СТРУКТУРА СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА.

Морозова Е.А., Ченцов Н.Н.

Структура семейства стационарных распределений вероятностей для классической цепи Маркова Π с конечным или счетным числом состояний была установлена А.Н.Колмогоровым [1]. Множество Ω всех состояний распадается на непересекающиеся классы $\Omega^{(k)}$ сообщающихся существенных состояний, и множество $\Omega^{(c)}$ несущественных состояний. На каждом классе $\Omega^{(k)}$ либо существует ровно одно Π - стационарное распределение P_k, сосредоточенное на $\Omega^{(k)}$, либо такого распределения нет; в последнем случае класс называется невозвратным. Любое Π - стационарное распределение P на Ω представимо в виде

$$P=\sum_i q_i P_i \quad , \text{ где } \quad \sum_i q_i=1, \qquad (1)$$

и обе суммы берутся только по возвратным классам. В конечном случае все существенные классы $\Omega^{(k)}$ - возвратные, см. [2].

В настоящем докладе мы получаем обобщение разложения (1) для квантового аналога счетных цепей Маркова. Квантовый аналог конечных цепей был изучен нами в докладе [3] и препринте [4]. Тема настоящего доклада явилась также предметом часовой лекции [5].

Пусть $\mathcal{H}$ -сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$ -йорданова алгебра всех ограниченных эрмитовых операторов с умножением $a\circ b=(ab+ba)/2$. Элементы a, b, c этой алгебры определяют случайные величины, или наблюдаемые, как говорят физики.

Математическое ожидание случайной величины - $\mathbb{R}$ -линейный неотрицательный нормированный нормальный функционал φ на $\mathcal{L}^H$:

$$1^\circ\ \varphi(\lambda a+\mu b)=\lambda\varphi(a)+\mu\varphi(b), \quad 2^\circ\ \varphi(a^2)\geq 0, \qquad (2)$$

$$3^\circ\ \varphi(\mathbb{1})=1, \quad 4^\circ\ (a_n\nearrow a)\Rightarrow\varphi(a_n)\nearrow\varphi(a).$$

Как известно, такой функционал φ задается формулой

$$\varphi(a)=\mathrm{tr}\,Pa,\ \forall a;\ P\geq 0,\ \mathrm{tr}\,P=1, \qquad (3)$$

где P - эрмитов неотрицательный оператор со следом 1. Его мы и будем называть распределением вероятностей или вероятностной мерой.

Как и в классическом случае, вероятностные меры образуют выпуклое множество в линейном пространстве всех зарядов - эрмитовых операторов с конечной следовой нормой.

Мы принимаем следующее определение:
Марковское отображение Π линейного (над $\mathbb{R}$) упорядоченного пространства $\mathcal{B}^H$ в себя - это линейный гомоморфизм, удовлетворяющий условиям неотрицательности, нормированности и нормальности:

$$1^\circ\ (a \geq 0) \Rightarrow (\Pi a \geq 0), \quad 2^\circ\ \Pi \mathbb{1} = \mathbb{1} \tag{4}$$
$$3^\circ\ (a_n \uparrow a) \Rightarrow (\Pi a_n \uparrow \Pi a).$$

Легко видеть, что любое марковское отображение Π однозначно продолжается до $\mathbb{C}$ -линейного отображения всей алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ по формуле

$$\Pi b = \Pi\left(\frac{b+b^*}{2}\right) + i\,\Pi\left(\frac{b-b^*}{2i}\right).$$

На распределениях вероятностей и математических ожиданиях Π действует двойственным образом

$$\varphi\Pi : (\varphi\Pi)(a) = \varphi(\Pi a); \quad P\Pi : tr(P\Pi)a = tr\, P(\Pi a) \tag{5}$$

Часто в определение (4) марковского отображения включают более ограничительное, чем 1°, требование вполне неотрицательности, указанное Стайнспрингом [6]. Мы рассмотрим этот важный частный случай в конце доклада.

Определение. Распределение вероятностей P (заряд Q) называется Π -стационарным, если

$$P\Pi = P \quad (Q\Pi = Q). \tag{6}$$

Искомое множество стационарных состояний P, очевидно, является слабо замкнутым подмножеством слабо замкнутого линейного пространства всех стационарных зарядов.

С каждым распределением вероятностей P (и с каждым зарядом Q) связывается носитель - линейное пространство, натянутое на собственные векторы, отвечающие нулевым собственным значениям. Ортогональное дополнение к носителю будет нуль - пространством (ядром) оператора P (или Q). При этом носитель заряда $Q = \sum x_j e_j$ разлагается в ортогональную сумму носителей его положительной и отрицательной частей

$$Q^+ = \sum_{x_j > 0} x_j e_j, \quad Q^- = -\sum_{x_j < 0} x_j e_j.$$

Следуя обычной терминологии теории меры, мы скажем - нео тельный заряд Q доминирует Q', если его носитель $\mathcal{E}$ содержит $\mathcal{E}'$, т.е.

$$\{\xi:\xi\in\mathcal{H},(Q\xi,\xi)=0\}\subseteq\{\xi:\xi\in\mathcal{H},(Q'\xi,\xi)=0\}.$$

В сепарабельном пространстве $\mathcal{H}$ каждое выпуклое замкнутое множество р определений вероятностей содержит хотя бы одно доминирующее, поэтому искомое множество стационарных ρ также доминировано (или пусто).

