''^k_\ell\right) , \qquad \forall \beta \neq 0 ,$$

где M'^k_ℓ, M''^k_ℓ — изометрии $\mathcal{D}'_k$ на $\mathcal{D}'_\ell$ и $\mathcal{D}''_k$ на $\mathcal{D}''_\ell$.

Доказательство. Как известно, см. [7], § 20, пространство $\mathcal{E}$ разбивается на столько ортогональных подпространств $\mathcal{E}^{(s)}$, сколько типов π_s неприводимых представлений участвует в индуцированном логикой $\mathbb{L}\cap\mathcal{N}$ представлении алгебры $\mathbb{H}_p$. Матрицы представления блочно-диагональны, причем при соответствующем выборе базиса в $\mathcal{E}^{(s)}$ диагональный блок матрицы унитарного оператора X_i имеет вид

$$X_i^{ss} = \pi_s(X_i)\otimes \mathbb{1}^{(s)}$$

Отсюда сразу видно, что одномерные типы отпадают. Они вещественны, а по теореме 4.2 у нас все собственные числа мнимы. При $p=2\nu$ остается единственное представление

$$X_\beta = Ъ_{\nu,\beta}\otimes \mathbb{1}^{(s)}, \qquad \forall\beta . \tag{4.13}$$

При $p=2\nu+1$ появляется $\mathbb{1}^{(s)}=\mathbb{1}^{(s')}\oplus\mathbb{1}^{(s'')}$, $X_0 = Ъ_{\nu,0}\otimes\mathbb{1}^{(s)}$,

$$X_\beta = \left(Ъ_{\nu,\beta}\otimes\mathbb{1}^{(s')}\right)\oplus\left(-Ъ_{\nu,\beta}\otimes\mathbb{1}^{(s'')}\right), \quad \forall\beta\neq 0 . \tag{4.14}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\prod_{\beta=1}^{2\nu+1} Ъ_{\nu,\beta} = i^{\nu+1}\, Ъ_{\nu,0} .$$

Поэтому, когда $\prod_\beta X_\beta = \pm\, \nu^{\nu+1}\, \mathbb{1}_{\mathcal{E}}$, то присутствует только первый, соответственно второй тип представления. Так у кватернионов $ijk=-1$, что влечет $X_1X_2X_3 = -\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$. Для комплексных чисел однотипность будет только при $X_1 = \pm i\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$; $X = c(X)\cdot\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$, $c(X)\in\mathbb{C}$, $\forall X\in\mathbb{X}$. Это означает, что вместе с каждым $\mathbb{R}$-пучком (1.18), проходящим через $\mathcal{E}\subset\mathcal{N}$, логике $\mathbb{L}$ принадлежит объемлющий его $\mathbb{C}$-пучок (4.3). Но тогда $\mathbb{R}$-логика $\mathbb{L}\cap\mathcal{N}$ есть $\mathbb{C}$-логика.

Из описания (4.13) вытекает, что в случае нераспадения орты базиса $\mathcal{E}$ можно сгруппировать в 2^{ν} одинаковых групп и провести через каждую группу $\mathfrak{M}$ -минимальное подпространство $\mathcal{Э}$, $\mathcal{E} = \bigoplus_{\ell=1}^{2^{\nu}} \mathcal{Э}_{\ell}$. Относительно этого разложения базисные операторы $X_{\beta} \in \mathbb{X}$ будут иметь блоки (4.12):

$$X_{\beta}^{k\ell} = \tau_{\nu,\beta}^{k\ell} \; M_{\ell}^{k} \;,$$

где матрица $T_{\nu,\beta} = (\tau_{\nu,\beta}^{k\ell})$, а M_{ℓ}^{k} - изометрия $\mathcal{Э}_k$ на $\mathcal{Э}_{\ell}$, и все эти изометрии согласованы. По пункту е леммы 4.3 операторы $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_1, \ldots, X_p$ порождают C^*-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ всех линейных операторов на $\mathcal{E}$ с блочным строением $c^{k\ell} M_{\ell}^{k}$. А собственные пространства нормальных операторов $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_1, \ldots, X_p$ порождают $\mathbb{C}$-логику $\mathfrak{M}$. По связи между C^*-алгебрами и $\mathbb{C}$-логиками, $\mathfrak{M}$ отвечает $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ и потому односекторна.

Можно без труда выписать ортопроекторы на атомы $\mathcal{Э}_{\ell}$ в виде

$$\mathcal{Э}_{\ell} = \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} \mp X_1 X_2) \cdot \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} \mp X_3 X_4) \ldots \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} \mp X_{2\nu-1} X_{2\nu}) \,, \tag{4.15}$$

где на α-ом месте взят $+$, если α-ый двоичный знак записи ℓ есть 1.

Случай распадения можно проанализировать аналогично. Атомам отвечают ортопроекторы $\mathcal{Э}'_{\ell}$, $\mathcal{Э}''_{\ell}$:

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{Э}_{\ell}\left[\mathbb{1} \pm (-i)^{\nu+1} X_1 \ldots X_{2\nu+1}\right] = \tfrac{1}{2}\mathcal{Э}_{\ell}\left[\mathbb{1}_{\mathcal{E}} \pm (E' - E'')\right],$$

где знак $+$ отвечает $\mathcal{Э}'_{\ell}$. Операторы $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}, X_1, \ldots, X_{2\nu+1}$ порождают двухсекторную C^*-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{X}) = E'\mathcal{B}E' \oplus E''\mathcal{B}E''$. Это следует из общей **теории**, но легко установить из результата для $p' = 2\nu$. Поэтому, соответствующая $\mathbb{C}$-логика имеет равно два сектора $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$. ⊠

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть $\mathcal{N}$ — сектор $\mathbb{R}$-логики $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{X}$ — йорданова алгебра $\mathfrak{L}$ -индуцированных подобий атома сектора.

