ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 3 · 1988

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.8

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЛИНЕЙНОМ И КВАДРАТИЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

НЕСТЕРОВ Ю. Е.

Введение. В настоящей работе предлагаются новые итеративные методы решения задач линейного и квадратичного программирования, имеющие кубическую зависимость оценки трудоемкости от размеров задачи и логарифмическую зависимость от требуемой точности ее решения. Точное решение исходной задачи в описываемых ниже методах, может быть получено из приближенного (с точностью $\varepsilon=O(2^{-L})$, где L — число битов, необходимое для записи условия задачи и ее решения), с помощью общего приема [1].

1. Метод решения задачи линейного программирования. Рассмотрим задачу линейного программирования в следующей форме:

$$\max\{t|Ax=tb,\ x\in K\}\equiv t^*, \tag{1.1}$$

где A-невырожденная $m\cdot n$-матрица со столбцами a_i, $t\in R$, $K=\{x\in\in R^n||x^{(i)}|\leqslant 1,\ i=1,\dots,n\}$.

Введем штрафную функцию

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}[-|x^{(i)}|-\ln(1-|x^{(i)}|)],$$

$$x^*(t)=\operatorname{argmin}\{F(x)|Ax=tb\},$$

где $t\in[0,\ t^*)$. Ясно, что $x(0)=0$. Опишем метод решения задачи (1.1), основанный на «отслеживании» точек траектории $x^*(t)$.

Метод $\mathscr{P}(r,\ \delta,\ \tau)$.

0). Полагаем $h=[1-(\tau+r)^2]^2[1+(\tau+r)^2]^{-1}$,

$$x_0=0\in R^n,\ H_0=[AA^T]^{-1};\ d_0=(1,\dots,1)^T\in R^n.$$

1). k-я итерация ($k\geqslant 0$).

а) Полагаем

$$x_k'=x_k+\delta r\frac{D_k^2A^TH_kb}{\langle H_kb,\ b\rangle^{1/2}},$$

$$x_{k+1}=x_k'-h[D_k^2-D_k^2A^TH_kAD_k^2]F'(x_k'),$$

где $D_k=\operatorname{diag}(d_k)$.

б) формируем множество

$$J(k)=\{j|d(x_{k+1})^{(j)}\geqslant(1+\tau)d_k^{(j)}\}\cup$$
$$\cup\{j|d(x_{k+1})^{(j)}\leqslant(1-\tau)d_k^{(j)}\},$$

где $d(x)^{(j)}=1-|x^{(j)}|$.

в) Производим пересчет вектора d_k:

$$d_{k+1}^{(j)} = d(x_{k+1})^{(j)}, \text{ если } j \in J(k),$$
$$d_{k+1}^{(j)} = d_k^{(j)}, \text{ в противном случае.}$$

г) С помощью формул одноранговой коррекции производим пересчет матрицы H_k:

$$H_{k+1} = \left[H_k^{-1} + \sum\nolimits_{j \in J(k)} [(d_{k+1}^{(j)})^2 - (d_k^{(j)})^2]\, a_j a_j^T\right]^{-1}.$$

Итерация закончена.

Пусть $d \in R^n$, $d>0$. Положим $D(d) = \operatorname{diag}(d)$; $S(d, x_0, r) = \{x \in R^n \mid \|D(d)^{-1}(x-x_0)\| \leqslant r\}$.

Теорема 1. Пусть для решения задачи (1.1) применяется метод $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$ с параметрами r, δ, τ такими, что

$$r \in (0, 1/12), \ \delta = 4r, \ \tau = r.$$

Тогда все точки последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенной методом $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$ обладают следующими свойствами:

1) $x_{k+1} \in S(d_k, x_k, 2r) \subset K$;

2) для последовательности величин $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$t_0 = 0; \ t_{k+1} = t_k + \delta r \langle H_k b, b\rangle^{-1/2},$$

справедливо соотношение: $Ax_k = t_k b$;

3) при любом $k \geqslant 0$ выполнено включение:

$$x^*(t_k) \in S(d_k, x_k, \varkappa r),$$

где $\varkappa = 2(r+\tau)[1+(r+\tau)^2]^{-1}$.

