Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг докладлари — Доклады Академии наук УзССР

1978, № 6

УДК 513.88

М. А. МУРАТОВ

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

В работах [1—4] введены пространства L^1, L^2, L^p замкнутых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана A. Здесь рассматриваются пространства Орлича замкнутых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана счетного типа; обозначения и понятия взяты из работ [1, 4, 5].

Пусть A — алгебра фон Неймана счетного типа, m — точный нормальный конечный след на A^+, $s(A)$ — пространство измеримых относительно A операторов, $L^1(A)$ — пространство интегрируемых операторов [1, 4], $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу N-функции [5].

Множество $L_M(A)=\{T: T\in s(A),\ M(|T|)\in L^1(A)\}$ назовем классом Орлича, а множество $L_M^*(A)=\{T: T\in s(A), TS\in L^1(A)$ для любого $S\in L_N(A)\}$ — пространством Орлича.

Предложение 1. $A\subset L_M(A)\subset L_M^*(A)\subset L^1(A)$. Обозначим через $P_M(A)$ множество $\{T: T\in L_M(A),\ m(M(|T|))\leqslant 1\}$.

Предложение 2. I. (1) если $T\in L_M(A)$ и α — комплексное число, такое, что $|\alpha|\leqslant 1$, то $\alpha T\in L_M(A)$; (2) если $T\in L_M(A)$ и U — унитарный оператор из A, то $UT\in L_M(A)$; (3) для каждого унитарного оператора U оператор $T\in L_M(A)$ тогда и только тогда, когда $U^*TU\in L_M(A)$.

II. Если $T\in P_M(A)$, то UT, $U^*TU\in P_M(A)$ для любого унитарного оператора $U\in A$.

III. Следующие условия эквивалентны: (1) $T\in L_M^*(A)$; (2) $|T|\in L_M^*(A)$; (3) $T^*\in L_M^*(A)$; (4) для любого унитарного оператора $U\in A$ имеет место $U^*TU\in L_M^*(A)$.

В частности, из I следует, что $|T|$, $T^*\in L_M(A)$ в том и только в том случае, когда $T\in L_M(A)$. Заметим также, что пространство Орлича $L_M^*(A)$ идеально, т. е. если T_1, $T_2\in s(A)$, $T_1\in L_M^*(A)$ и $|T_2|\leqslant|T_1|$, то $T_2\in L_M^*(A)$.

Теорема 1. Пусть B — подалгебра фон Неймана алгебры фон Неймана A. Тогда (1) $L_M(B)=s(B)\cap L_M(A)$ и (2) $L_M^*(B)=s(B)\cap L_M^*(A)$.

Говорят, что функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию при больших значениях u, если существуют такие постоянные $k>0$ и $u_0\geqslant 0$, что $M(2u)\leqslant kM(u)$ при $u\geqslant u_0$ (см. [5]).

Предложение 3. $L_M(A) = L_M^*(A)$ тогда и только тогда, когда функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Для каждого оператора $T \in L_M^*(A)$ положим

$$\|T\|_M = \sup\{|m(TS)|,\ S \in P_N(A)\}.$$

Предложение 4. (1) $\|T\|_M < \infty$ для каждого $T \in L_M^*(A)$;

(2) $\|T\|_M = \||T|\|_M = \|T^*\|_M = \|U^*TU\|_M = \|UT\|_M$ для любого унитарного оператора $U \in A$;

(3) $\|T_1\|_M \leqslant \|T\|_M$, если $|T_1| \leqslant |T|$;

(4) $\|T\|_1 \leqslant \|T\|_M$ и, если $T \in L_M(A)$, то $\|T\|_M \leqslant \|M(|T|)\|_1 + 1$*) ;

(5) если $X \in A$ и $T \in L_M^*(A)$, то $XT,\ TX \in L_M^*(A)$ и

$$\|XT\|_M \leqslant \|X\|_\infty \|T\|_M,\ \|TX\|_M \leqslant \|X\|_\infty \|T\|_M\,;$$

(6) если $T \in L_M^*$ (A) и $\|T\|_M \leqslant 1$, то $T \in L_M(A)$ и $\|M(|T|)\|_1 < \|T\|_M$;

(7) (неравенство Гельдера) если $T \in L_M^*(A)$ и $S \in L_N^*(A)$, то $TS \in L^1(A)$, и $|m(TS)| \leqslant \|T\|_M \|S\|_N$.

Теорема 2. $\left(L_M^*(A),\ \|\cdot\|_M\right)$ — банахово пространство.

Будем говорить, что последовательность $\{T_n\}_1^\infty \subset L_M^*(A)$ сходится к оператору $T \in L_M^*(A)$ в среднем, если

$$\lim_{n\to\infty} m\left(M\left(|T_n - T|\right)\right) = 0 \text{ (ср. [1, 5]).}$$

Предложение 5. (1) алгебра фон Неймана A плотна в классе Орлича $L_M(A)$ относительно сходимости в среднем;

(2) сходимость в среднем слабее, чем сходимость по норме в $L_M^*(A)$ и совпадает с ней, если функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Описание непрерывных линейных функционалов на некоммутативных пространствах Орлича дает

Теорема 3. (1) пусть $T \in L_M^*(A)$ и f_T — линейный функционал на $L_N^*(A)$, заданный формулой

$$f_T(S) = m(TS). \tag{*}$$

Тогда f_T непрерывен на $L_N^*(A)$;

(2) если функция $N(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию и f — непрерывный линейный функционал на $L_N^*(A)$, то существует оператор $T \in L_M^*(A)$, такой, что $f(S) = m(TS)$ для каждого оператора $S \in L_N^*$ (A).

В случае, когда функция $N(v)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, существуют линейные непрерывные функционалы на $L_N^*(A)$, которые нельзя представить в виде (*).

---

* Считаем, что $M(1) + N(1) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal I. E. Ann. of Math. v. 57, 1952.
2. Yeadon F. J. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., v. 77, 1975, p. 7.
3. Dixmier J. Bull. Soc. Math. France, v. 81, 1953.
4. Dixmier J. Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien Algebres de von Neumann), Paris, 1957.
5. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.

Ташкентский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
18. XI 1977 г.