В обёртывающей $\mathbb{C}$-логике $\mathcal{N}$ сектор $\mathcal{N}$ или А) остается сектором; или Б) – распадается на пару: $\mathcal{N} = \mathcal{N}' \oplus \mathcal{N}''$. В последнем случае происходит распадение всех $\mathfrak{L}$ -подпространств сектора, в том числе $\mathfrak{L}$ - атомов:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}'' \; ; \quad \mathcal{G}' = \mathcal{G} \cap \mathcal{N}' , \quad \mathcal{G}'' = \mathcal{G} \cap \mathcal{N}'' .$$

Критерий распадения совпадает с указанным в теореме 4.5. Для любого $\mathfrak{L}$ -атома $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$ подлогика $\mathcal{N} \cap \mathcal{G}$ совпадает с $\mathbb{C}$ -логикой $\mathfrak{M}$ теоремы 4.1.

По любой $\mathfrak{L}$ -координатизующей системе $\left(\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i ; \mathcal{F}\right)$ сектора $\mathcal{N}$ и по $\mathfrak{M}$ -системе $\left(\mathcal{F} = \bigoplus_{k=1}^{2^\nu} \mathcal{A}_k , \mathcal{A}_0\right)$ пространства $\mathcal{F} = \mathcal{E}_0$, удовлетворяющей условиям теоремы 4.5, можно в случае А указать разложение $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{k=1}^{2^\nu} \mathcal{D}_{ik}$ для которого $\mathcal{N}$-атом $\mathcal{A}_0$ индуцирует изометрии

$$Ш_{j\ell}^{ik} = \bar{W}_j^0 M_\ell^0 M_0^k W_0^i = \bar{W}_j^0 M_\ell^k \bar{W}_0^i . \tag{4.16}$$

В случае Б существуют аналогичные разложения для подсекторов $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ и подпространств $\mathcal{E}_0'$ и $\mathcal{E}_0''$.

<u>Доказательство.</u> Возьмем в $\mathfrak{L}$ -атоме $\mathcal{F} = \mathcal{E}_0$. $\mathfrak{M}$ -координатизующую систему $\left(\mathcal{E}_0 = \oplus \mathcal{A}_k \; ; \; \mathcal{A}_0\right)$, удовлетворяющую условиям теоремы 4.5. Тогда $\mathcal{A}_0$ своими контактами со всеми $\mathcal{A}_k$ задает по (1.14) и (1.17) исходные согласованные изометрии M_ℓ^k .

Так как ортопроектирование подпространства на изоклинное сохраняет ортогональность, то возникают разложения

$$\mathcal{E}_i = \bigoplus_k \mathcal{D}_{ik} \quad ; \quad \mathcal{D}_{ik} = E_i(\mathcal{A}_k) , \; \forall k . \tag{4.17}$$

По изоклинности $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{F}$, обратно $F(\partial_{ik}) = \mathcal{A}_k$, $\forall k$. Отсюда по теореме о трех перпендикулярах,

$$Я_0(\partial_{ik}) = Я_0(F(\partial_{ik})) = Я_0(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A}_0 , \qquad (4.18)$$

и длина каждого вектора из ∂_{ik} умножается при проектировании на $\rho(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})\, \rho(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_0)$. Таким образом, ∂_{ik} **наклонено** к $\mathcal{A}_0$ под всюду одинаковым углом, т.е. изоклинно $\mathcal{A}_0$. Контакты $\mathcal{A}_0$ со всеми ∂_{ik} порождают их согласованные изометрии, имеющие по (4.18) вид (4.16):

$$Ш_{jl}^{ik} = W_j^0\, M_l^0\, M_0^k\, W_0^i = W_j^0\, M_l^k\, W_0^i .$$

Множество всех линейных операторов на $\mathcal{N}$ с блочным строением

$$Б^{(ik)(jl)} = c^{ikjl}\, Ш_{jl}^{ik} ; \quad c^{ikjl} \in \mathbb{C} \quad \forall i,j,k,l, \qquad (4.19)$$

образует C^*-алгебру. Ей отвечает односекторная $\mathbb{C}$-логика $\mathcal{K}$ подпространств $\mathbb{L}$-сектора $\mathcal{N}$ с координатизующей системой $\left(\mathcal{N} = \bigoplus_{i,k} \partial_{ik} , \mathcal{A}_0\right)$.

Рассмотрим ортопроектор G на $\mathbb{L}$-атом $\mathcal{G} \subset \mathcal{N}$, с нормированными однородными координатами $Z^{(1)} : Z^{(2)} : \ldots : Z^{(m)}$ относительно системы $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m ; \mathcal{F})$. Согласно (2.13) относительно разбиения $\mathcal{N} = \oplus\, \mathcal{E}_i$ он имеет блоками $G^{ij} = W_i^0\, Z^{(i)} Z^{(j)*} W_0^j$. Относительно же более мелкого разбиения $\mathcal{N} = \bigoplus_i \bigoplus_k \partial_{ik}$ согласно (4.12) блоками будут

$$G^{(ik)(jl)} = W_i^0\, M_k^0 \left(\zeta_0^{(i)} z_{v0}^{kl} + \sum_{\alpha=1}^{p} \zeta_\alpha^{(i)} z_{v\alpha}^{kl}\right)\left(\zeta_0^{(j)} z_{v0}^{kl} - \sum_{\beta=1}^{p} \zeta_\beta^{(j)} z_{v\beta}^{kl}\right) M_0^l\, W_0^k ,$$

где $Z^{(i)} = \zeta_0^{(i)} \mathbb{1} + \sum_\alpha \zeta_\alpha^{(i)} X_\alpha$, X_α — мнимые единицы (1.21). Следовательно, G принадлежит нашей блочной C^*-алгебре, а $\mathcal{G} \in \mathcal{K}$.

