ЭКОНОМИКА 1988
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ Том XXIV, вып. 6

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ БАРЬЕРОВ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Нестеров Ю. Е., Немировский А. С.

(Москва)

1. Введение. В [1, 2] предложен новый полиномиальный алгоритм решения задач линейного и квадратичного программирования; там же отмечено, что этот алгоритм лишь частично использует специфику упомянутых задач и поэтому может быть перенесен на более общие выпуклые условно-экстремальные задачи. В настоящей работе дана сводка результатов, связанных с такого рода переносом. Мы опускаем доказательства ради сокращения объема; впрочем последовательное, в соответствии с порядком изложения, их восстановление требует лишь рутинной работы (чтобы облегчить ее, приводим не только итоговые, но и промежуточные утверждения).

Описываемый метод предназначен для решения выпуклых задач вида

$$\varphi(x)\to\min|x\in G\subseteq R^n. \tag{1}$$

Он представляет собой метод внутренних штрафных функций с ньютоновскими шагами. Вся его специфика – в эксплуатации нестандартных свойств штрафных функций. Начнем с их описания.

2. Барьеры. Пусть E – конечномерное вещественное линейное пространство (далее такие пространства будем называть просто линейными); $C(E)$ – семейство выпуклых замкнутых подмножеств E с непустой внутренностью.

Определение 1. Пусть $G\in C(E)$ и $F:\operatorname{int}G\to R$, а $\varkappa\in[0,\varkappa_*)$, $\varkappa_*=(5^{1/2}-1)/2$, $\mu\geqslant 1$. F называется $(\varkappa,\mu)$-барьером для G, если:

(i) F выпукла класса C^2 на $\operatorname{int} G$.

(ii) $\forall(x\in\operatorname{int}G,\ y\in E,\ h\in E)$: $D^2F(x)[y-x,y-x]\leqslant 1\Rightarrow y\in\operatorname{int}G$ и $(1-\varkappa)\times D^2F(x)[h,h]\leqslant D^2F(y)[h,h]\leqslant(1+\varkappa)D^2F(x)[h,h]$.

(iii) $\forall x\in\operatorname{int}G: 2\sup\{-DF(x)[h]-0{,}5D^2F(x)[h,h]\,|\,h\in E\}\leqslant\mu$.

Пусть $F-(\varkappa,\mu)$-барьер для G и $\varphi:\operatorname{int}G\to R$. Функция φ называется согласованной с F $(\varphi\in\mathcal{F}(F))$, если:

(iv) φ выпукла класса C^2 на $\operatorname{int}G$.

(v) $\forall(x\in\operatorname{int}G,\ y\in\operatorname{int}G,\ h\in E)$: $D^2F(x)[y-x,y-x]\leqslant1\Rightarrow(1-\varkappa)D^2\varphi(x)\times[h,h]\leqslant D^2\varphi(y)[h,h]\leqslant(1+\varkappa)D^2\varphi(x)[h,h]$.

(vi) $\forall(x\in\operatorname{int}G,\ h\in E)$: $D^2F(x)[h,h]+D^2\varphi(x)[h,h]=0\Rightarrow D\varphi(x)[h]=0$.

Теорема 1. *Пусть $G\in C(E)$ и $F-(\varkappa,\mu)$-барьер для G. Тогда:*

(i) *Если $x(y)$ – аффинное отображение линейного пространства E_1 в E, образ которого пересекает $\operatorname{int}G$, а $G_1=\{y\in E_1|x(y)\in E\}$, то функция $F_1(y)=F(x(y)):\operatorname{int}G_1\to R$ есть $(\varkappa,\mu)$-барьер для G_1; кроме того, если $\varphi\in\mathcal{F}(F)$, $\varphi_1(y)=\varphi(x(y)):\operatorname{int}G_1\to R$, то $\varphi_1\in\mathcal{F}(F_1)$.*

(ii) *Если $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}(F)$ и $\alpha_1,\alpha_2\geqslant0$, то $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\in\mathcal{F}(F)$. Далее, пространство $E_F=\{h\in E|D^2F(x)[h,h]=0\}$ не зависит от выбора x из $\operatorname{int}G$, и если φ – линейная или выпуклая квадратичная форма на E, ограниченная снизу на E_F, то $\varphi\in\mathcal{F}(F)$. Кроме того, $F\in\mathcal{F}(F)$.*

(iii) *Пусть $x,y\in\operatorname{int}G$ и при $w\in G$ $p_w(z)=\inf\{t>0|w+t^{-1}(z-w)\in G\}\leqslant\infty$ – функция Минковского G с полюсом w. Тогда*

$$DF(x)[x-y] \leqslant \mu p_y(x)/(1-p_y(x)),$$

$$DF(x)[y-x] \leqslant \mu,$$

$$F(x) \leqslant F(y) + \mu \ln 1/(1-p_y(x)),$$

$$F(x) \geqslant F(y) + DF(y)[x-y] + \ln 1/(1-p_y(x)) - p_y(x),$$

$$2\sup\{-DF(x)[h] - 0{,}5D^2F(y)[h,h] \mid h \in E\} \leqslant (\mu/(1-p_y(x)))^2.$$

Кроме того, если $z \in \partial G$ *и* $p_z(x) \leqslant (\mu^{1/2}+1)^{-2}$, *то* $DF(x)[z-x] \geqslant 1-p_z(x) \times \times(\mu^{1/2}+1)^2$.