Определение. Будем называть случайную величину f инвариантной относительно Π, если

$$fe=ef=(\Pi f)e=e(\Pi f), \tag{7}$$

где e - ортопроектор на общий носитель $\mathcal{E}$ доминирующих стационарных распределений вероятностей.

Ввиду (4) тривиальным инвариантом является $\mathbb{1}$ - единица алгебры $\mathcal{B}$. Определение (7) линейно и непрерывно, следовательно, инварианты образуют ультраслабо замкнутое линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Определение инварианта обобщает понятие гармонической функции f классического марковского оператора, $f=\Pi f$, см. [7]. Домножение на ортопроектор e усекает цепь Маркова, отбраковывая все несущественные состояния и все невозвратные существенные состояния. Заметим, что в определении инварианта фактически содержится требование, что $f=efe+(\mathbb{1}-e)f(\mathbb{1}-e)$, т.е. что его матрица имеет блочно-диагональный вид относительно разложения $\mathcal{H}=\mathcal{E}\oplus(\mathcal{H}\ominus\mathcal{E})$.

Поэтому, как обычно в классической теории вероятностей, мы сможем отождествить инвариантные случайные величины, совпадающие почти всюду по мере ρ; в частности $e\approx\mathbb{1}$ по любой стационарной мере ρ. А для любых наблюдаемых такого отождествления сделать нельзя, так как в некоммутативной теории случайные величины, ρ - эквивалентные нулю, не образуют, вообще говоря, идеала.

Лемма I. Если заряд Q стационарен, то стационарны порознь его положительная и отрицательная части.

Лемма 2. Если $\mathcal{E}'$ - носитель стационарной меры ρ, то $\mathcal{E}''=\mathcal{E}\ominus\mathcal{E}'$ есть носитель (ненормированной) стационарной меры

$$\rho''=\lim_{t\to\infty}[\rho-t\rho']^{+}=e''\rho e'', \tag{8}$$

где ρ - доминирующая стационарная мера, e' - ортопроектор на $\mathcal{E}'$, см. [3].

Лемма 3. Пусть ортогональные идемпотенты e_1 и e_2 и их сумна $e = e_1 \oplus e_2$, такоиы, что

$$e_1(\Pi e_1) = e_1 , \quad e_2(\Pi e_2) = e_2 , \quad e(\Pi e) = e .$$

Тогда, если обозначить $e_0 = 1 - e$, $\mathcal{B}^H_{ij} = e_i \mathcal{B}^H e_j + e_j \mathcal{B}^H e_i$

$$\Pi \mathcal{B}^H_{00} \subseteq \mathcal{B}^H_{00} , \qquad \Pi \mathcal{B}^H_{10} \subseteq \mathcal{B}^H_{00} + \mathcal{B}^H_{10} ,$$

$$\Pi \mathcal{B}^H_{11} \subseteq \mathcal{B}^H_{00} + \mathcal{B}^H_{10} + \mathcal{B}^H_{11} ,$$

$$\Pi \mathcal{B}^H_{12} \subseteq \mathcal{B}^H_{00} + \mathcal{B}^H_{10} + \mathcal{B}^H_{20} + \mathcal{B}^H_{12} . \tag{8}$$

Следствие. Для любого $a \in \mathcal{B}^H$.

$$e[\Pi(e_1 a + a e_1)]e = e_1(\Pi a)e + e(\Pi a)e_1 .$$

Доказательство леммы 3 основывается на стандартном рассмотрении неотрицательных квадратичных пучков типа

$$q(\lambda) = e_k \{\Pi[(\lambda e_i + e_j) h (\lambda e_i + e_j)]\} e_k \quad \text{при } 0 \le h \le e_i \oplus e_j .$$

Лемма 4. Для любого стационарного распределения вероятностей P_1 ортопроектор e_1 на его носитель есть инвариант.

Теорема А. Ультраслабо замкнутое линейное пространство инвариантов является йордановой алгеброй.

Воспользуемся неравенством Шварца-Кадисона, см. [8], $\Pi h^2 \ge (\Pi h)^2$:

$$0 \le tr P[\Pi f^2 - (\Pi f)^2] = tr[(P\Pi) f^2] - tr[Pe(\Pi f)e] = tr Pf^2 - tr Pf^2 = 0$$

Заметим, что всякий идемпотентный инвариант $e' \le e$ является ортопроектором на носитель хотя бы одного стационарного распределения вероятностей, н

$$P' = \alpha^{-1} e' \ldots \qquad \alpha = tr\, e'Pe' .$$

Этого соображения достаточно для полного описания структуры всех стационарных распределений вероятностей в случае конечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, см. [4]. Для счетномерного пространства $\mathcal{H}$ необходимо дополнительно построить условное математическое ожидание относительно йордановой алгебры $\mathcal{J}$ инвариантов.