4) справедлива оценка скорости сходимости:

$$0 \leqslant (t^* - t_k)\langle [AA^T]^{-1} b, b\rangle^{1/2} \leqslant nC(r, \delta, \tau)(1+qn^{-1/2})^{-k+1},$$

где $C(r, \delta, \tau) = \delta^{-1} r^{-1} (1-r-\tau)^{-2}$,

$$q = \delta r (1-r-\tau)^2 (1+\varkappa(r+\tau))^{-1}.$$

Если при этом пересчет матриц H_k на шаге г) производить с помощью формул одноранговой коррекции, то суммарная трудоемкость таких пересчетов за первые N итераций не превзойдет величины $2r\tau^{-1} n^{1/2}(N+1)$.

Нетрудно видеть, что метод $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$ может использоваться для нахождения решения системы линейных неравенств. А именно, пусть требуется найти точку x, такую, что

$$Ax = b, \ x \in K. \tag{1.2}$$

Предположим, что система (1.2) является θ-устойчивой, т. е. существует $\theta \in (0, 1]$, такое, что

$$\{x \in R^n \mid Ax = b\} \cap (1-\theta) K \neq \varnothing.$$

Сформируем задачу: $\max\{t \mid Ax = tb, \ x \in K\}$ и применим для ее решения метод $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$, введя в него

Критерий прерывания: (1.3)

Если $t_k + \delta r \langle H_k b, b\rangle^{-1/2} \geqslant 1$, то делаем еще одну итерацию метода с $\delta = r^{-1}(1-t_k)\langle H_k b, b\rangle^{1/2}$ и после этого останавливаемся, положив $x_* = x_{k+1}$.

Теорема 2. Если для решения θ — устойчивой системы неравенств (1.2) применяется метод $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$, снабженный критерием прерывания (1.3), то не более, чем за N итераций,

$$N = O(n^{1/2}(\ln n + \ln \theta^{-1})),$$

в качестве ответа x_* будет выдано допустимое решение системы (2), такое, что $x^*(1) \in S(d_k, x_*, \varkappa r)$. При этом суммарное число арифметических операций не превзойдет величины порядка $O(nm^2[\ln n + \ln \theta^{-1}])$.

2. Метод решения задачи квадратичного программирования. Рассмотрим задачу квадратичного программирования в следующей постановке:

$$\min\{f(x) = 0.5\langle Qx, x\rangle - \langle c, x\rangle \mid x \in K \cap \mathscr{L}\} = f^*, \tag{2.1}$$

где $Q \geqslant 0$ — симметрическая неотрицательно определенная $n \cdot n$-матрица, $b \in R^n$, $\mathscr{L} = \{x \in R^n \mid Ax = b\}$, A — невырожденная $m \cdot n$-матрица.

Введем штрафную функцию $\Psi(t, x) = tf(x) + F(x)$, где $F(x)$ определено в разделе 1. Положим

$$x^*(t) = \operatorname{argmin}\{\Psi(t, x) \mid x \in K \cap \mathscr{L}\}, \ t \geqslant 0.$$

Предположим, что система условий задачи (2.1) является θ — устойчивой, $0 < \theta \leqslant 1$. Следующий метод решения задачи (4) производит «отслеживание» траектории $x^*(t)$.

Метод $\mathscr{M}(r, \tau)$.

0). С помощью метода $\mathscr{P}(r, \delta, \tau)$ находим начальную точку x_0 такую, что

$$Ax_0 = b, \ x^*(0) \in S(d(x_0), x_0, \varkappa r),$$

где $\varkappa = 2(r+\tau)[(1-\tau)(1+(r+\tau)^2)]^{-1}$. Полагаем

$$t_0 = 0.5r[(1+r)^{-2} r - (1-\varkappa r)^{-2} \varkappa r] \cdot$$
$$\cdot \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} |(f'(x_0))^{(i)}|\right]^{-1};$$
$$d_0 = d(x_0); \ T_0 = t_0;$$
$$B_0 = [T_0 Q + D(d(x_0))^{-2}]^{-1}; \ H_0 = [AB_0A^T]^{-1};$$
$$h = (1-(r+\tau)^2)^2 (1+(r+\tau)^2)^{-1};$$
$$q = (r+\tau)(1-\varkappa)(1-r-\tau)^2(1+r+\tau)^{-2}.$$

1). k-я итерация $(k \geqslant 0)$.

а) Полагаем

$$x_{k+1} = x_k - h(B_k - B_k A^T H_k A B_k)\Psi'(t_k, x_k),$$
$$t_{k+1} = (1+qn^{-1/2}) t_k.$$

б) Если $t_{k+1} \geqslant (1-\tau)^{-2} T_k$, то полагаем $T_{k+1} = (1-\tau)^{-2} T_k$; $t_{k+1} = T_{k+1}$; $J(k) = \varnothing$; $d_{k+1} = d(x_{k+1})$; $B_{k+1} = [T_{k+1} Q + D(d(x_{k+1}))^{-2}]^{-1}$; $H_{k+1} = [AB_{k+1}A^T]^{-1}$.