(*iv*) *Если* $x_i \in \operatorname{int} G$, $\lim_{i\to\infty} x_i = x \in \partial G$, *то*

$$F(x_i) \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

(*v*) $G = G + E_F$ *и* F *не меняется при сдвигах аргумента вдоль* E_F. F *ограничено снизу на* $\operatorname{int} G$ *тогда и только тогда, когда образ* G *в фактор-пространстве* E/E_F *ограничен, и в этом случае* F *достигает минимума на* $\operatorname{int} G$ *на множестве* X_F *вида* $x(F) + E_F$, *причем справедливы включения*

$$\{x \in E \mid D^2F(x(F))[x-x(F), x-x(F)] \leqslant 1\} \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{int} G \subseteq \{x \in E \mid D^2F(x(F))[x-x(F), x-x(F)] \leqslant \sigma^2\},$$

$$\sigma = (1+\mu/(1-\varkappa)),$$

и неравенства $(\forall (x \in \operatorname{int} G, h \in E))$

$$\sigma^{-2}D^2F(x(F))[h,h] \leqslant D^2F(x)[h,h] \leqslant (1-p_{x(F)}(x))^{-2} \times$$

$$\times \sigma^2 D^2F(x(F))[h,h].$$

(*vi*) *Пусть* $G_i \in C(E)$, $F_i - (\varkappa, \mu_i)$*-барьер для* G_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Положим $G_* = \bigcap_{i=1}^m G_i$. *Если* $\operatorname{int} G_* \neq \varnothing$, *то* $G_* \in C(E)$ *и* $F_* = \sum_{i=1}^m F_i$: $\operatorname{int} G_* \to R - \left(\varkappa, \sum_{i=1}^m \mu_i\right)$*- барьер для* G_*, *причем сужения на* $\operatorname{int} G_*$ *функций из* $\mathcal{F}(F_i)$ *лежат в* $\mathcal{F}(F_*)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Приведем простые достаточные условия, позволяющие проверять свойства (*i*)–(*iii*) из определения барьера; на них опирается обоснование всех приводимых ниже конкретных примеров.

Теорема 2. *Пусть* $G \in C(E)$. *Тогда*

(*i*) *Если* Φ — *вогнутая положительная* C^2*-функция на* $\operatorname{int} G$, *то функция* $F = -\ln \Phi$ *удовлетворяет условию* 0.1 (*i*), *а также условию* 0.1 (*iii*) *с* $\mu = 1$.

(0.1 (*i*) — это *п.* (*i*) *определения 1, а, скажем, Т.2* (*ii*) — *п.* (*ii*) *теоремы 2*).

(*ii*) *Пусть* $\beta_*(\varkappa) = 1-(1+\varkappa)^{-1/3}$. *Если* F — *выпуклая* C^3*-функция на* $\operatorname{int} G$, *удовлетворяющая при некотором* $\varkappa \in (0, \varkappa_*)$ *условию* $\forall (x \in \operatorname{int} G, h \in E): |D^3F(x)[h,h,h]| \leqslant 2\beta_*(\varkappa)\{D^2F(x)[h,h]\}^{3/2}$, *то при всех* $x, y \in \operatorname{int} G$: $D^2F(x)[y-x, y-x] \leqslant 1 \Rightarrow (1-\varkappa)D^2F(x)[h,h] \leqslant D^2F(y)[h,h] \leqslant \leqslant (1+\varkappa)D^2F(x)[h,h]$;
если, сверх того, $F(x_i) \to \infty$, *как только* x_i *сходятся к граничной точке* G, *то* F *удовлетворяет* 0.1 (*ii*).

3. Базовый метод. Пусть $F - (\varkappa, \mu)$-барьер для $G \in C(E)$ и $f \in \mathcal{F}(F)$. Положим при $\alpha \geqslant 0$, $x \in \operatorname{int} G$: $f_\alpha(x) = \alpha f(x) + F(x)$; $\Phi_\alpha^{f,x}(y) = Df_\alpha(x)[y-x] + +0.5D^2f_\alpha(x)[y-x, y-x]$; $\Delta_\alpha(f, x) = f_\alpha(x) - \inf\{f_\alpha(y) \mid y \in \operatorname{int} G\}$. $\Phi_\alpha^{f,x}(\cdot)$ — выпуклая квадратичная форма, ограниченная снизу на E (ввиду 0.1 (*i*) – 0.1 (*vi*)); пусть $x(\alpha, f, x)$ — (какая-нибудь) точка минимума этой формы на E. Отметим, что $x(\alpha, f, x)$ получается из x одним шагом метода Ньютона, примененным к f_α. Положим $d(\alpha, f, x) = -2\Phi_\alpha^{f,x}(x(\alpha, f, x)) \in \in [0, \infty)$.

Теорема 3. *Пусть* $F - (\varkappa, \mu)$*-барьер для* $G \in C(E)$, $f \in \mathcal{F}(F)$, $\alpha > 0$, $x \in \operatorname{int} G$, $\delta \in (0, 1/2]$. *Тогда* $\Delta_\alpha(f, x) \geqslant 0{,}5 \min\{1, d^{1/2}(\alpha, f, x)(1+\varkappa)^{-1}\} d^{1/2}(\alpha, f, x)$.

Далее, пусть выполняется условие: $d(\alpha, f, x) \leqslant \delta^2$. *Тогда:* $(1-\delta) \geqslant \varkappa \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta_\alpha(f, x) \leqslant 0.5(1-\varkappa)^{-1} d(\alpha, f, x)$.