Теорема Б. Для каждого $a \in \mathcal{B}^H$ существует ультраслабый предел

$$M_{\mathcal{J}} a = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} e \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Pi^k a \right) e , \tag{9}$$

со свойство

$$M_{\mathcal{J}}(fa + af) = f(M_{\mathcal{J}} a) + (M_{\mathcal{J}} a) f , \quad \forall f \in \mathcal{J} \tag{10}$$

Отображение $M_{\mathcal{J}}$ линейно и нормально, и является ортопроекцией $\mathbb{R}$ - линейного пространства $\mathcal{L}^H$ на $\mathcal{J}$ относительно скалярного произведения

$$\langle a \mid b \rangle = tr[P(a \circ b)] \tag{11}$$

с любой доминирующей Π - стационарной мерой P.

В коммутативной теории определение условного математического ожидания как ортопроекции являются вполне корректными. Однако, в некоммутативном случае такая ортопроекция может, вообще говоря, зависеть от меры P см. [9]. Однако, в силу (8), любая предельная точка значений сумм (9) должна совпадать с ортопроекцией.

Теорема В. Любой неотрицательный нормальный нормированный линейный функционал Ψ на йордановой алгебре $\mathcal{J}$ инвариантов задает стационарное распределение вероятностей P:

$$tr(Pa) = \varphi(a) = \Psi(M_{\mathcal{J}} a), \tag{12}$$

и обратно.

Прямое утверждение теоремы очевидно, а обратное вытекает из лемм I и 4.

Ясно, что с самого начала мы могли бы рассматривать в качестве алгебры наблюдаемых не всю $\mathcal{L}^H(\mathcal{H})$, а только её какую-нибудь ультраслабо замкнутую йорданову подалгебру, обладающую условным математическим ожиданием. Все наши утверждения сохранились бы.

Теорема Г. Если марковское отображение Π является вполне неотрицательным, то йорданова алгебра $\mathcal{J}$ является самосопряженной частью некоторой алгебры фон Неймана W с условным математическим ожиданием M_W. Любое стационарное распределение вероятностей задается в этом случае формулой

$$tr(Pa) = \varphi(a) = \Psi(M_W a) \tag{13}$$

Чтобы вывести теорему Г из теоремы В, надо рассмотреть йорданову алгебру эрмитовых матриц второго порядка с элементами из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, и заметить, что отображение Π_2, действующее на них по правилу

$$\Pi_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi a & \Pi b \\ \Pi c & \Pi d \end{pmatrix},$$

является положительным, по определению вполне положительности Π. Затем надо применить марковское отображение Π_2 к эрмитовой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & h+ig \\ h-ig & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} h^2+i(gh-hg)+g^2 & 0 \\ 0 & h^2-i(gh-hg)+g^2 \end{pmatrix},$$

где $\Pi g = g$, $\Pi h = h$, и воспользоваться теоремой А.

Частный случай теоремы Г, в котором носитель доминирующего Π стационарного распределения совпадает со всем гильбертовым простр[анством] $\mathcal{H}$, был аннотирован в [10].

Общепринятое определение марковского отображения, использованно[е] нами, сохраняет только часть свойств классических марковских перех[о]дных вероятностей. В частности, оно не позволяет вводить совместны[е] распределения. Более сложная конструкция изучалась Аккарди [11]. О[д]нако, теория стационарных распределений вероятностей для таких ото[б]ражений сводится, см. [11], § 3, к рассмотренной выше.

Авторы благодарны Луиджи Аккарди за внимание и присылку сборник[а] докладов [10].

Литература

I. Колмогоров А.Н. Цепи Маркова со счетным числом состояний. Бюлл. МГУ (А), т. I, № 3, 1937.

2. W Doeblin, Bull Math Soc Roum Sci, t 39, № 1, 57 – 115; № 2, 3 – 61 (1937)

3. E A Morozova, N N Cencov, Stationary matrices of probabilities for stochastic supermatrix, Lecture Notes in Mathematics, N550. Springer, 1976, 379 – 418

4. Морозова Е.А., Ченцов Н.Н. Препр. Инст. прикл. матем. АН СССР, № 130, 1976.

5. N N Cencov, Completely positive Marcov transition maps, semi-invariant observables, and stationary states, 12 - th European Meeting of Statisticians, Varna, 1979

6. W F Stinespring, Proc Amer Math Soc, v 6 №2, 211 – 216 (1[955])

7. E B Dynkin, Marcov processes, Springer, Berlin, (1965)

8. R V Kadison, Ann Math v 56, №3, 494 – 503 (1952)

9. W B Arveson, Amer J Math, v 89, №3, 578 – 642 (1967)

10. A Friderio, H Spohn, in Proc Symp Mathem Problems in the Quantum Theory of Irreversible Processes, Lab di Cibernetica Napoli, 1978

II. Аккарди Л. Функц. анализ и его прилож., т. 9, № I, I-8, 1975.

МГУ

ИПМ АН СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тюмень. 1982 г.