Так как $\mathbb{C}$-логика $\mathcal{K}$ содержит все атомы $\mathbb{R}$-логики $\mathfrak{L} \cap \mathcal{N}$, то $\mathcal{K} \supseteq \mathfrak{L} \cap \mathcal{N}$, откуда $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, по определению обёртывающей логики. С другой стороны, обёртывающая логика $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ должна содержать все $\mathfrak{L}$-атомы $\mathcal{E}_i$ по определению, а всю логику $\mathcal{M} \ni \mathcal{A}$ - согласно теореме 4.2. Поэтому, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \supseteq \mathcal{K}$, порожденную атомами $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{D}_{i\ell}$, $\forall i, \ell$. Значит, $\mathcal{K} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, что и требовалось.

В случае Б аналогичные рассуждения проводятся для секторов $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{N}''$ по отдельности. В этих построениях уже не обязательно предполагать, что атомы выбираются парами близнецов, по одному из каждого сектра. Парный выбор требовался только для выяснения строения логики $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}''$. Разумеется, при "склейке" $\mathfrak{L}$-множеств из $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}''$-атомов близнецовость необходима. $\boxtimes$

В этом параграфе мы основываемся на формулах (4.13) и (4.14). Их можно доказать совершенно элементарно, без ссылки на теорию представлений. По теореме 4.2 унитарные базисные операторы имеют собственными значениями только $\pm\sqrt{-1}$. Поскольку выбор базиса произволен, то все $X \in \mathbb{X}$ имеют только два собственных значения $\pm \lambda i$, а все iX -самосопряжены. Имеет место следующий факт: если X и Y **самосопряжены**, а $\alpha X + \beta Y$ имеет не более двух собственных значений при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то пространство четномерно, и матрицы X и Y состоят в соответствующем базисе из четырех скалярных блоков

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} \mathbb{1} & \xi_{12} \mathbb{1} \\ \xi_{21} \mathbb{1} & \xi_{22} \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \eta_{11} \mathbb{1} & \eta_{12} \mathbb{1} \\ \eta_{21} \mathbb{1} & \eta_{22} \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

По индукции отсюда можно получить формулы (4.7)-(4.9).

§ 5. Строение расщепов и семейств стационарных состояний.

Опишем теперь, как связываются Ξ-операторы и их носители в терминах обёртывающей $\mathbb{C}$-логики.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathcal{N}$ — сектор $\mathbb{R}$-логики $\mathfrak{L}$ носителей Ξ-операторов, $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i$ — его разложение на $\mathfrak{L}$-атомы, $\mathbb{N} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{H}_p$ — числовая система, изоморфная системе $\mathbb{X}$ $\mathfrak{L}$-индуцированных симметрий атома; в случае $\mathbb{N} = \mathbb{H}_p$ обязательно $m = 2$.

Тогда при $\mathbb{N} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{H}_{2\nu}$ существует представление

$$\mathcal{N} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \mathbb{C}^t , \qquad (5.1)$$

при котором матрица B ортопроектора на $\mathfrak{L}$-подпространство $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ имеет вид

$$B = \Big(\beta_0^{ij} \mathfrak{b}_{\nu s} + \sum_{s=1}^{2\nu} \beta_s^{ij} \mathfrak{b}_{\nu s} \Big)_{i,j=1}^{m} \otimes \mathbb{1}^{(t)} \qquad (5.2)$$

где матрицы $\mathfrak{b}_{\nu s}$ определены (4.7) и (4.8), а матрица

$$Б = (б^{ij}) = \Big(\beta_0^{ij} + \sum_{s=1}^{2\nu} \beta_s^{ij} e_s \Big)_{i,j=1}^{m} \qquad (5.3)$$

- идемпотентная эрмитова матрица с элементами $б \in \mathbb{N}$. Обратно, для всякого эрмитова иденпотента (5.3) матрица (5.2) - ортопроектор на $\mathfrak{L}$-подпространство.

Кроме того, существует нормированная неотрицательная эрмитова матрица P порядка t что всякий Ξ-оператор $\mathfrak{A} = N\mathfrak{A}N$

имеет матрицу

$$\mathcal{O}\!\!\!/ = \left(\gamma_0^{ij} Ъ_{\nu,0} + \sum_{s=1}^{2\nu} \gamma_s^{ij} Ъ_{\nu,s} \right)_{i,j=1}^{m} \otimes P , \qquad (5.4)$$

с эрмитовой матрицей

$$\Gamma = (\Gamma^{ij}) = \left(\gamma_0^{ij} + \sum_{s=1}^{2\nu} \gamma_s^{ij} e_s \right)_{i,j=1}^{m} ; \qquad (5.5)$$

и обратно, матрица вида (5.4) с условием (5.5) – матрица некоторого Ξ -оператора.