Кроме того, если $\theta \geqslant {}^1/_2$ *таково, что*

$$|\theta-1|\mu^{1/2} \leqslant \delta\{(1-\varkappa)^{1/2}\varkappa^{-1}\min\{1, \theta^{1/2}\}-1-|\theta-1|\},$$

то при $\beta=\theta\alpha$, $u=x(\beta, f, x)$ *имеем* $u \in \operatorname{int} G$ *и* $d(\beta, f, u) \leqslant \varkappa^2(1-\varkappa)^{-1}\max\{1, 1/\theta\}\{d^{1/2}(\alpha, f, x)+|\theta-1|(\mu^{1/2}+d^{1/2}(\alpha, f, x)\}^2 \leqslant \delta^2$.

Теперь мы подготовлены к описанию метода минимизации (назовем его базовым). Предположим, что $G \in C(E)$, а F — $(\varkappa, \mu)$-барьер для $G \in C(E)$, ограниченный снизу на $\operatorname{int} G$ (см. Т.1 (v)), и пусть $\varphi \in \mathcal{F}(F)$ — ограниченная снизу на $\operatorname{int} G$ функция. Продолжим φ на все G до полунепрерывной снизу функции со значениями в $R \cup \{+\infty\}$; это продолжение также обозначим φ. Допустим еще, что φ достигает минимума на G в некоторой точке x_*. Ясно, что если G ограничено, то и ограниченность φ снизу на G, и существование x_* немедленно следуют из выпуклости φ.

Фиксируем постоянную $\delta_* \in (0, {}^1/_2]$, $(1-\varkappa) \geqslant \delta_*$, и стартовую точку $x_0 \in \operatorname{int} G$. Работа метода на задаче (1) состоит из двух этапов; на первом ищется приближение x^0 к множеству X_F точек минимума F на G (F — центров G), и только на втором осуществляется собственно минимизация φ.

Первый этап. Пусть $g(x)=-DF(x_0)[x-x_0]$, а θ_1 — наименьшее из решений неравенства $(1-\theta)\mu^{1/2} \leqslant 0{,}1\delta_*\{(1-\varkappa)^{1/2}\varkappa^{-1}\theta^{1/2}+\theta-2\}$ в отрезке $[{}^1/_2, 1]$.

На первом этапе строятся последовательности чисел β_i и точек $x_i \in \operatorname{int} G$ по правилам $\beta_0=1$, $\beta_{i+1}=\theta_1\beta_i$, $x_{i+1}=x(\beta_i, g, x_i)$. Процесс обрывается в первый момент i (обозначим его N), когда выполнится неравенство $d(0, g, x_i) \leqslant 3\delta_*^2/4$, и упомянутое x^0 — в точности x_N.

Второй этап. Можно считать $D\varphi(x^0) \neq 0$ — иначе x^0 — точное решение (1). Пусть α_0 — наибольшее из решений неравенства

$$2\sup\{-\alpha D\varphi(x^0)[h]-0{,}5(\alpha D^2\varphi(x^0)[h, h]+$$
$$+D^2F(x^0)[h, h]/16) \mid h \in E\} \leqslant 0{,}2\delta_*^2,$$

а θ_2 — наибольшее из решений неравенства $(\theta-1)\mu^{1/2} \leqslant \delta_*\{(1-\varkappa)^{1/2}\varkappa^{-1}-\theta\}$.

Рассмотрим последовательности чисел α_i, $i \geqslant 1$, и точек x^i, $i \geqslant 0$, строящихся по правилам $\alpha_{i+1}=\theta_2\alpha_i$, $x^{i+1}=x(\alpha_{i+1}, \varphi, x^i)$. Здесь x^i и есть i-е приближение к решению (1), формируемое базовым методом. Свойства базового метода описывает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $G \in C(E)$, F — $(\varkappa, \mu)$*-барьер для* G, *ограниченный снизу на* $\operatorname{int} G$, $\varphi \in \mathcal{F}(F)$ *ограничена снизу на* $\operatorname{int} G$, *а описанное выше продолжение* φ *на* G *достигает минимума на* G. *Пусть, далее,* x_0 — *стартовая точка, а* $x(F) \in X_F$ — *какой-нибудь* F*-центр* G. *Тогда:*

(i) *Описание первого этапа корректно: все строящиеся на нем точки* x_i *лежат в* $\operatorname{int} G$ *и момент остановки конечен. При этом для* $0 \leqslant i \leqslant N$ *имеем* $d(\beta_i, g, x_i) \leqslant (\delta_*/10)^2$, *а число* N *шагов первого этапа допускает оценку* $N \leqslant]\omega_1\mu^{1/2}\ln(\mu\omega_2/(1-p_{x(F)}(x_0)))[$.

Здесь и далее $\omega_i>0$ *зависят лишь от* δ_* *и* $\varkappa$.

(ii) *Описание второго этапа корректно:* α_0 *определено и положительно,* $x^i \in \operatorname{int} G$ *при всех* i. *При этом для всех* i *имеем*

$$d(\alpha_i, \varphi, x^i) \leqslant \delta_*^2 \quad \text{и} \quad \varphi(x^i)-\varphi(x_*) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\alpha_0^{-1}\theta_2^{-i/2}\{4.1+[\ln(\alpha_0(\varphi(x^0)-\varphi(x_*))/\mu)]_+\}.$$

Если G *ограничено,* $W_F(G)=\{x \in E \mid D^2F(x(F))[x-x(F), x-x(F)] \leqslant 1\}$, $\operatorname{Var}_F\varphi=\sup\{\varphi(x) \mid x \in W_F(G)\}-\varphi(x_*)$, *то при всех* i *имеем* $\varphi(x^i)-\varphi(x_*) \leqslant$ $\leqslant \omega_3\mu(1+\omega_4\mu^{-1/2})^{-i}\operatorname{Var}_F\varphi$.