в) В противном случае:

Полагаем $T_{k+1} = T_k$,

$$J(k) = \{j \mid d(x_{k+1})^{(j)} \geqslant (1+\tau) d_k^{(j)}\} \cup \{j \mid d(x_{k+1})^{(j)} \leqslant (1-\tau) d_k^{(j)}\};$$

Производим пересчет вектора d_k:

$$d_{k+1}^{(j)} = d(x_{k+1})^{(j)}, \text{ если } j \in J(k),$$
$$d_{k+1}^{(j)} = d_k^{(j)}, \text{ если нет;}$$

Формируем последовательности матриц $\{B_{k,i}\}_{i=0}^{m(k)}$ и $\{H_{k,i}\}_{i=0}^{m(k)}$, где $m(k)$-число элементов множества $J(k)$ по следующим правилам:

$$B_{k,0} = B_k; \ H_{k,0} = H_k; \ B_{k,i+1} = B_{k,i} + \alpha_{k,i} B_{k,i} e_{s(k,i)} e_{s(k,i)}^T B_{k,i},$$
$$H_{k,i+1} = H_{k,i} + \beta_{k,i} H_{k,i} u_{k,i} u_{k,i}^T H_{k,i},$$
$$i = 0, \ldots, m(k)-1,$$

где $s(k, i)$-i-й элемент в множестве $J(k)$,

$$\alpha_{k,i} = \frac{\Delta_{k,i}}{1 + \Delta_{k,i}\langle B_{k,i} e_{s(k,i)}, e_{s(k,i)}\rangle}, \quad \Delta_{k,i} = (d_{k+1}^{(j)})^{-2} - (d_k^{(j)})^{-2},$$

$$u_{k,i} = AB_{k,i+1} e_{s(k,i)}. \quad \beta_{k,i} = \frac{\alpha_{k,i}}{1 + \alpha_{k,i}\langle H_{k,i} u_{k,i}, u_{k,i}\rangle}.$$

Полагаем $B_{k+1}=B_{k,\ m(k)}$; $H_{k+1}=H_{k,\ m(k)}$.

Итерация закончена.

Теорема 3. Пусть для решения θ-устойчивой задачи (2.1) применяется метод $\mathscr{M}(r,\ \tau)$ с $r\in(0,\ 0.1)$, $\tau=2r$. Тогда все точки последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, построенной методом $\mathscr{M}(r,\ \tau)$ обладают следующими свойствами:

1) $Ax_k=b,\ x_k\in K$;

2) при любом $k\geqslant 0$ выполняются включения: $x^*(t_k)\in V(B_{k+1}^{-1},\ x_{k+1},\ \varkappa r)$, где $\varkappa=2(r+\tau)[(1-\tau)(1+(r+\tau)^2)]^{-1}$, $V(B,\ x',\ r)=\{x|\langle B(x-x'),\ x-x'\rangle\leqslant r^2\}$;

3) справедлива оценка скорости сходимости:

$$f(x_k)-f^*\leqslant(n+1)C_1(1+qn^{-1/2})^{-k},$$

где $q=(r+\tau)(1-\varkappa)(1-r-\tau)^2(1+r+\tau)^{-2}$,

$$C_1=4r^{-1}\sum_{i=1}^{n}|f'(x_0)^{(i)}|\cdot[(1+r)^{-2}r-(1-\varkappa r)^{-2}\varkappa r]^{-1}.$$

Если при этом суммарная трудоемкость выполнения первых N итераций, где N-любое натуральное число, не превзойдет величины порядка $O(n^3+n^{2.5}N)$.

Следствие. Общая трудоемкость получения решения задачи (2.1) с погрешностью ε для метода $\mathscr{M}(r,\ \tau)$ оценивается сверху величиной порядка $O(nm^2(\ln\theta^{-1}+\ln n)+n^3(\ln\varepsilon^{-1}+\ln n))$, где θ-параметр устойчивости системы линейных уравнений.

Близкий к оптимальному способ выбора параметров r, τ в методе $\mathscr{M}$ следующий: $r=0.05$, $\tau=0.01$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Г. Хачиян.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании. ДАН СССР, 1979, т. 244, № 5.

Москва

Поступила в редакцию
29.1.1988