При $\mathbb{N} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}_{2\nu+1}$ существует разложение

$$\mathcal{N} = \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{2^\nu} \otimes \left(\mathbb{C}^{t'} \oplus \mathbb{C}^{t''} \right) , \qquad (5.6)$$

при котором матрица B ортопроектора раскладывается: $B = B' \oplus B''$, причем матрица B' имеет вид (5.2), а в матрице B'' надо изменить знаки у всех слагаемых, кроме нулевого. Аналогичные изменения вносятся в описание Ξ -оператора, где требуется задание P' и P'' порядков t' и t'' Один из последних может равняться нулю; тогда остается только одно слагаемое.

$$\left(\gamma_0^{ij} Ъ_{\nu,0} + \sum_{s=1}^{2\nu+1} \gamma_s^{ij} Ъ_{\nu,s} \right) \otimes p' P' \oplus \left(\gamma_0^{ij} Ъ_{\nu,0} - \sum_{s=1}^{2\nu+1} \gamma_s^{ij} Ъ_{\nu,s} \right) \otimes p'' P'' =$$

$$= \mathcal{O}\!\!\!/ \; ; \qquad p', p'' \geqslant 0 , \quad p' + p'' = 1 .$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathbb{X}$ интерпретировано как система $\mathfrak{L}$ -симметрий атома $\mathcal{E}_0$, и в ней выбран базис мнимых единиц. Возьмем разложение $\mathcal{E}_0 = \bigoplus_{k=1}^{2^\nu} \mathcal{A}_k$, построенное по правилу (4.15) и удовлетворяющее тем самым условию теоремы 4.5. Тогда оно порождает по (4.17) разложение $\mathcal{N} = \bigoplus_i \bigoplus_k \mathcal{Э}_{ik}$ на $\mathfrak{N}$ -атомы, удовлетворяющее условию теоремы 4.6.

Согласно теореме 3.7 оператор $\mathcal{Q}$ относительно разложения $\mathcal{N} = \oplus \mathcal{E}_i$ имеет блоки (3.20)

$$\mathcal{Q}^{ij} = W_i^o \, \tilde{\Gamma}^{(ij)} \, \hat{\wp} \, W_o^j \,, \tag{5.7}$$

где $\hat{\wp}$ — ограничение на $\mathcal{E}_o$ единственного Ξ-оператора вероятностей $\wp$ с носителем $\mathcal{E}_o$. Матрица $(\tilde{\Gamma}^{(ij)})$ $\mathbb{X}$-эрмитова и её элементы $\tilde{\Gamma}^{(ij)} \in \mathbb{X}$ коммутируют с $\hat{\wp}$. Согласно (4.6) относительно разложения $\mathcal{E}_o = \oplus \mathcal{R}_k$ оператор $\tilde{\Gamma}^{(ij)} \hat{\wp}$ сам состоит из блоков:

$$\tilde{\Gamma}^{(ij)} \hat{\wp} = \Big[\big(\gamma_o^{ij} \, \text{ъ}_{\nu,o} + \sum_{s=1}^{2\nu} \gamma_s^{ij} \, \text{ъ}_{\nu,s} \big) \otimes \mathbb{1}^{(t)} \Big] \cdot \Big[\text{ъ}_{\nu,o} \otimes \check{\wp} \Big] ;$$

$$\big(\tilde{\Gamma}^{(ij)} \hat{\wp} \big)^{k\ell} = \big(\gamma_o^{ij} \, \delta^{k\ell} + \sum_{s=1}^{2\nu} \gamma_s^{ij} \, \mathfrak{z}_{\nu,s}^{k\ell} \big) \, M_k^o \, \check{\wp} \, M_o^\ell \,.$$

Подставляя последнее значение в (5.7) и учитывая определение (4.16) координатных изометрий для разложения $\mathcal{N}$ на $\mathcal{R}$-атомы, получаем

$$\mathcal{Q}^{(ik)(j\ell)} = \big(\gamma_o^{ij} \, \delta^{k\ell} + \sum_{s=1}^{2\nu} \gamma_s^{ij} \, \mathfrak{z}_{\nu,s}^{k\ell} \big) \, Ш_{ik}^o \, \check{\wp} \, Ш_o^{j\ell} \,, \tag{5.8}$$

что равносильно (5.4).

Согласно замечанию к теореме 3.7, ортопроекторы на $\mathfrak{h}$-подпространства имеют тот же блочный вид (5.7) с заменой $\hat{\wp}$ на $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$ при идемпотеной матрице Γ. Поэтому, рассуждения аналогичны.

В случае, когда $\mathbb{X}$ имеет два точных неприводимых представления, происходит расщепление $\mathcal{E}_o = \mathcal{E}_o' \oplus \mathcal{E}''$, где в каждом из подпространств действует свое представление и соответственно расщеплен оператор $\wp$:

$$\wp = \wp' \oplus \wp'' \quad ; \qquad \wp^\vee = E^\vee \wp \, E^\vee . \qquad \boxtimes$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathfrak{N}$ — обертывающая $\mathbb{C}$-логика $\mathbb{R}$-логики $\mathfrak{L}$, и пусть все секторы $\mathcal{N}_j$ логики $\mathfrak{L}$, соответственно подсекторы $\mathcal{N}_j'$ и $\mathcal{N}_j''$ координатизованы так, что выполнены условия теорем 4.5 и 4.6. Пусть для каждого сектора $\mathcal{N}_j^v$ логики $\mathfrak{N}$, $\mathcal{N}_j^v = (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{2^v}) \otimes \mathbb{C}^{t^v}$ задана нормированная эрмитова матрица P_j^v порядка t; $p_{\alpha\beta} = \overline{p_{\beta\alpha}}$, $\operatorname{tr} P = 2^{-v}$. Тогда конструкции теоремы 5.1 задают расщеп $\Xi = \bigoplus_j \Xi_j$ с логикой носителей $\mathfrak{L}$.