Таким образом, при ограниченном G для отыскания решения задачи (1) с относительной погрешностью $(\varphi(u)-\varphi(x_*))/\operatorname{Var}_F\varphi \leqslant \varepsilon \in (0, 1]$ достаточно $O(\mu^{1/2}\ln 2\mu/\varepsilon)$ шагов второго этапа; константа в $O(\cdot)$ зависит лишь от δ_* и $\varkappa$.

4. Примеры барьеров. Константы во всех последующих $O(\cdot)$ — абсолютные.

Теорема 5. *При любом $\varkappa \in (0, \varkappa_*)$ и подходящих абсолютных константах в фигурирующих ниже $O(\cdot)$:*

(i) Функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/t$ является $(\varkappa, O(\varkappa^{-2}))$-барьером для $G=(0, +\infty)\subseteq R$.

(ii) Если Φ — выпуклая квадратичная форма на E, $\inf_E \Phi<0$, то функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/(-\Phi)$ служит $(\varkappa, O(\varkappa^{-2}))$-барьером для $G=\{x\in E|\Phi(x)\leqslant 0\}$.

(iii) Функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/(t^2-x^Tx)$ — $(\varkappa, O(\varkappa^{-2}))$-барьер для $G=\{(t, x)\in R\times R^n|t\geqslant(x^Tx)^{1/2}\}$.

(iv) Пусть $\omega(t)$ — неубывающая непрерывная и вогнутая на $[0, +\infty)$ класса C^3 на $(0, +\infty)$ функция, $O=\omega(0)<\omega(t)$, $t>0$, такая, что одно из чисел

$$\alpha_\omega^{(1)}=\min\{\alpha\geqslant 0||\omega'''(t)|\omega(t)\leqslant\alpha\omega'(t)|\omega''(t)|\,\forall t\in(0, \infty)\},$$

$$\alpha_\omega^{(2)}=\min\{\alpha\geqslant 0||\omega'''(t)|\omega^{1/2}(t)\leqslant\alpha|\omega''(t)|^{3/2}\forall t\in(0, \infty)\},$$

конечно, и пусть $\alpha_\omega=\min\{\alpha_\omega^{(1)}, \alpha_\omega^{(2)}\}+1$.

Тогда функция $O(\alpha_\omega^2\varkappa^{-2})\ln 1/(\omega^2(t)-x^Tx)$ — $(\varkappa, O(\alpha_\omega^2\varkappa^{-2}))$-барьер для $G=\{(t, x)\in R\times R^n|t\geqslant 0, \omega(t)\geqslant(x^Tx)^{1/2}\}$.

В частности, при $1\leqslant p<\infty$ множества $G_n^p=\{(t, x)\in R\times R^n|t\geqslant(x^Tx)^{p/2}\}$ допускают $(\varkappa, O(p\varkappa^{-2}))$-барьеры.

(v)a) Пусть функция $\omega(t)$ непрерывна, не убывает, вогнута на $[0,\infty)$ и класса C^3 на (O, ∞), $O=\omega(0)<\omega(t)$, $t>0$, и число $\alpha_\omega=\min\{\alpha\geqslant 0|\,|\omega'''(t)|\leqslant\alpha|\omega''(t)|/t\,\forall t\in(0, \infty)\}$ конечно. Тогда функция $O(\alpha_\omega^2\varkappa^{-2})\times\{\ln 1/t+\ln 1/(\omega(t)-x)\}$ — $(\varkappa, 0(\alpha_\omega^2\varkappa^{-2}))$-барьер для $G=\{(t, x)\in R^2|t\geqslant 0, \omega(t)\geqslant x\}$. В частности, множества $G^p=\{(t, x)\in R^2|t\geqslant(x_+)^p\}$, $1\leqslant p<\infty$, допускают $(\varkappa, O(p\varkappa^{-2}))$-барьеры.

b) Пусть $f(x)$ — C^3 — непостоянная функция на оси, такая, что f', f'', $f'''\geqslant 0$ и при некотором $\lambda\in[3/2, 2)$ и всех x

$$f'(x)f'''(x)\in[0{,}5f''(x)^2, \lambda f''(x)^2].$$

Пусть $\Delta=\{x|f'(x)>0\}$, а $\omega(t)$ — обратная к сужению f на Δ функция на $f(\Delta)$. Тогда функция $O((2-\lambda)^{-2}\varkappa^{-2})\{\ln 1/(t-f(x))+\ln 1/(\omega(t)-x)\}$ — $(\varkappa, O((2-\lambda)^{-2}\varkappa^{-2}))$-барьер для $G=\{(t, x\in R^2|t\geqslant f(x)\}$.

В частности, множества G^p при $p>3$ (а тогда, ввиду а), и при всех $p\geqslant 1$) допускают $(\varkappa, O(\varkappa^{-2})$-барьеры с не зависящей от p константой в $O(\cdot)$; множество $G=\{(t, x)\in R^2|t\geqslant\exp(x)\}$ допускает $(\varkappa, O(\varkappa^{-2}))$-барьер.

Выделенное условиями b) при каждом фиксированном λ из $[1.5, 2)$ семейство функций на оси замкнуто относительно суперпозиций своих элементов.

(vi) Пусть S_n — пространство симметричных $n\times n$-матриц. Функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/\det(x)$ — $(\varkappa, O(n\varkappa^{-2}))$-барьер для множества S_n^+ неотрицательно определенных матриц из S_n.

(vii) Пусть $L_{m,n}$ — пространство $m\times n$-матриц. Функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/\det(t^2I_n-x^Tx)$ является $(\varkappa, O(n\varkappa^{-2})$, а функция $O(\varkappa^{-2})\ln 1/\det(t^2I_m-xx^T)$ — $(\varkappa, O(m\varkappa^{-2}))$-барьером для множества $\{(t, x)\in R\times L_{m,n}|t\geqslant\|x\|\}$. Здесь I_k — единичная $k\times k$-матрица, $\|\cdot\|$ — стандартная матричная норма (максимальный из модулей сингулярных чисел).

Соединение теоремы 5 и п.п. (i), (vi) теоремы 1 позволяет явно строить барьеры для многих часто встречающихся областей G. Например, пусть $G\subseteq R^n$ ограничено и задано удовлетворяющей условию Слейтера системой из m выпуклых квадратичных неравенств $\varphi_i(x)\leqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant m$. При выборе, скажем, $\varkappa=0{,}5$ можно указать для $G(\varkappa, O(m))$-барьер (Т.5 (ii), Т.1 (vi)). Если теперь φ_0 — выпуклая квадратичная форма на R^n, то задача $\varphi_0(x)\to\min|\varphi_i(x)\leqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant m$, может быть решена базовым методом (Т.7 (ii)) с относительной погрешностью $\varepsilon\in(0, 1)$ за не более, чем $O(m^{1/2}\ln 2m/\varepsilon)$ шагов второго этапа; при этом один шаг каждого этапа «стоит» не более $O(mn^2+n^3)$ арифметических операций (АО). Для запуска базового метода достаточно располагать точкой x_0 с $\varphi(x_0)<0$, $1\leqslant i\leqslant m$. При необходимости ее можно найти по той же схеме, решив с подходящей точностью вспомогательную задачу

$$t\to\min|\varphi_i(x)-t\leqslant 0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad x^{\mathrm T}x-r^2\leqslant 0,$$
$$t-r\leqslant 0,\quad t+r\leqslant 0,$$

взяв r настолько большим, чтобы G заведомо содержалось в множестве $x^{\mathrm T}x-r^2\leqslant 0$ и было $\varphi_i(0)\leqslant r$, $1\leqslant i\leqslant m$. Эта новая задача – того же типа, что исходная, но в ней стартовая точка указывается без труда.

В связи с оценкой возможностей базового метода применительно к линейным задачам заметим, что если G – выпуклое тело в R^n, такое, что для некоторой крайней точки G конус ведущих в G направлений n-гранен, то параметр μ любого барьера для G не менее n.

Рассмотренный пример покрывает задачи линейного и квадратичного программирования (φ_i линейны, $1\leqslant i\leqslant m$). Как раз на такие задачи и было ориентировано данное в [1, 2] описание базового метода. Там, в частности, показано, что при линейных ограничениях φ_i (φ_0 при этом может быть квадратичной) метод допускает «кармаркаровское ускорение» – при сохранении оценки погрешности как функции числа шагов средняя (по шагам) их трудоемкость может быть снижена с $O(mn^2)$ АО до $O(m^{1/2}n^2)$ АО, что приводит к результирующей оценке трудоемкости отыскания решения относительной погрешности ε в $O(mn^2\ln m/\varepsilon)$ АО (для простоты мы считаем формат задачи стандартным: $x_0=x(F)$, ср. [3, 4]). Отметим, что указанный нами для линейных φ_i (т. е. многогранника G) барьер F – это в точности логарифмический штраф, использованный Ренегаром [3] и Вадьей [4] в их полиномиальных алгоритмах решения задачи линейного программирования, а оценки трудоемкости этих алгоритмов соответственно такие же, как у базового метода и его «кармаркаровского ускорения» из [1, 2]. Однако если в [1, 2] упомянутый штраф применяется в схеме метода барьеров, то в [3, 4] – в схеме метода центров. Укажем, что методы Ренегара и Вадьи предполагают известным априорно F-центр многогранника ограничений задачи линейного программирования; чтобы обеспечить это условие, им приходится осуществлять довольно громоздкое предварительное форматирование задачи. Вместо специального форматирования можно было бы использовать первый этап базового метода. В контексте [1, 2] это не изменило бы результирующей оценки трудоемкости.

5. Накрытия. Область применимости базового метода на самом деле существенно шире, чем кажется на основании предыдущего.

Определение 2. Пусть $\varkappa\in[0,\varkappa_*)$, $\mu\geqslant 1$, $l\geqslant 0$ – целое, $G\in C(E)$ и φ – непрерывная выпуклая функция на E. Тогда:

(i) $(\varkappa,\mu,l)$-накрытием для G называется четверка $\Gamma=(E_+,G_+,\pi,F_+)$, в которой E_+ – линейное пространство, $\dim E_+=\dim E+l$, $G_+\in C(E_+)$, F_+ – $(\varkappa,\mu)$-барьер для G_+, π – аффинное отображение E_+ на E, такое, что $\pi(G_+)=G$ и π правильно на G_+; последнее означает, что всякое ограниченное подмножество G является образом некоторого ограниченного подмножества G_+.

(ii) $(\varkappa,\mu,l)$-накрытием для φ называется $(\varkappa,\mu,l)$-накрытие для надграфика $Q(\varphi)=\{(t,x)\in R\times E|t\geqslant\varphi(x)\}$.

Функции, допускающие $(\varkappa,\mu,l)$-накрытие, будем называть $(\varkappa,\mu,l)$-регулярными.