Доказательство. По теореме 3.8 на каждом нераспадающемся секторе $\mathcal{N}_j$ задание матрицы P_j полностью определяет расщеп Ξ_j с логикой носителей $\mathfrak{L} \cap \mathcal{N}_j = \mathfrak{L}_j$, поскольку операторы симметрии $\mathfrak{b}_{v,0} \otimes \mathbb{1}^{(t)}$, $\mathfrak{b}_{v,s} \otimes \mathbb{1}^{(t)}$, $\forall s$, коммутируют с оператором $\mathfrak{b}_{v,0} \otimes P$. Для распадающихся секторов рассмотрение аналогично. $\boxtimes$

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть Ξ — расщеп. Тогда существует марковский супероператор Π, для которого Ξ является множеством Π-стационарных операторов:

$$\mathfrak{q}\,\Pi = \mathfrak{q}\,. \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_j \mathcal{N}_j$ — разложение на секторы, и пусть выбраны такие базисы, что имеют место разложения (5.1), соответственно (5.6). Будем конструировать матрицу супероператора – стохастическую суперматрицу. Поскольку композиция стохастических суперматриц снова стохастическая суперматрица, см. [19], мы будем выполнять конструкцию поэтапно, а предварительно опишем некоторые приемы.

1°. Унитарное преобразование U с матрицей $({}^j u^k)$ индуцирует преобразование операторов $\mathfrak{q} \to U^* \mathfrak{q}\, U$, сохраняющее неотрицательность и след, т.е. определяет стохастическую суперматрицу $\left({}^{i}_{j}\varkappa^{k}_{\ell}\right)$:

$$ {}^{i}_{j}\varkappa^{k}_{\ell} = {}^{i}u^{k}\cdot\overline{{}^{\ell}u^{j}} , \quad \forall\, i, j, k, \ell. \tag{5.10}$$

2°. Антиунитарное преобразование V , действующее над базисными разложениями $|x\rangle \in \mathcal{H}$ по правилу

$$|x\rangle = \sum_i \xi_i\, |x_i\rangle \xrightarrow{V} \sum_i \overline{\xi}_i\, |x_i\rangle = |Vx\rangle$$

определяет стохастическую суперматрицу T

$$ {}^{i}_{j}t^{k}_{\ell} = {}^{i}\delta_{\ell}\cdot{}_{j}\delta^{k} , \quad \forall\, i, j, k, \ell . \tag{5.11}$$

которая переворачивает каждую самосопряженную матрицу в транспонированную, см. леммы 3.4 и 3.5 в [3] .

3°. Стохастическая суперматрица $\left({}^{i}_{j}\delta\cdot p^{k}_{\ell}\right)$ переводит каждую матрицу $\left(q^{i}_{j}\right)$ в фиксированную матрицу $\left(p^{k}_{\ell}\right)$.

4°. Эту схему можно обобщить. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}'\otimes\mathcal{H}''$, и пусть латинские индексы относятся к $\mathcal{H}'$, греческие — к $\mathcal{H}''$. Суперматрица Ш обладает свойством

$$ {}^{i\alpha}_{j\beta}Ш^{k\mu}_{\ell\nu} = {}^{i}\delta^{k}\cdot{}^{\alpha}_{\beta}\delta\cdot{}_{j}\delta_{\ell}\cdot p^{\mu}_{\nu} ; \quad \left(q^{i\alpha}_{j\beta}\right) \xrightarrow{Ш} \left(\sum_\alpha q^{k\alpha}_{\ell\alpha}\cdot p^{\mu}_{\nu}\right) . \tag{5.12}$$

Проверка критерия стохастичности, см. (6.9) и (6.10) в [19] . тривиальна, см. [19] , теоремы 5.1 и 5.2 .

5°. Наконец, полусумма стохастических суперматриц или любое их усреднение с неотрицательными весами — снова стахастическая суперматрица.

I. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{H}_1$, и пусть унитарное преобразование действует на орты по правилу

$$U|x_i\rangle = |x_i\rangle , \ i \le m ; \quad U|x_i\rangle = -|x_i\rangle , \ i > m .$$

Тогда соответствующая суперматрица $\mathcal{H}^{(1)}$ переводит

$$q^{i}_{j} \to q^{i}_{j} , \ i,j \le m ,\ i,j > m ; \quad q^{i}_{j} \to -q^{i}_{j} , \ i \le m < j , \ j \le m < i .$$

Тогда полусумма $\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\mathcal{K}$, где $E = ({}^{i}\delta^{k} \cdot {}_{j}\delta_{\ell})$, действует так

$$q^i_j \to q^i_j \begin{cases} i,j \le m \\ i,j > m \end{cases} ; \quad q^i_j \to 0 \quad \begin{cases} i \le m < j \\ j \le m < i \end{cases} . \tag{5.13}$$

Действуя последовательно суперматрицами $\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\mathcal{K}^{(j)}$ мы получаем идемпотентное отображение, переводящее все эрмитовы матрицы в диагонально-блочные относительно разбиения $\mathcal{H} = \bigoplus_{\tau} \mathcal{N}_{\tau}$ и сохраняющее эрмитовы матрицы указанного строения инвариантными.