Теорема 6. (i) *Пусть* $G\in C(E)$, $\lambda:E'\to E$ – *аффинное отображение, образ которого пересекается с* $\operatorname{int}G$, $G'=\{y\in E'|\lambda(y)\in E\}$. *Тогда всякое* $(\varkappa,\mu,l)$-*накрытие для* G *конструктивно порождает* $(\varkappa,\mu,l)$-*накрытие для* G'.

(ii) *Пусть* $G\in C(E)$ *и* $\lambda:E\to E'$ – *аффинное отображение, причем* $\lambda(G)=G'\in C(E)$ *и* λ *правильно на* G. *Тогда всякое* $(\varkappa,\mu,l)$-*накрытие для* G *конструктивно порождает* $(\varkappa,\mu,l+\dim E-\dim E')$-*накрытие для* G'.

(iii) *Пусть* $G_i\in C(E)$ *и* Γ_i – $(\varkappa,\mu_i,l_i)$-*накрытие для* G_i, $1\leqslant i\leqslant s$. *Пусть, далее, при* $G=\cap_i G_i$, $\operatorname{int}G\neq\varnothing$. *Тогда* $\{\Gamma_i\}_{i\leqslant s}$ *конструктивно порождают* $\left(\varkappa,\sum_{i=1}^s\mu_i,\sum_{i=1}^s l_i\right)$- *накрытие для* G.

(iv) *Пусть* f_i, $1\leqslant i\leqslant s$ – *непрерывные выпуклые функции на линейном пространстве* E; Γ_i–$(\varkappa,\mu_i,l_i)$-*накрытия для* f_i, $1\leqslant i\leqslant s$, φ – *непрерывная и* *монотонная (относительно обычного порядка на R^s) функция из R^s в R, а* Γ*—*$(\varkappa, \mu, l)$*-накрытие для* φ*. Тогда* $\{\Gamma;\ \Gamma_i,\ 1\leqslant i\leqslant s\}$ *конструктивно порождают* $\left(\varkappa,\ \mu+\sum_{i=1}^{s}\mu_i,\ s+l+\sum_{i=1}^{s}l_i\right)$*-накрытие для суперпозиции* $\varphi(f_1,\ldots,f_s)$*. Утверждение остается в силе, если ослабить предположения о* φ*, потребовав ее монотонности лишь в неотрицательном ортанте* R^s*, и усилить предположения о* $f=(f_1,\ldots,f_s)$*, потребовав неотрицательности этой вектор-функции. Наконец, в специальном случае* $\varphi(t_1,\ldots,t_s)=\max\{t_1,\ldots,t_s\}$ *результирующее накрытие имеет параметры* $\left(\varkappa,\ \sum_{i=1}^{s}\mu_i,\ \sum_{i=1}^{s}l_i\right)$. (*v*) *Пусть* Γ *—* $(\varkappa, \mu, l)$*-накрытие* Γ *для* $\varphi\colon E\to R$, λ *— аффинное отображение* E' *в* E, $\varphi_1(y)=\alpha\varphi(\lambda(y))+e(y)$, *где* $\alpha\geqslant 0$, $e(y)$ *— аффинная форма. Тогда* Γ *конструктивно порождает* $(\varkappa, \mu, l)$*-накрытие* Γ' *для* φ_1.

(*vi*) *Пусть* Γ *—* $(\varkappa, \mu, l)$*-накрытие для* $\varphi\colon E\to R$ *и множество* $\{x\in E\,|\,\varphi(x)<0\}$ *непусто. Тогда* Γ *конструктивно порождает* $(\varkappa, \mu, 1+l)$*-накрытие* Γ' *для множества* $G=\{x\in E\,|\,\varphi(x)\leqslant 0\}$.

Опишем методику применения базового метода к задаче

$$\varphi_0(x)\to\min\,|\,x\in G\subseteq E,\quad \varphi_i(x)\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant m \tag{2}$$

в предположении, что имеются $(\varkappa, \mu_i, l_i)$-накрытия Γ_i для φ_i, $0\leqslant i\leqslant m$, и $(\varkappa, \mu, l)$-накрытие Γ для $G\in C(E)$. Будем также предполагать, что (2) удовлетворяет условию Слейтера. Положим $E'=R\times E$, и пусть $\psi_i(t,x)\colon E'\to R$ есть $\varphi_i(x)$ при $i>0$ и $\varphi_0(x)-t$ при $i=0$. Обозначим $G'=R\times G\subseteq E'$. По теореме 6 исходные накрытия конструктивно порождают соответственно накрытия Γ_i' для ψ_i, $0\leqslant i\leqslant m$, и накрытие Γ' для G'; параметры накрытий сохраняются. По той же теореме штрихованные накрытия порождают $\left(\varkappa,\ \sum_{i=0}^{m}\mu_i,\ \sum_{i=0}^{m}l_i\right)$-накрытие Γ'' для функции $\max_{0\leqslant i\leqslant m}\psi_i=\psi_*$. Поскольку (2) удовлетворяет условию Слейтера, $\inf\{\psi_*(z)\,|\,z\in E'\}<0$, так что по Т.6 (*v*) Γ'' конструктивно порождает $\left(\varkappa,\ \sum_{i=0}^{m}\mu_i,\ 1+\sum_{i=1}^{m}l_i\right)$-накрытие Γ_+ для множества $G_+=\{z\in E'\,|\,\psi_*(z)\leqslant 0\}$. Ввиду того же условия Слейтера $\operatorname{int}\{G'\cap G_+\}\neq\varnothing$, и по Т.6 (*iii*) Γ_+ и Γ' порождают $\left(\varkappa,\ \mu+\sum_{i=0}^{m}\mu_i,\ 1+l+\sum_{i=0}^{m}l_i\right)$- накрытие Γ_* для множества $G_*=G'\cap G_+=\{(t,x)\in R\times E\,|\,x\in G,\ \varphi_i(x)\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \varphi_0(x)\leqslant t\}$. Пусть $\Gamma_*=(E^*, G^*, \pi, F^*)$. Рассмотрим задачу