II. Диагонально-блочные эрмитовы матрицы можно преобразовать поблочно блочными же суперматрицами, см. § 6 в [19] . Когда суперматрица диагонально-блочна, т.е. является ортогональной суммой суперматриц на $\mathcal{N}_{\tau}^{*} \otimes \mathcal{N}_{\tau}$, можно изучать преобразование каждого блока отдельно.

Рассмотрим сектор первого типа $\mathcal{N} = \mathbb{C}^{2^{\nu}n} \otimes \mathbb{C}^{t}$, см. (5.1), и подействуем на соответствующий диагональный блок Q идемпотентной суперматрицей (5.12), где матрица вероятностей P взята из (5.4). Блок Q перейдет в кронекеровское произведение

$$\hat{Q} \times P = (q^k_{\ell}) \times (p^{\mu}_{\nu}) ; \quad q^i_j = \sum_{\alpha} q^{i\alpha}_{j\alpha} , \tag{5.14}$$

причем любой блок такого вида остается инвариантным.

Сектор второго типа (5.6) прежде всего "расчленим" по п.I на два подсектора $\mathcal{N}' = \mathbb{C}^{2^{\nu}n} \otimes \mathbb{C}^{t'}$ и $\mathcal{N}'' = \mathbb{C}^{2^{\nu}n} \otimes \mathbb{C}^{t''}$. Пусть $\underline{Ш}$ - стохастическая суперматрица, отличающаяся от $Ш$ попутным транспонированием:

$${}^{i\alpha}_{j\beta}\underline{Ш}^{k\mu}_{\ell\nu} = {}^{i}\delta_{\ell} \cdot {}^{\alpha}_{\beta}\delta \cdot {}_{j}\delta^{k} ; \quad (q^{i\alpha}_{j\beta}) \xrightarrow{\underline{Ш}} \Big(\sum_{\alpha} q^{\ell\alpha}_{k\alpha} \cdot p^{\mu}_{\nu}\Big) . \tag{5.15}$$

Построим теперь идемпотентное преобразование пары блоков

$$Q' \oplus Q'' \to \left(p' Ш_{11} Q' + p' \underset{\sim}{Щ}_{21} Q''\right) \oplus \left(p'' \underset{\sim}{Щ}_{12} Q' + p'' Ш_{22} Q''\right),$$

задаваемое соответствующей блочной суперматрицей. Оно переводит любую пару $Q' \oplus Q''$ в

$$\left(p' \hat{Q} \times P'\right) \oplus \left(p'' \hat{Q}^{\mathsf{T}} \times P''\right), \qquad (5.16)$$

$$\hat{q}^{\,i}_{j} = \sum_{\alpha'} q'^{\,i\alpha'}_{\,j\alpha'} + \sum_{\alpha''} q''^{\,i\alpha''}_{\,j\alpha''},$$

и оставляет все пары блоков такого вида инвариантными.

III. Цепочка построенных суперматриц такова, что их композиция переводит любую эрмитову матрицу данной размерности в диагонально-блочную с вырожденными блоками (5.14) или (5.16). При этом все матрицы указанного строения остаются инвариантными, т.е. стационарными для композиции. Мы продолжим этот процесс для блоков разных типов. Так как блоки разложились в кронекеровское произведение, где второй сомножитель доведен до кондиции, мы ограничимся описанием преобразования по латинским индексам, оставляя по греческим вырожденное преобразование $\left({}^{\alpha}_{\beta}\delta \cdot p^{\mu}_{\nu}\right)$.

IУ. Блок вещественного типа: $\mathbb{N} = \mathbb{R}$, $\nu = 0$. Прибегнем к полусумме тождественного преобразования и транспонирования (5.11). Так как $q^{j}_{i} = \overline{q^{i}_{j}}$, то $\frac{1}{2} q^{i}_{j} + \frac{1}{2} q^{j}_{i} = \mathrm{Re}\, q^{i}_{j} = \mathrm{Re}\, q^{j}_{i}$, т.е. матрица переходит в вещественную симметрическую, причем все последние остаются неподвижными, что и требуется.

У. Блок комплексного типа: $\mathbb{N} = \mathbb{C}$, $\nu = 0$. Формула (5.16) уже дает искомое описание. Когда $p' = 0$ или $p'' = 0$, получаем описание (5.14).

УI. Блок кватернионного типа: $\mathbb{N} = \mathbb{Q}$, $\nu = 1$. Воспользуемся точным представлением кватернионов унитарными матрицами второго порядка, см. лемму 4.3:

$$\mathbb{i} = -\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{j} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{k} = -\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \qquad (5.17)$$

Унитарному преобразованию пространства $\mathbb{C}^{2n}$

$|x_{2k-1}\rangle \xrightarrow{U} -|x_{2k}\rangle$, $|x_{2k}\rangle \xrightarrow{U} |x_{2k-1}\rangle$,

отвечает по (5.10) стохастическая суперматрица $\mathcal{H}$. Построим новую суперматрицу $\Pi = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\mathcal{H} * T$, где T – преобразование транспонирования, E – тождественное. Тогда подблок

$$\begin{pmatrix} q_{2l-1}^{2k-1} & q_{2l-1}^{2k} \\ q_{2l}^{2k-1} & q_{2l}^{2k} \end{pmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_{2l-1}^{2k-1} & q_{2l-1}^{2k} \\ q_{2l}^{2k-1} & q_{2l}^{2k} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} q_{2k}^{2l} & -q_{2k-1}^{2l} \\ -q_{2k}^{2l-1} & q_{2k-1}^{2l-1} \end{pmatrix} = \qquad (5.18)$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon + \gamma i & -\beta + \alpha i \\ \beta + \alpha i & \varepsilon - \gamma i \end{pmatrix} \leftrightarrow \varepsilon + \alpha\mathbb{i} + \beta\mathbb{j} + \gamma\mathbb{k},$$

где

$$\varepsilon = \mathrm{Re}\left(q_{2l-1}^{2k-1} + q_{2k}^{2l}\right), \gamma = \mathrm{Im}\left(q_{2l-1}^{2k-1} + q_{2k}^{2l}\right) = -\mathrm{Im}\left(q_{2l}^{2k} + q_{2k-1}^{2l-1}\right),$$

и аналогично. Таким образом, любая эрмитова матрица порядка $2n$ превращается в эрмитову матрицу, изоморфную кватернионной эрмитовой матрице порядка n , причем преобразование идемпотентно. Таким образом, и здесь стационарными оказываются матрицы требуемого вида и только они, ср. [3] .

VII. Спинорный блок $\mathbb{N} = \mathbb{H}_p$, $n = 2$. Рассмотрим сперва для иллюстрации простейший случай $p = 2$, $\nu = 1$. По предыдущему пункту мы умеем строить линейный идемпотентный эндоморфизм множества эрмитовых матриц 4-го порядка в матрицы блочного вида

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbb{1} & \varepsilon \mathbb{1} - \alpha \mathbb{i} - \beta \mathbb{j} - \gamma \mathbb{k} \\ \varepsilon \mathbb{1} + \alpha \mathbb{i} + \beta \mathbb{j} + \gamma \mathbb{k} & \eta \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

сохраняющее неотрицательность и след. Построим теперь диагонально блочное унитарное преобразование $\mathbb{C}^4$, с блоками $\lambda^{-1}(\varepsilon - \alpha \mathbb{i} - \beta \mathbb{j} + \gamma \mathbb{k})$ и $\lambda^{-1}(\varepsilon - \alpha \mathbb{i} - \beta \mathbb{j} - \gamma \mathbb{k})$, где $\lambda^2 = \varepsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, задающими в кватернионной форме "индуцированные" вращения $\mathbb{C}^2$. В результате получаем аналогичную матрицу, отличающуюся знаком перед $\gamma \mathbb{k}$. Полусумма неотрицательной матрицы и ей подобной – неотрицательна. Тем самым, мы проверили, что линейное отображение матрицы (5.19) в

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbb{1} & \varepsilon \mathbb{1} - \alpha \mathbb{i} - \beta \mathbb{j} \\ \varepsilon \mathbb{1} + \alpha \mathbb{i} + \beta \mathbb{j} & \eta \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

сохраняет эрмитовость, неотрицательность и след. Значит, таково же сквозное отображение из $\mathbb{C}^4$. Но по теореме 6.2 из [19] оно тогда задается стохастической суперматрицей.

Рассмотрим сходным образом произвольный четный случай $p = 2\nu$. Возьмем произвольную эрмитову матрицу порядка $2^{\nu+1}$. Она распадается на четыре блока порядка 2^{ν}. По пункту еэ леммы 4.3. Каждый блок допускает разложение по базису

$$Ъ_A = \prod_{\alpha \in A} Ъ_\alpha , \quad \forall A \subset \{1, \dots, 2\nu\}. \quad (5.20)$$

Л Е М М А 5.4. Линейное отображение эрмитовых матриц

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbb{1} + O(Ъ) & \zeta_0 \mathbb{1} - \sum_\alpha \zeta_\alpha Ъ_{\nu,\alpha} + O(Ъ^2) \\ \zeta_0 \mathbb{1} + \sum_\alpha \zeta_\alpha Ъ_{\nu,\alpha} + O(Ъ^2) & \eta \mathbb{1} + O(Ъ) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

состоящее в отбрасывании членов старшего порядка, сохраняет эрмитовость, неотрицательность и след, а потому задается согласно [19] некоторой стохастической суперматрицей $\Pi_{spin(\nu)}$.

Доказательство леммы. Заметим, что любая эрмитова матрица (5.21) подобна некоторой аналогичной матрице с левым нижним блоком $Б_{21} = \xi_0 \mathbb{1} + \xi Ъ_1 + O(Ъ^2)$, $\xi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_{2\nu}^2$. Мы затрудняемся явно выписать спинор, задающий нужный поворот. Однако, можно рассуждать так. Возьмем $\sum \xi_\alpha X_\alpha$ за первый орт X_1' и дополним его до полного ортонормированного базиса, $(X_\beta', X_\gamma') = \sum_\alpha \xi_\alpha^{(\beta)} \xi_\alpha^{(\gamma)} = \delta^{\beta\gamma}$. Он имеет те же правила антикоммутации $X_\beta' X_\gamma' + X_\gamma' X_\beta' = -\delta_{\beta\gamma} \cdot \mathbb{1}$, что и исходный. Значит, по единственности точного неприводимого представления, он описывается теми же матрицами (4.7)-(4.9), только в другом базисе связанных пространств $\mathbb{C}^{2^\nu} \oplus \mathbb{C}^{2^\nu}$.