$$\varphi(u)\equiv t(\pi(u))\to\min\,|\,u\in G^*, \tag{3}$$

где для $z\in E'=R\times E$ $t(z)$—R-компонента z. Ввиду $\pi(G^*)=G_*$ задача (3) в естественном смысле слова эквивалентна задаче $t\to\min\,|\,(t,x)\in G_*$, а эта эквивалентна (2). Остается заметить, что задача (3) «почти годится» для решения базовым методом; барьер F^* для G^* конструктивно порожден исходными накрытиями, целевой функционал (3) линеен и, в случае разрешимости исходной задачи, ограничен снизу на G^*, а следовательно, согласован с F^* (Т.1 (*v*), (*ii*)). Единственное осложнение связано с возможной неограниченностью G_*. Покажем, что и здесь не возникает принципиальных проблем. Именно, предположим, что допустимое множество G_0 задачи (2) ограничено, и в нашем распоряжении имеются постоянные $t_*<t^*$, такие, что $\varphi_0(x)\in(t_*, t^*)$ при $x\in G_0$. Пусть $G_{**}=\{(t,x)\in G_*\,|\,t_*\leqslant t\leqslant t^*\}$; тогда $G_{**}\subseteq G_*$ и G_{**} ограничено. Поскольку Γ_* — накрытие G_*, а G_{**} — ограниченная часть G_*, то можно указать ограниченное подмножество в G_*, образ которого при отображении π содержит G_{**}; это подмножество можно считать имеющим вид $G_r=\{u\in G^*\,|\,u^Tu\leqslant r^2\}$, а также, что $\operatorname{int} G_r=\varnothing$. Пусть теперь $G_r^+=\{u\in G_r\,|\,t(\pi(u))\in[t_*, t^*]\}$. Ясно, что $G_r^+\subseteq C(E^*)$ и $\pi(G_r^+)=G_{**}$. Далее, множество G_r^+ получается из G^* добавлением одного квадратичного

и двух линейных ограничений, поэтому F^* индуцирует $(\varkappa,\ \mu+O(\varkappa^{-2}))$-барьер F_*^+ для G_r^+ (Т.1 (vi), Т.1 (i), (ii)). Очевидно, $(E^*,\ G_r^+,\ \pi,\ F_*^+)$ — накрытие для G_{**}, так что задача

$$t(\pi(u))\to\min|u\in G_r^+, \tag{3'}$$

эквивалентна задаче $t\to\min|(t,\ x)\in G_{**}$, а эта последняя эквивалентна (2) ввиду определения t^*, t_*. Итак, мы редуцировали (2) к задаче (3′), которую можно решать базовым методом, поскольку G_r^+ ограничено.

В заключение приведем сводку правил, помогающих проверять существование накрытий у функций, «заданных формулами».

A. Правила композиции.

(i) Умножение $(\varkappa,\ \mu,\ l)$-регулярной функции на положительную постоянную, добавление аффинной формы и аффинная замена переменных оставляют ее $(\varkappa,\ \mu,\ l)$-регулярной.

(ii) Максимум $(\varkappa,\ \mu',\ l')$- и $(\varkappa,\ \mu'',\ l'')$-регулярных функций $(\varkappa,\ \mu'+\mu'',\ l'+l'')$-регулярен; сумма $(\varkappa,\ \mu_i,\ l_i)$-регулярных функций, $1\leqslant i\leqslant s$, $\left(\varkappa,\ \sum_{i=1}^{s}\mu_i O(\varkappa^{-2}),\ s+\sum_{i=1}^{s} l_i\right)$-регулярна.

(iii) Суперпозиция $(\varkappa,\ \mu,\ l)$-регулярной монотонной на R^s (на неотрицательном ортанте R^s) функции φ с s-мерной (соответственно s-мерной неотрицательной) вектор-функцией $f=(f_1,\ldots,f_s)$, с $(\varkappa,\ \mu_i,\ l_i)$-регулярными f_i, $\left(\varkappa,\mu+\sum_{i=1}^{s}\mu_i,\ s+l+\sum_{i=1}^{s} l_i\right)$-регулярна.

B. Регулярность функций одного переменного. При любом $\varkappa\in(0,\ \varkappa_*)$ и надлежащих абсолютных постоянных в фигурирующих далее $O(\cdot)$:

(i) Функции x и $x_+=\max\{0,\ x\}$ $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярны.

(ii) При $1\leqslant p<\infty$ функции $|x|^p$ и $(x_+)^p$ $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярны (постоянная в $O(\cdot)$ не зависит от p);

(iii) Функция $\exp(x)$ $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярна.

C. Регулярность некоторых функций многих переменных. При любом $\varkappa\in(0,\ \varkappa_*)$ и надлежащих абсолютных постоянных в фигурирующих далее $O(\cdot)$:

(i) Выпуклая квадратичная форма на R^n $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярна.

(ii) Функция $(x^Tx)^{1/2}$ на R^n $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярна.

(iii) Функция $\|x\|$ на пространстве $m\times n$ — матриц $(\varkappa,\ O(\min\{m,\ n\}\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярна; (iv) При $1\leqslant p<\infty$ функция $\|x\|_p^p\equiv\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p$: $R^n\to\boldsymbol{R}$, $(\varkappa,\ O(n\varkappa^{-2}),\ n)$-регулярна; при $2\leqslant p<\infty$ то же верно для функции $\|x\|_p^{p/2}$ на R^n.

6. Резюме. Укажем несколько типов задач выпуклого программирования, к которым применим намеченный подход. В п.п. (i)—(iii) речь будет идти об удовлетворяющих условию Слейтера задачах вида (2) с ограниченным допустимым множеством G_0 и евклидовым шаром G (или $G=E$); выписываются оценки числа N шагов второго этапа и суммарного числа M АО второго этапа, гарантирующих построение приближенного решения x задачи относительной погрешности $(\varphi_0(x)-\varphi_0(x_*))/(t^*-t_*)$, не большей, чем $\varepsilon\in(0,\ 1)$ (t^*, t_* описаны в п. 5, x_* — точное решение). Речь идет о базовом методе, ориентированном на барьер с $\varkappa=0{,}5$ $\delta_*=0{,}5$.

(i) Линейное и квадратичное программирование уже обсуждались: $N\leqslant O(m^{1/2}\ln 2m/\varepsilon)$, $M\leqslant O((mn^2+n^3)N)$.

(ii) Геометрическое программирование (ограничения — позиномы) стандартным образом сводится к задаче вида (2) с $\varphi_i(x)=G_i+\sum_j\alpha_{i,j}\exp\cdot(b_{i,j}^T\ x)$, $\alpha_{i,j}>0$. Функция $\exp(z)$ $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярна $(B.(iii))$. Таким образом, если k_i — число мономов в φ_i, то φ_i $(\varkappa,\ O(k_i\varkappa^{-2}),\ k_i)$-регулярна; получаем поэтому $N\leqslant O(k^{1/2}\ln 2k/\varepsilon)$, $M\leqslant O((k+n)^3N)$, k — общее число мономов во всех φ_i.

(iii) Приближения в $\|\cdot\|_p$: $\varphi_0(x)=\|Ax-b\|_p^p$, $A=k\times n$-матрица, $b\in R^k$, φ_i, $1\leqslant i\leqslant m$, предположим просто линейными (такие задачи часто возникают в статистике). Целевой функционал $(\varkappa,\ O(k\varkappa^{-2}),\ k)$-регулярен, ограничения $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярны; $N\leqslant O((k+m)^{1/2}\ln 2(k+m)/\varepsilon$, $M\leqslant$ $\leqslant O((k+n)^2 mN)$.

(iv) Минимизация нормы матрицы. Пусть E — пространство $k\times n$-матриц, $\varphi_0(x)=\|x\|$, φ_i, $1\leqslant i\leqslant m$, скажем, квадратичны. Целевой функционал $(\varkappa,\ O(\min\{k,\ n\}\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярен; ограничения $(\varkappa,\ O(\varkappa^{-2}),\ 0)$-регулярны. Если G — евклидов шар (или E), то $N\leqslant O((\min\{k,\ n\}+m)^{1/2}\ln 2\times$ $\times(\min\{k,\ n\}+m)/\varepsilon))$, $M\leqslant O((m+kn)k^2n^2N)$.

(v) Вписывание в многогранник эллипсоида минимального объема (о роли этой задачи для построения оптимального по числу итераций метода негладкой выпуклой минимизации см. [5]). Задача такова: в R^n списком m уравнений граней задан компактный многогранник Q с непустой внутренностью; требуется найти эллипсоид максимального объема содержащийся в Q. Имея в виду нужды [5], можно ограничиться случаем, когда Q содержит единичный шар R^n и содержится в шаре радиуса $O(n)$; надлежит найти лежащий в Q эллипсоид, объем которого не менее $(1-\varepsilon)$-й доли максимально возможного. Предложенный в [5] метод решения этой задачи при $m=O(n\ln n)$ (только этот случай и представляет интерес для [5]) имеет трудоемкость $O(n^8\ln n/\varepsilon)$ АО. Лучшего метода, насколько известно, не предлагалось. Данная задача может быть решена базовым методом с трудоемкостью (в сумме по обоим этапам) $O(m^{9/2}\ln\{2m/\varepsilon\})$ АО; при поиске вписанного эллипсоида с заданным центром, имеющего максимальный при этих условиях объем, оценка понижается до $O(m^{3,5}\ln\{2m/\varepsilon\})$ АО.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нестеров Ю. Е.* Полиномиальные методы в линейном и квадратичном программировании // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 3.
2. *Нестеров Ю. Е.* Полиномиальные итеративные методы линейного и квадратичного программирования // Вопр. кибернетики. М.: АН СССР. Науч. совет по компл. пробл. «Кибернетика», 1988.
3. *Renegar J.* A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming // Math. Programming. 1988. V. 40. № 1.
4. *Vaidya P. M.* An algorithm for linear programming which requires $O((m+n)n^2+$ $+(m+n)^{1.5}n)L)$ arithmetic operations // Proc. 19th Ann. ACM Symp. Theory Comput. New York City, May 25–27, 1987. N. Y., 1987.
5. *Тарасов С. В., Хачиян Л. Г., Эрлих А. И.* Метод вписанных эллипсоидов // Докл. АН СССР. 1980. Т. 298. Вып. 5.

Поступила в редакцию
26 II 1988