Итак, будем предполагать, что матрица (5.21) упрощена. Подвергнем её, следуя [18] , цепочке идемпотентных отображений. Повернем согласованно каждое из $\mathbb{C}^{2^\nu}$ унитарной матрицей $Ъ_\beta Ъ_\gamma$, где $\beta, \gamma > 1$, и возьмем полусумму исходной матрицы и повернутой:

$$Б_{ij} \to \tfrac{1}{2} Б_{ij} + \tfrac{1}{2} (Ъ_\beta Ъ_\gamma)^* Б_{ij} (Ъ_\beta Ъ_\gamma) . \qquad (5.22)$$

Описанную процедуру проведем последовательно для всех $\beta, \gamma > 1$.

На каждом шагу

$$(Ъ_\beta Ъ_\gamma)^* Ъ_A (Ъ_\beta Ъ_\gamma) = \pm Ъ_A , \quad (Ъ_\beta Ъ_\gamma)^* \mathbb{1} (Ъ_\beta Ъ_\gamma) = \mathbb{1}.$$

Знак + возникает, когда $Ъ_\beta Ъ_\gamma$ коммутирует с $Ъ_A$. По свойству антикоммутации это будет , когда β и γ одновременно принадлежат или не принадлежат множеству A . Члены $\xi Ъ_1$ и $\xi_0 \mathbb{1}$ всегда коммутируют и не сокращаются. Выясним, какие члены хоть на одном шагу удостоились минуса и потому сократились. Если $A \ni \beta \neq 1$, $A \not\ni \gamma$, то член с $Ъ_A$ антикоммутирует. Значит, остаются возможности лишь $A' = \{1, 2, \ldots, 2\nu\}$, $A'' = \{2, \ldots, 2\nu\}$.

Прибегнем теперь к повороту матрицей Ъ_1 и последующему усреднению, аналогичному (5.22). При коммутировании и с $\text{Ъ}_{A'}$, и с $\text{Ъ}_{A''}$, Ъ_1 транспонируется с нечетным числом отличных от неё матриц Ъ_α. Поэтому, после усреднения соответствующие члены исчезнут. Таким образом, остается преобразовать матрицу

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \mathbb{1} + i \xi_1 \text{Ъ}_1 & \zeta_0 \mathbb{1} - \zeta_1 \text{Ъ}_1 \\ \zeta_0 \mathbb{1} + \zeta_1 \text{Ъ}_1 & \eta_0 \mathbb{1} - i \eta_1 \text{Ъ}_1 \end{pmatrix}, \qquad (5.23)$$

где в записи учтена эрмитовость матрицы, ибо $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$, $\text{Ъ}_1^* = -\text{Ъ}_1$

Как видно из формулы (4.7) матрица Ъ_1 инвариантна относительно транспонирования, $\text{Ъ}_1^T = \text{Ъ}_1$. Подвергнем матрицу (5.23), как и в УI, преобразованию с помощью Ъ_2 и транспонированию. Поскольку Ъ_1 антикоммутирует с Ъ_2, получаем после усреднения с (5.23) искомый результат

$$\begin{pmatrix} \xi \mathbb{1} & \zeta_0 \mathbb{1} - \zeta_1 \text{Ъ}_1 \\ \zeta_0 \mathbb{1} + \zeta_1 \text{Ъ}_1 & \eta \mathbb{1} \end{pmatrix}. \boxtimes$$

Наконец, возвращаясь к доказательству теоремы при $p = 2\nu + 1$, мы подвергнем отображению построенной стохастической суперматрицей $\Pi_{spin(\nu)}$ входящую в (5.16) матрицу Q. Теорема полностью доказана. $\boxtimes$

Литература

I. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, Бюлл.МГУ (А), I;3 (1937).

2. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н. Стационарные матрицы вероятностей для стохастической супермaтрицы, III советско-японск.симп. теор.вероятн., (Ташкент), Тезисы, I, III-II3 (1975).

3. Morozova E.A., Cencov N.N. Stationary matrices of probabilities for stochastic supermatrix, Springer Lecture Notes in Mathematics (in press).

4. Jordan P., von Neumann J., Wigner E. On an algebraic generalization of the Quantum mechanical formalism, Ann. Math.,35 (1934), 29-64.

5. Weyl H. The classical groups, 1939.

6. Van der Vaerden B.L. Modern algebra,2, 1940.

7. Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления, Наука, 1970.

8. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Элементарные йордановы логики, Препринт ИПМ, № II3, 1975.

9. Topping D.M., Jordan algebras of self-adjoint operators, Mem. Amer. Math. Soc., 53, 1965.

IO. Jordan C., Essai sur la geometrie a "n" dimension, Bull. Soc. Math. de France, t.3, 103-174 (1874-75).

II. Розенфельд Б.А., Многомерные пространства,Наука,1966.

I2. Birkhoff G., von Neumann J., The logic of quantum mechanics, Ann. Math., 37 (1936), 823-825.

I3. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., К теореме Йордана - фон Неймана-Вигнера, Препринт ИПМ, № I29, I975.

I4. von Neumann J., Continuous geometry, Princeton, 1960.

I5. Vardarajan V.S., Geometry of quantum theory, 1, Van Nostrand, 1968.

I6. Bellman R., Introduction to matrix analysis, N.Y., 1960.

I7. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Унитарные эквиваринты семейства подпространств, Препринт ИПМ, № 52, I974.

I8. Chvalley C., Theory of Lie groups, 1, 1946.

I9. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н., Матрицы вероятностей и стохастические суперматрицы, Препринт ИПМ, № 84, I973.